PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN A

1. Un satélite de masa $1.08 \cdot 10^{20}$ kg describe una órbita circular alrededor de un planeta gigante de masa $5.69 \cdot 10^{26}$ kg. El periodo orbital del satélite es de 32 horas y 53 minutos.

a) Si la velocidad de escape desde la superficie del satélite es 239 m/s, calcular su radio en km.

b) Calcular hasta qué altura sobre la superficie del satélite subirá un objeto lanzado verticalmente a 50 m/s.

c) Calcular en km/s la velocidad del satélite en su órbita alrededor del planeta gigante.

Constante de gravitación $6.67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

a) Para un objeto de masa *m* situado en la superficie el valor de energía cinética que hace que su energía total sea cero es el que corresponde a la diferencia de energías potenciales entre la superficie y el infinito. La velocidad correspondiente es la velocidad de escape:

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 = U_\infty - U_{superf} = 0 - -G \frac{M_S\, m}{R_S}$$

$$R_S = \frac{2GM_S}{v_{esc}^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} 1.08 \cdot 10^{20}}{239^2} = 2.52 \cdot 10^5 \text{ m} = 252 \text{ km}$$

b) La energía cinética de un objeto lanzado a 50 m/s es $E_C = \frac{1}{2} m \cdot 50^2 = 1250\, m$ (J), siendo *m* la masa del objeto en kg. Al tratarse de una velocidad menor que la velocidad de escape, el objeto subirá hasta que dicha energía cinética se haya convertido en energía potencial (después volverá a caer, pero eso es ajeno al enunciado). La diferencia de energías potenciales entre la superficie y la altura alcanzada *h* se calculará igualando:

Energía cinética = Energía potencial (altura *h*) – Energía potencial (superficie)

$$E_C = 1250\, m = -G \frac{M_S \cdot m}{R_S + h} - \left(-G \frac{M_S \cdot m}{R_S}\right) = -G\, M_S \cdot m \left(\frac{1}{R_S + h} - \frac{1}{R_S}\right)$$

$$\frac{h}{R_S + h} = 1250 \frac{R_S}{G\, M_S} = 4.38 \cdot 10^{-2} \rightarrow 0.956 h = 11039 \rightarrow h = 11544 \text{ m}$$

c) La fuerza centrípeta ejercida por el planeta sobre el satélite obligándole a describir su órbita es igual a la fuerza de atracción gravitatoria. Puesto que conocemos el periodo orbital podemos determinar el radio *r* de la órbita del satélite:

$$F = m\, \omega^2\, r = m\, r \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G \frac{M_P\, m}{r^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G M_P T^2}{4\pi^2}}$$

Sustituyendo *T* = 32 h 53 min = 118380 s, $M_P = 5.69 \cdot 10^{26}$ kg queda $r = 2.38 \cdot 10^8$ m

La velocidad orbital del satélite es la longitud de la circunferencia que describe alrededor del planeta dividida por el tiempo que invierte en hacerlo:

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2.38 \cdot 10^8}{118380} = 1.26 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 12.6 \text{ km/s}$$

PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN A

2. Un electrón confinado dentro de un campo magnético uniforme de 0.1705 T describe una órbita circular de 0.2 mm de radio. Esta órbita está contenida en un plano perpendicular a las líneas del campo.

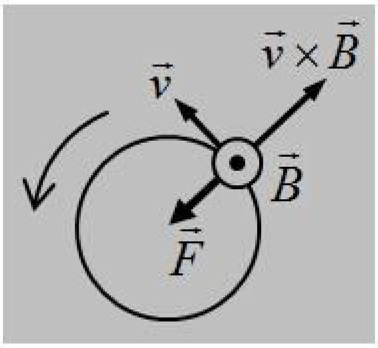
a) Explicar si el sentido de giro del electrón en su órbita será horario o antihorario. Se valorará la inclusión de un diagrama adecuado para ilustrar la explicación.

b) Calcular la velocidad y la energía del electrón en julios y en electrón voltios.

c) ¿Cuál es la frecuencia del electrón en su órbita?.

Datos del electrón: masa $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) La fuerza magnética que actúa sobre el electrón dentro del campo es $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$, por lo que al ser negativa su carga eléctrica, la fuerza tendrá sentido opuesto al producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$. Esta fuerza actúa como una fuerza centrípeta que cambia la dirección de la velocidad pero no el módulo, apuntando siempre hacia el centro de la trayectoria circular. Visto desde arriba (ver esquema adjunto), el electrón bajo el efecto de esta fuerza describirá órbitas en sentido antihorario.



b) El módulo de la fuerza magnética es igual al módulo de la fuerza centrípeta. Teniendo en cuenta que la órbita está contenida en un plano perpendicular a las líneas de campo, el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ es 90º.

$$e \cdot v \cdot B\ sen\ 90º = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \frac{e \cdot B \cdot R}{m} = 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Energía cinética: $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = 1.64 \cdot 10^{-17}$ J

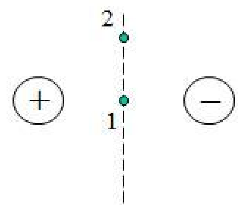
Por definición 1 eV es la energía que adquiere un electrón cuando se acelera a través de una ddp de 1 V. Por lo tanto 1 eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C·1 V = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J.

Energía cinética: $E_C = \frac{1.64 \cdot 10^{-17}\text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{ J/eV}} = 102$ eV

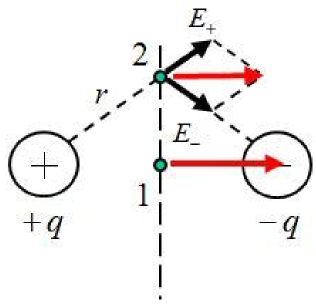
c) La frecuencia es el número de veces por segundo que recorre la órbita (inversa del periodo). La longitud de ésta es $2\pi R$, y su velocidad v es conocida.

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2.1 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 4.77 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN A



3.- Consideremos los puntos 1 y 2 de la figura, situados sobre la mediatriz del eje de un dipolo eléctrico (dos cargas puntuales del mismo valor y distinto signo). Explicar razonadamente qué dirección y sentido tendrá el campo eléctrico en cada uno de esos puntos y en cuál de los dos será mayor su módulo (acompañar la explicación de un diagrama indicando dirección y sentido en cada caso).



Como los puntos 1 y 2 están sobre la mediatriz del eje del dipolo, se encuentran a la misma distancia de las dos cargas, Por lo tanto la contribución de cada una de ellas al módulo del campo eléctrico es la misma, $E = k\frac{q}{r^2}$. Por otra parte, la orientación simétrica de las contribuciones del campo eléctrico en todos los puntos de la mediatriz hace que se anulen las componentes paralelas a ésta, por lo que el campo eléctrico será siempre perpendicular a dicha mediatriz.

Esto se ha dibujado para el caso del punto 2 (se han señalado las contribuciones $\boldsymbol{E_+}$y $\boldsymbol{E_-}$).

Además, los puntos más cercanos al eje están a menor distancia de las cargas, por lo que el módulo del campo eléctrico es tanto mayor cuanto más cerca del eje y va decreciendo a medida que nos alejamos del mismo. Así que el módulo del campo eléctrico es mayor en el punto central del dipolo.

4.- La velocidad de las ondas transversales en una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos es 35 m/s. Cuando en esta cuerda se propagan ondas de 14 Hz, su interferencia da lugar al segundo armónico de una onda estacionaria. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

La velocidad de propagación en función de la longitud de onda λ y la frecuencia *f* es $v = \lambda f$.
De aquí obtenemos la longitud de onda: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{35}{14} = 2.5$ m/s.

El segundo armónico de una onda estacionaria tiene una longitud de onda que es precisamente igual a la longitud de la cuerda, por lo tanto esta cuerda mide 2.5 m.

PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN A

5.- Un núcleo radiactivo N1 se desintegra emitiendo una partícula α, dando como resultado el núcleo N2. Este N2 emite una partícula β y origina el núcleo N3. A su vez, N3 se desintegra en N4 por emisión de otra partícula β (esquema en la figura al margen).

$$N1 \rightarrow N2 + \alpha$$
$$N2 \rightarrow N3 + \beta$$
$$N3 \rightarrow N4 + \beta$$

¿Cuáles de los núcleos N1, N2, N3 y N4 tienen mayor y menor número atómico? ¿Cuáles de los núcleos N1, N2, N3 y N4 tienen mayor y menor número másico?

La emisión de una partícula α disminuye en dos unidades el número atómico Z y en cuatro unidades la masa atómica M. La emisión de una partícula β aumenta en una unidad el número atómico Z y deja igual el número másico M. Por lo tanto, si llamamos Z1 y M1 a los números atómico y másico del núcleo N1, los núcleos sucesivos tendrán las siguientes propiedades:

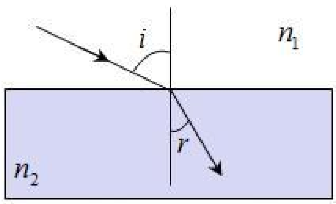
	N1	N2	N3	N4
Núm. atómico	Z1	Z1-2	Z1-2+1 = Z1-1	Z1-1+1 = Z1
Núm. másico	M1	M1-4	M1-4	M1-4

Es decir, los núcleos N1 y N4 tienen igual número atómico (son isótopos del mismo elemento), siendo N4 el isótopo más ligero con 4 unidades de masa menos. El menor número atómico lo tiene el núcleo N2 (dos unidades menos que N1).

El núcleo más pesado es N1. Los otros tres tienen la misma masa, cuatro unidades menos cada uno.

6.- (a) Enunciar y explicar brevemente la ley de Snell de la refracción. (b) ¿Es posible que un rayo de luz que se propaga en agua alcance la superficie de separación con el aire y en lugar de refractarse se refleje completamente en dicha superficie, volviendo en su totalidad al agua sin que haya nada de luz refractada? Explicar brevemente. Índice de refracción del agua 1.33.

(a) La ley de Snell (también llamada ley de Descartes) se aplica a la luz que atraviesa una superficie de separación entre dos medios de diferentes propiedades ópticas, y establece que el producto del índice de refracción del primer medio por el seno del ángulo de incidencia es igual al producto del índice de refracción del segundo medio por seno del ángulo de refracción.



$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

(b) Puesto que el agua es ópticamente más densa que el aire (índice igual a 1.33 frente a índice 1 del aire) puede ocurrir que al calcular el seno del ángulo de refracción predicho por la ley de Snell para un rayo que viaja por el agua con un ángulo mayor de cierto valor, llamado ángulo límite, y que alcanza la superficie de separación con el aire, el resultado matemático sea mayor que la unidad. El valor máximo del seno de un ángulo es la unidad, que corresponde a un ángulo de 90º, así que tal situación se interpreta como un fenómeno de reflexión total, en que el rayo de luz se refleja completamente en la superficie volviendo al agua, el medio del que procede y sin que exista luz refractada al aire.

PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN B

1. Una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos vibra de acuerdo con la ecuación

$y = 5\,\mathrm{sen}\frac{\pi\,x}{3}\cos 40\pi t$, donde *x* e *y* se expresan en cm y *t* en segundos.

a) Calcular la velocidad y la amplitud de las ondas viajeras cuya superposición da lugar a esta vibración.

b) Hallar la distancia entre nodos consecutivos. Si la longitud de la cuerda tensa es 48 cm, ¿qué armónico aparece en ella?

c) Calcular la velocidad de una partícula de la cuerda situada en la posición *x* = 1.5 cm cuando $t = \frac{9}{8}$ s.

a) La vibración de esta cuerda constituye una onda estacionaria. La forma general de su ecuación es $y = 2\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi\,x}{\lambda}\cos\frac{2\pi\,t}{T}$, siendo λ la longitud de onda y T el periodo de las ondas viajeras cuya superposición origina la onda estacionaria.

$2A = 5\text{ cm} \rightarrow A = 2.5\text{ cm}$ $\qquad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \lambda = 6\text{ cm}$ $\qquad 40\pi = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{1}{20} = 0.05\text{ s}$

Velocidad de las ondas viajeras: $\quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6\text{ cm}}{0.05\text{ s}} = 120\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1.20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) Dos nodos consecutivos de una onda estacionaria están separados por media longitud de onda. Por tanto, la distancia entre nodos consecutivos es $d = \frac{\lambda}{2} = 3$ cm.

La relación entre la longitud *L* de la cuerda, la longitud de onda λ y el armónico *n* es $L = n\frac{\lambda}{2}$ y por lo tanto el armónico en este caso será $n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2\cdot 48}{6} = 16$.

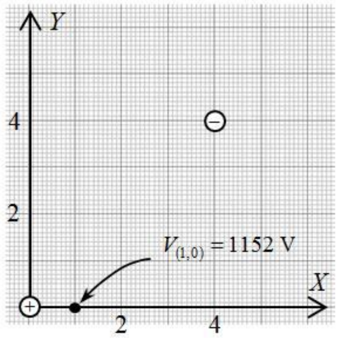
c) Para calcular la velocidad de vibración transversal de cualquier partícula de la cuerda derivamos respecto al tiempo:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 5\,\mathrm{sen}\frac{\pi\,x}{3}(-40\pi\,\mathrm{sen}\,40\pi t) = -200\pi\,\mathrm{sen}\frac{\pi\,x}{3}\mathrm{sen}\,40\pi t\ \ (\text{cm/s})$$

En la posición *x* = 1.5 cm cuando $t = \frac{9}{8}$ s tenemos que $\mathrm{sen}\,40\pi\frac{9}{8} = \mathrm{sen}\,45\pi = 0$, por tanto la velocidad de vibración para ese punto en dicho instante es igual a cero.

PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN B

2.- Dos cargas iguales de signos contrarios $+q$ y $-q$ están colocadas tal y como se indica en la figura, con la carga positiva en el origen de coordenadas y la negativa en el punto (4,4) (distancias medidas en metros). La constante de Coulomb es $k = 9{\cdot}10^9\ N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}$.



(a) Determinar el valor de q si el potencial eléctrico en el punto (1,0) es +1152 V.

(b) Calcular el campo eléctrico (módulo y sentido) en el punto (0,4). Se valorará un esquema adecuado.

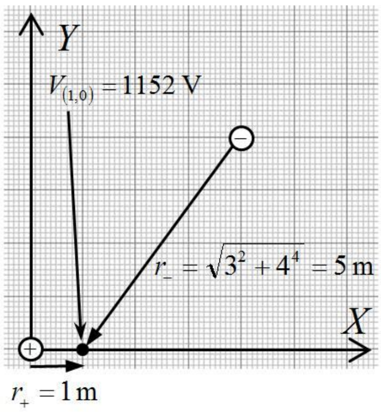
(c) Calcular el trabajo para trasladar una carga de $+10^{-10}$ C desde el punto (0,4) hasta el punto (1,0). ¿Cuál es el significado del signo resultante?

(a) El potencial en el punto (1,0) es la suma de los potenciales debidos a las dos cargas. Véanse las distancias r_+ y r_- en el esquema a la derecha.

$$V_+ = k\frac{q}{r_+} = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{1} \qquad V_- = k\frac{(-q)}{r_-} = -9 \cdot 10^9 \frac{q}{5}$$

$$V_{(1,0)} = V_+ + V_- = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{1} - 9 \cdot 10^9 \frac{q}{5} = 1152 \text{ V}$$

$$9 \cdot 10^9 q \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1152\ V \;\rightarrow\; q = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$



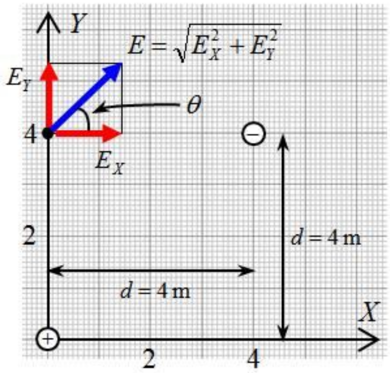
(b) El punto (0,4) es equidistante de las dos cargas, siendo la distancia d = 4 m. Calculamos el módulo de la contribución de cada carga al campo eléctrico total (véanse las direcciones en la figura al margen).

$$\text{Carga positiva: } E_Y = k\frac{q}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1.6 \cdot 10^{-7}}{4^2} = 90 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\text{Carga negativa: } E_X = k\frac{q}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1.6 \cdot 10^{-7}}{4^2} = 90 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E = \sqrt{E_X^2 + E_Y^2} = \sqrt{90^2 + 90^2} = 127.3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{E_Y}{E_X} = tan^{-1}(1) = 45^{\text{o}}$$



(c) Para determinar el trabajo pedido, tenemos que calcular la d.d.p. entre los puntos (0,4) y (1,0) y eso requiere determinar primero el potencial en el punto (0,4). Véase que dicho potencial debe ser cero, pues el punto (4,0) está colocado simétricamente respecto a q y $-q$. Esto puede corroborarse con un cálculo sencillo:

$$V_{(0,4)} = 9 \cdot 10^9 \frac{1.6 \cdot 10^7}{4} + 9 \cdot 10^9 \frac{(-1.6 \cdot 10^7)}{4} = 0 \text{ V}$$

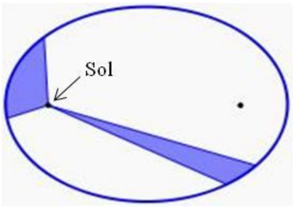
El trabajo es igual a menos la variación de energía potencial:

$$W = -q' \cdot \left(V_{(1,0)} - V_{(0,4)}\right) = -10^{-10} \cdot 1152 = -1{,}152 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

El signo negativo significa que el trabajo para llevar la carga positiva $q'=10^{-10}$ C desde (4,0) hasta (1,0) debe realizarlo un agente externo, porque hay que incrementar la E. potencial.

PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN B

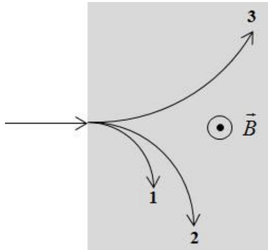
3.- Enunciar las leyes de Kepler. Justificar razonadamente la 3ª ley.



Primera ley: los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, ocupando éste uno de los focos de la elipse.
Segunda ley (ley de las áreas): el radio vector que une al planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto implica que el planeta se mueve a mayor velocidad cuando está cerca del Sol, véase ilustración en la figura de la derecha.
Tercera ley: el cuadrado del periodo orbital T de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita. Esto puede justificarse si igualamos la fuerza de gravitación de Newton entre el planeta (masa m) y el Sol (masa M) con la fuerza centrípeta necesaria para que describa su órbita. Por sencillez, lo demostramos en el caso de una órbita circular, donde el semieje de la órbita es igual al radio R.

$$F_{Newton} = G\frac{Mm}{R^2} = F_{centrípeta} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \rightarrow \frac{GM}{4\pi^2}T^2 = R^3$$

4.- En la figura vemos las trayectorias de tres partículas cargadas que viajan perpendicularmente a las líneas de un campo magnético dirigido en sentido vertical (saliente del plano del papel, zona sombreada). Las tres partículas tienen igual masa y sus cargas tienen el mismo valor absoluto. Ordenar razonadamente sus velocidades de mayor a menor y explicar cuál es el signo de cada una de ellas.

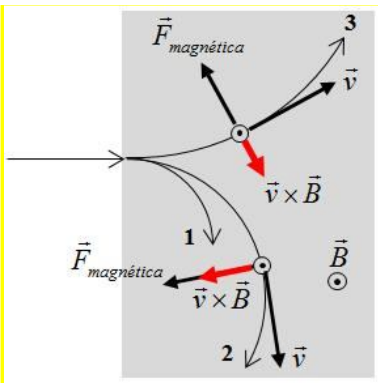


Cuando una partícula de masa m y carga q entra en un campo magnético uniforme ***B*** viajando con velocidad ***v***, sufre una fuerza magnética que actúa como fuerza centrípeta y la obliga a describir una órbita circular: es decir, el módulo de la velocidad de la partícula no varía, sólo cambia su dirección a medida que describe la órbita. Si tenemos tres partículas con valores m y q iguales, el radio R de la órbita que describirá cada una es directamente proporcional a su velocidad, como puede verse igualando los módulos de las dos fuerzas:

$$F_{magnetica} = qvB = F_{centrípeta} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

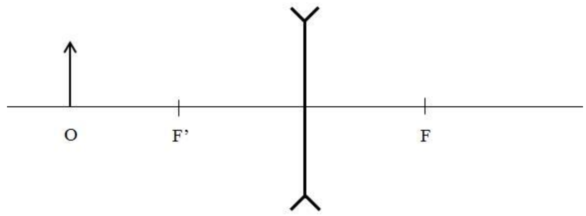
Por tanto, para las tres partículas del enunciado, el orden de velocidades será el mismo que el de los radios de las órbitas que describen. En orden de mayor a menor, la partícula 3 tiene la velocidad más alta (radio más grande), la partícula 2 tiene una velocidad intermedia y la partícula 1 tiene la menor velocidad (radio más pequeño).

Respecto a su carga, la curvatura de la órbita nos indica hacia donde está dirigida la fuerza magnética, y cómo ésta es igual (vectorialmente) a $\vec{F}_{magnética} = q\vec{v} \times \vec{B}$, resulta que la carga de una partícula será positiva si la fuerza magnética tiene el mismo sentido que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, y negativa en caso contrario. En el caso de las partículas 1 y 2, véase esquema, se cumple esto, por tanto son positivas. En el caso de la partícula 3, el sentido del producto es opuesto al de la fuerza magnética requerida para curvar la trayectoria de la partícula del modo indicado, por tanto la partícula 3 tiene carga negativa.

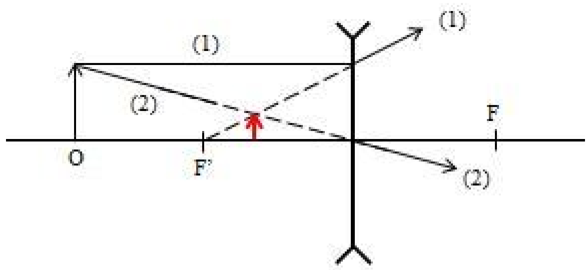


PAEG UCLM / Septiembre 2014 OPCIÓN B

5.- Construir un esquema de rayos para determinar la imagen del objeto O formado por la siguiente lente divergente:



Construcción de la imagen: al tratarse de lente divergente, la imagen se forma donde se unen las prolongaciones de los rayos refractados (líneas discontinuas).
Rayo (1): el que llega a la lente paralelo al eje óptico y se refracta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen de la lente divergente F'.



Rayo (2): el que pasa por el centro de la lente y no se desvía.

La imagen resultante es virtual, derecha y más pequeña que el objeto

6.- Para determinar la aceleración de la gravedad en el laboratorio de Física se miden los tiempos invertidos por cuatro péndulos de diferentes longitudes en realizar cinco oscilaciones. Los resultados aparecen en la tabla. Explicar qué tratamiento de datos hay que hacer y calcular la aceleración de la gravedad.

L (m)	***t*** (s)
1,5	12,3
2,4	15,5
2,8	16,8
3,1	17,7

El periodo *T* del péndulo simple está dado en función de su longitud *L* por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, siendo g la aceleración de la gravedad. Para hacer la determinación pedida a partir de estos datos obtenemos los periodos dividiendo por 5 los tiempos indicados en la tabla, calculamos el valor de g para cada uno despejando de la fórmula anterior y obtenemos la media aritmética.

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

L (m)	t (s)	T (= t/5) (s)	g (m/s^2)
1,5	12,3	2,46	9,79
2,4	15,5	3,1	9,86
2,8	16,8	3,36	9,79
3,1	17,7	3,54	9,77

Valor medio (m/s^2)= 9,80