ÍNDICE

UNIDAD 1: Matrices

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 10

1. Los electrodomésticos que vende una cadena en una gran ciudad los tiene en cuatro comercios C_1, C_2, C_3 y C_4. Vende tres marcas de televisores TV_1, TV_2 y TV_3. En un momento determinado, el comercio C_1 tiene 20 televisores de la marca TV_1, 18 del tipo TV_2 y 16 del TV_3. El comercio C_2, 22, 16 y 38, respectivamente. De igual forma, el comercio C_3, 30, 40 y 10. Por último, las unidades de C_4 son 15, 25 y 20. Expresa, de forma ordenada, los datos anteriores en una tabla.

En las filas de la tabla se han colocado las marcas de los televisores y en las columnas los comercios, obteniéndosela tabla:

	C_1	C_2	C_3	C_4
TV_1	20	22	30	15
TV_2	18	16	40	25
TV_3	16	38	10	20

2. Encuentra las soluciones de los sistemas siguientes por el método de Gauss, expresándolos en forma matricial:

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 11 \\ 2x - 5y + z = -14 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$

La resolución de los sistemas puede expresarse en la forma siguiente:

a) En la primera matriz realizamos la operación elemental por filas: multiplicamos por 2 la primera fila y por 3 la segunda, restando los productos anteriores y colocando los resultados en la segunda fila ($2F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2$), y obtenemos la segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 19 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 17 & -51 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución: x = 2, y = - 3.

b) En la primera matriz realizamos las operaciones elementales por filas: $2F_1 + F_2 \rightarrow F_2$ y $3F_1 + F_3 \rightarrow F_3$ y obtenemos la segunda matriz. En esta matriz realizamos la operación elemental por filas $9F_2 + F_3 \rightarrow F_3$ y obtenemos la tercera matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 2 & -5 & 1 & -14 \\ 3 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 9 & -11 & 40 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -56 & 112 \end{pmatrix}$$

La tercera matriz proporciona la solución: x = - 1, y = 2, z = - 2.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 29

1. Las edades de la familia. Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que, si escribe tres veces seguidas su edad, obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los cuatro miembros de al familia?

Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \quad \Rightarrow \quad P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen, respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.

Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual que para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

En general la madre tendrá xy años, xy = 10x + y años.

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{xyxyxy}{xy} = P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4$$

Ahora bien:

$$\frac{xyxyxy}{xy} = \frac{100\,000x + 10000y + 1000x + 100y + 10x + y}{10x + y} =$$

$$= \frac{101010x + 10101y}{10x + y} = \frac{10101\,(10x + y)}{10x + y} = 10101$$

Descomponemos 10 101 en factores: 10 101 = 37 · 13 · 7 · 3 · 1.

Luego las edades serán: P = 37 años, H_1 = 13 años, H_2 = 7 años, H_3 = 3 años y H_4 = 1 años.

2. Dos números. Encuentra dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

Llamamos x, y a los números. Se debe cumplir que: $x + y = x \cdot y = \frac{x}{y}$.

Resolviendo:

$$\begin{cases} x + y = x \cdot y \\ x \cdot y = \dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{x}{x-1} \\ xy^2 = x \end{cases} \quad \Rightarrow \; y = \pm 1$$

Para y = 1, se tiene que $\frac{x}{x-1} = 1$. Ecuación que no tiene solución.

Para y = - 1, se tiene que $\frac{x}{x-1} = -1$, entonces $x = \frac{1}{2}$.

La solución válida es: $x = \frac{1}{2}$, y = - 1.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 31

1. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$**.**

Halla la matriz X que verifique la igualdad M^{-1} X M = B – I.

En la siguiente imagen podemos ver la solución de esta actividad. La matriz unidad I la hemos introducido mediante el operador I_0 del menú **Matrices,** como vemos en la imagen. La matriz X la hemos hallado despejándola en la igualdad dada: X = M · (B – I) · M^{-1}

Introducimos las matrices M y B :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos al matriz X :

$$M \cdot (B - I_3) \cdot M^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

2. Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$**. Halla los valores de a para los cuales esta matriz no tiene inversa.**

Halla la inversa para a = - 1.

En la siguiente imagen podemos ver la resolución de esta actividad.

La matriz dada no tiene inversa para a = 0 y a = 1.

Para a = -1 obtenemos la matriz inversa de A que vemos en la imagen.

Introducimos la matriz A :

$A:=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ a & 1 & a-1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ a & 1 & a-1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A :

$|A| \rightarrow a^3-a^2$

Anulamos el determinante :

$\text{resolver}(a^3-a^2=0) \rightarrow \{\{a=0\},\{a=1\}\}$

Calculamos la inversa de la matriz A para a = − 1 :

$a:=-1 \rightarrow -1$

$A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

3. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3 & x\\ 2 & 3 & x & -2\\ 3 & x & -2 & 2\\ x & -2 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$

En la siguiente imagen podemos que las soluciones de esta ecuación son x = - 3 y x = -1.

Introducimos y calculamos el determinante :

$\left|\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3 & x\\ 2 & 3 & x & -2\\ 3 & x & -2 & 2\\ x & -2 & 2 & 3\end{pmatrix}\right| \rightarrow x^4+16\cdot x^2+104\cdot x+87$

Resolvemos la ecuación :

$\text{resolver}(x^4+16\cdot x^2+104\cdot x+87=0) \rightarrow \{\{x=-3\},\{x=-1\}\}$

4. Estudia el rango de la matriz $\begin{bmatrix}1 & -2 & m\\ m & -4 & 4\\ -1 & m & -2\end{bmatrix}$ **en función de los valores de m.**

En la siguiente imagen podemos ver que el determinante de esta matriz se anula para los valores m = 2 y m = - 4 y para estos valores el rango de la matriz es 1 y 2 respectivamente. Para todos los demás valores de m el rango de la matriz será 3 puesto que su determinante es no nulo.

Introducimos la matriz y calculamos su determinante:

$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de la matriz A:

$\left|\begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{pmatrix}\right| \rightarrow m^3 - 12 \cdot m + 16$

Anulamos el determinante:

resolver$(m^3 - 12 \cdot m + 16 = 0) \rightarrow \{\{m=-4\},\{m=2\}\}$

Hallamos el rango para m = 2:

$m := 2 \rightarrow 2$

rango(A) $\rightarrow 1$

Hallamos el rango para m = −4:

$m := -4 \rightarrow -4$

rango(A) $\rightarrow 2$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 34

1. A cuatro compañeros, A, B, C, D, de segundo de bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: “¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes”.

Las respuestas son: A opina que B y D; B opina que A y el mismo; C opina que A, B y D; D opina que el mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

Expresamos la información del enunciado en una tabla, poniendo un 1 en el caso que un individuo opine de otro que aprobará el curso y un 0 en caso contrario.

	A	**B**	**C**	**D**
A	0	1	0	1
B	1	1	0	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	1

Los valores de la tabla dan lugar a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcula a, b, c y de para que se cumpla $\begin{pmatrix} -2 & 3a \\ d & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 4 \\ 5 & c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Operamos e igualamos los elementos de las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} a+b-2 & 3a+4 \\ d+5 & c+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b-2=2a \\ 3a+4=2b \\ d+5=2c \\ c+7=2d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: a = 0, b = 2, c = 17/3 y d = 19/3.

3. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$**; calcula:**

a) A + B **b) A – B + C** **c) 2A + B – 3C** **d) AB – AC** **e) 2AB – 3AC + 4BC**

Los resultados de las operaciones son:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $AB - AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $2AB - 3AC + 4\,BC = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 88 \\ -32 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 84 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$

4. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas X, Y, Z, distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Las miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \end{array}$$

El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

Las matrices A_i, con i = 1, 2, 3, 4, muestran el volumen de aceite de cada uno de los almacenes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 44 & 92 & 160 \\ 72 & 116 & 176 \\ 96 & 132 & 184 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 40 \\ 18 & 29 & 44 \\ 24 & 33 & 46 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 66 & 138 & 240 \\ 108 & 174 & 264 \\ 144 & 198 & 276 \end{pmatrix}$$

El volumen total de aceite almacenado de cada calidad y de cada una de las marcas es:

$$T = \begin{pmatrix} 143 & 299 & 520 \\ 234 & 377 & 572 \\ 312 & 429 & 598 \end{pmatrix}$$

5. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \; \mathbf{y} \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos posibles son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 9 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 5 & -13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 5 \\ -4 & 12 & 7 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Obtén las matrices A y B que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ A-2B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Resolviendo los sistemas por reducción obtenemos:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

7. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de dimensión 2x2 cualquiera. En cada caso se cumplirá:

a) A · X = X · A $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a-2b \\ c+d & c-2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=a+b \\ a-2c=c+d \\ b+d=a-2b \\ b-2d=c-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=a-3b \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-3b \end{pmatrix} con\ a, b \in R.$$

b) B · X = X · B $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=a \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} con\ a,c \in R.$$

8. Para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$**, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:**

a) $\left(A^t\right)^t$ **b)** $(A+B)^t=A^t+B^t$ **c)** $(k\cdot A)^t=k\cdot A^t$ **d)** $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

En cada apartado obtenemos:

a) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\left(A^t\right)^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $(A+B)^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $k\cdot A=k\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & -k \\ 4k & 0 \end{pmatrix}$ y $(k\cdot A)^t=\begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$$k\cdot A^t=k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ y $(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

$$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 35

9. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

La descomposición de la matriz M es M = S + H, siendo S la matriz simétrica, $S = \dfrac{M + M^t}{2}$ y H la matriz antisimétrica, $H = \dfrac{M - M^t}{2}$.

En cada caso se obtiene:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}.

En cada uno de los dos casos calculamos las potencias sucesivas de A y B.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 = A^2 \cdot A = - I \cdot A = - A$

$A^4 = A^3 \cdot A = - A \cdot A = - A^2 = -(- I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = - I$

etcétera.

Observamos que las potencies de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las potencias sucesivas de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una ley de recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par: $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar: $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

11. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Realizando la operación elemental $3F_1 - 2F_2 \to F_2$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \to F_2$, $F_3 + F_1 \to F_3$ y $F_3 + F_2 \to F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1 \to F_2$, $F_3 + 4F_1 \to F_3$ y $3F_2 - 2F_3 \to F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

12. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumplirá $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 5c = 1 \\ -a + 3c = 0 \\ 2b - 5d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos:

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) No existe C^{-1}

13. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss-Jordan:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Utilizando el método de Gauss-Jordan obtenemos:

a) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to 2F_1 + F_2$; $F_2 \to 1/3\, F_2$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to F_1 - F_2$; $F_3 \to F_3 - F_2$; $F_2 \to F_2 + F_3$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos que la matriz inversa de C es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra, en cada caso, la matriz X que cumple:

a) X · A + 2B = C **b) A · X – B = C** **c) A · X · B = C**

a) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = (C - 2B) \cdot A^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot (B + C)$.

Operando con las matrices tenemos:

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{3} & \frac{5}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

15. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes, es decir, con el mismo rango.

a) Rango de $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=2$.

b) Rango de $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 1\end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=3$.

c) Rango de $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 6 & 15\end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ = 2.

16. a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2x4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

En ambos casos existen múltiples respuestas.

a) La matriz de dimensión 2x4,

- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2 & -2\end{pmatrix}$

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$

- con rango 3 o 4 no es posible construirlas.

b) Un ejemplo podría ser:

- con rango 1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$ - con rango 2: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

- con rango 3: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ - con rango 4: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

17. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a.

a) $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

Las soluciones son:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+2 & a-2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a+6 \end{pmatrix}$

Si a = - 6 el rango es 1, y si a ≠ - 6 el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$

Si a ≠ 1 y a ≠ - 1 el rango es 3.

Si a = - 1 o a = 1 rango es 2.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$

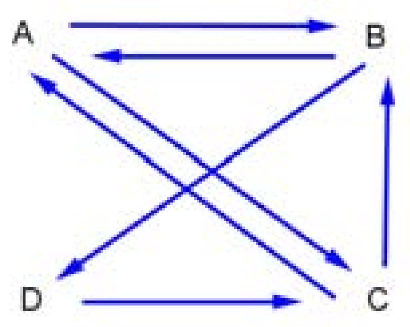
Si a ≠ - 2 y a ≠ 1 el rango es 3.

Si a = - 2 el rango es 2.

Si a = 1 el rango es 1.

18. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz M. Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una determinada enfermedad. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

Dibujamos el grafo:



Calculamos M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de segundo orden. Así, por ejemplo:

$a_{11} = 2$ indica que A se contagia a sí mismo a través de B o C al existir los caminos A-B-A o A-C-A.

$a_{12} = 1$ indica que A contagia a B a través de un tercero al existir el camino A-C-B.

Calculamos M^3:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de tercer orden. Así, por ejemplo:

$a_{12} = 2$ indica que A contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos A-C-A-B o A-B-A-B.

$a_{32} = 2$ indica que C contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos C-A-C-B o C-B-A-B.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 36

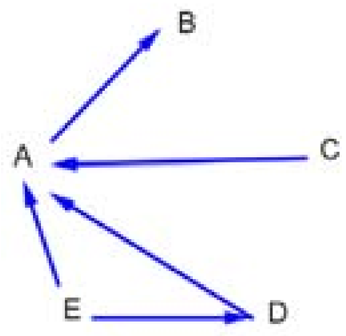
1. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:

a) Construye la matriz de influencias: M.

b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M².

c) Interpreta la suma de las filas de M y de sus columnas.

Dibujamos el grafo con las relaciones de influencias que se describen en el enunciado.



a) Teniendo en cuenta que los individuos de las filas influyen sobre los individuos de las columnas, como puede verse en el grafo, la matriz de influencias es:

$$\begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = M$$

b) La matriz de influencias en dos etapas es M²:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El significado de los elementos que valen 1 es:

- $a_{32} = 1$: C influye en B a través de A.
- $a_{42} = 1$: D influye en B a través de A.
- $a_{51} = 1$: E influye en A a través de D.
- $a_{52} = 1$: E influye en B a través de A.

c) La suma de las filas es 1, 0, 1, 1 y 2, respectivamente.

Estos valores significan:

Fila	Suma de la fila	Significado
Primera	1	A influye en una persona, B
Segunda	0	B no influye en nadie
Tercera	1	C influye en una persona A
Cuarta	1	D influye en una persona, A
Quinta	2	E influye en dos personas, A y D

La suma de las columnas es 3, 1, 0, 1, 0, respectivamente.

Estos valores significan:

Columna	Suma de la columna	Significado
Primera	3	A está influenciado por 3 personas, C, D y E

Segunda	1	B está influenciado por una persona, A
Tercera	0	C no está influenciado
Cuarta	1	D está influenciado por una persona, E
Quinta	0	E honesta influenciado

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$**,**

a) Determina el valor de los parámetros a y b para que se cumpla A · B = B · A.

b) Determina el valor de a para el cual se verifica A^2 = A.

A) Si A · B = B · A, entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6+ab & -a \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3a \\ 2b+2 & ab \end{pmatrix}$$

Igualando términos:

$$\begin{cases} 6+ab = 6 \\ -a = 3a \\ -6 = 2b+2 \\ 0 = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases}$$

b) Si A^2 = 2A, entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-2a & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando términos:

$$\begin{cases} 4-2a = 4 \\ 2a = 2a \\ -2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \{a = 0$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, determina x para que se verifique la ecuación A^2 – 6A + 5I = O, donde O es la matriz cuyos elementos son nulos**.

Operando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 5I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 5 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando términos, obtenemos:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

4. Un investigador médico estudia la difusión de un virus en una población de 1000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80% de que un cobaya infectado venza al virus y un 10% de que un cobaya no infectado quede infectado. Actualmente, hay 100 cobayas infectados por el virus. ¿Cuántos estarán infectados la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectados?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \textit{Infectado} & \textit{No infectado} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{Infectado} \\ \textit{No infectado} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

Estarán infectados la próxima semana:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = X_1$$

Estarán infectados dentro de dos meses:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma: $P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 \\ 0,80 & 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,20x + 0,10y = x \\ 0,80x + 0,90y = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0,80x + 0,10y = 0 \\ 0,80x - 0,10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 8x$$

Si x + y = 1000, entonces: $\begin{cases} x = 899 \\ y = 111 \end{cases}$.

5. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de ciencias. Todos los que estudian matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiaran más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evolucionan el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} +1\ hora & -1\ hora \end{array} \\ \begin{array}{c} +1\ hora \\ -1\ hora \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los dos estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

La matriz del día siguiente es:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = X_1$$

La matriz del segundo día es:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = X_2$$

La matriz del tercer día es:

$$P \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 161 \end{pmatrix} = X_3$$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 1 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,25y = x \\ x + 0,75y = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 0,25y = 0 \\ x - 0,25y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 4x$$

Si x + y = 200, entonces: $\begin{cases} x = 40 \\ y = 160 \end{cases}$.

6. Encuentra las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que conmuta con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Se cumplirá A · X = X · A, entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 4a+2b \\ 2c & 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Igualando términos:

$$\begin{cases} 2a = 2a + 4c \\ 4a + 2b = 2b + 4d \\ 4c + 2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c = 0 \\ 4a = 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

Las matrices que conmutan con A tiene la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales cualesquiera.

7. Calcula, razonando el procedimiento, la matriz A^{17}, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Realizamos las potencias sucesivas de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $A^{17} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$

8. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos,

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

a) Las matrices son:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \textit{Modelos} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}\begin{array}{c} \textit{Tamaños} \\ \begin{array}{cc} \textit{Grande} & \textit{Pequeño} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \textit{Grande} \\ \textit{Pequeño} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{Tornillos} & \textit{Soportes} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matriz que representa la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería es el resultado del producto que sigue:

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 & 8000 & 4000 \\ 8000 & 6000 & 6000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 112\,000 & 200\,000 & 136\,000 \\ 38\,000 & 72\,000 & 48\,000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \textit{Tornillos} \\ \textit{Soportes} \end{array}$$

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**, halla la matriz B que cumpla A + B = A · B.**

Resolviendo la ecuación matricial, obtenemos:

$$A + B = A \cdot B \quad \Rightarrow \quad A = A \cdot B - B \quad \Rightarrow \quad A = (A - I) \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = (A - I)^{-1} \cdot A$$

Las matrices A – I y $(A – I)^{-1}$ son:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz B es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 37

Un estudio sobre el empleo

El 75% de la población laboral de una Comunidad Autónoma tiene trabajo y el resto está en paro. Se prevé que cada año se destruirán un 10% de los empleos, por lo que el gobierno emprende un programa de reactivación económica con el que promete emplear anualmente al 20% de los parados.

a) Cumpliéndose la previsión, ¿será mejor o peor la situación al año siguiente? ¿Qué sucedería al cabo de dos años?

b) Si las condiciones se mantienen, calcula la evolución del empleo en los próximos diez años.

c) Si las cifras iniciales fuesen de un 60% de empleo y un 40% de paro, ¿cómo evolucionaría la situación?

d) Si cada año el 20% de los que tienen empleo pasan al paro, y el 30% de los parados encuentran empleo, forma la matriz de transición y estudia como evolucionaría.

e) Si el 12% de la población laboral está en paro y se destruyen cada año un 5% de los empleos, ¿hacia qué situación se evolucionaría empleando anualmente al 10% de los parados? ¿Cuál debería ser el plan de empleo para que el paro no alcanzase el 25%?

a) La situación del enunciado puede expresarse en la forma:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72,5 \\ 27,5 \end{pmatrix} = X_1$$

Observamos que se produce un descenso del empleo.

Lo que ocurre al cabo de dos años es:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 72,5 \\ 27,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70,75 \\ 29,25 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma:

$$P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,34 \\ 0,17 & 0,66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70,75 \\ 29,25 \end{pmatrix} = X_2$$

El empleo vuelve a descender por segundo año consecutivo.

Es el momento de hacer conjetura y confirmarlas o refutarlas.

b) Encontraremos como resultados:

$$P^3 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,78 & 0,44 \\ 0,22 & 0,56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,5 \\ 30,5 \end{pmatrix} = X_3$$

$$P^4 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,51 \\ 0,25 & 0,49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68,7 \\ 31,3 \end{pmatrix} = X_4$$

$$P^5 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,55 \\ 0,28 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68,1 \\ 31,9 \end{pmatrix} = X_5$$

$$P^{10} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,65 \\ 0,32 & 0,35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,9 \\ 33,1 \end{pmatrix} = X_{10}$$

Se observa el ***carácter estacionario*** de la situación. Calculamos, por ejemplo, dentro de 20 años.

$$P^{20} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,66 \\ 0,33 & 0,33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,67 \\ 33,33 \end{pmatrix} = X_{20}$$

Se debe observar que ***el carácter estacionario reside en la matriz***, y no en las cifras iniciales de empleo, X_0.

Se observa, además que ***las dos columnas de la matriz tienden a igualarse***, o sea: ***el resultado final, al cabo de cierto número de pasos, no depende de la situación inicial.***

Se encontraría al cabo de 10 y 20 años:

$$X_{10} = \begin{pmatrix} 66,8 \\ 33,2 \end{pmatrix} \; y \; X_{20} = \begin{pmatrix} 66,67 \\ 33,33 \end{pmatrix}$$

El acercamiento progresivo al valor de estabilización se realiza con mayor o menor rapidez según el estado de partida.

¿Y si cambiamos los valores de la matriz?

c) En este caso los resultados son:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \; P^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,45 \\ 0,3 & 0,55 \end{pmatrix}, \ldots, \; P^{10} = \begin{pmatrix} 0,600 & 0,599 \\ 0,399 & 0,400 \end{pmatrix}$$

d) Resolvemos el sistema matricial $P \cdot X_{est} = X_{est}$.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,9x + 0,2y = x \\ 0,1x + 0,8y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0,1x + 0,2y = 0 \\ 0,1x - 0,2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{-0,1x + 0,2y = 0$$

La ecuación anterior junto con x + y = 100, nos da la solución: x = 66,67 e y = 33,33.

e) En este caso las matrices son: $P = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix}$ y $X_0 = \begin{pmatrix} 88 \\ 12 \end{pmatrix}$.

La evolución de la situación puede expresarse en la forma:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 15 \end{pmatrix} = X_1$$

Observamos que se produce un descenso del empleo.

Pueden calcularse los valores del empleo en los años sucesivos, aunque vemos si esta situación presenta un carácter estacionario.

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}95x + 0{,}10y = x \\ 0{,}05x + 0{,}90y = y \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}05x + 0{,}10y = 0 \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 66{,}67 \\ y = 33{,}33 \end{cases}$$

Obtenemos el mismo resultado que en la situación anterior.

Sea la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$, veamos la relación entre a y b para que el paro no alcance el 25%.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = x \\ (1-a)x + (1-b)y = y \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)x + by = 0 \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1-a}{b}x \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{100b}{b+1-a} \\ y = \dfrac{100(1-a)}{b+1-a} \end{cases}$$

Para que el paro no alcance el 25% se cumplirá: $\dfrac{100(1-a)}{b+1-a} < 25$.

Operando en la desigualdad se obtiene: b > 3 – 3a.

UNIDAD 2: Determinantes

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 38

1. Calcula las matrices inversas de las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Empleando el método de Gauss-Jordan, obtenemos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong$

$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicando las operaciones elementales por filas, obtenemos:

a) $Rango\ de\ A = Rango\ de \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 12 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2.$

b) $Rango\ de\ B = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$

$$= Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 3.$$

3. Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales por filas, obtenemos:

$$Rango\ de\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & -a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si a = 0, el rango de A es 2.

Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 53

1. Parejas. Tres amigos, Juan, José y Jesús van de compras con sus parejas María, Merche y Marina, aunque no necesariamente en ese orden. Cada uno de los seis compra uno o varios objetos y paga por cada objeto tantos euros como objetos compra. José compre 23 objetos más que María y Juan 11 más que Merche. Cada hombre gastó 63 euros más que su pareja. ¿Cuál es la pareja de cada uno?

Hacemos una tabla con la información del problema:

	Juan	José	Jesús	María	Merche	Marina
Objetos compra	11 + y	23 + x		x	y	z
Euros paga	$(11 + y)^2$	$(23 + x)^2$		x^2	y^2	z^2

Una solución puede ser:

Juan con María: $x^2 = (11 + y)^2 - 63$

José con Marina: $z^2 = (23 + x)^2 - 63$

Entonces: x = 9; y = 1; z = 31.

Juan compra 12 y su esposa María 9.

José compra 32 y su esposa Marina 31.

Jesús compre 8 y su esposa Merche 1.

2. Pirámides de bolas. Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides, puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de las que tendrá que disponer el mago inicialmente?

Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20 35, 56, 84…

que forman una progresión aritmética de tercer orden, de término general $T_n = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$.

● Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.

● Si las dos pirámides iniciales no son iguales, el mínimo número es 680 bolas, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14, y de bolas 120 y 560.

La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, ya que se cumple:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} = 680 \quad \Rightarrow \quad n = 15.$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 55

1. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) A + 3 · B **b) A · B** **c) B^3** **d) A^{-1}**

En la calculadora definimos las matrices A y B. Para ello activamos el menú *Matrices* y en la opción **EDIT** introducimos las dimensiones de la matriz, que en nuestro caso serían 3 x 3, tecleando: **3 NTER 3 ENTER**.

Introducimos los elementos de la matriz de forma ordenada. Para la matriz A del enunciado, la secuencia de teclas sería: **1 ENTER 2 ENTER -1 ENTER 3 ENTER 8 ENTER 2 ENTER 4 ENTER 9 ENTER -1 ENTER.**

Para introducir la matriz B tecleamos -**1 ENTER 0 ENTER 3 ENTER 0 ENTER -2 ENTER 1 ENTER 3 ENTER 2 ENTER 0 ENTER.**

Realizamos las operaciones indicadas tecleando éstas en la pantalla principal con ayuda del menú *Matrices*, donde están las matrices A y B. Obtenemos los resultados que pueden verse en los gráficos.

a)

[A] + 3 * [B]

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \\ 13 & 15 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

[A] * [B]

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 3 & -12 & 17 \\ -7 & -20 & 21 \end{bmatrix}$$

c)

[B]^3

$$\begin{bmatrix} -19 & -18 & 36 \\ -9 & -16 & 15 \\ 36 & 30 & -13 \end{bmatrix}$$

d)

[A]^-1

$$\begin{bmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Resuelve la ecuación matricial A · X + B = C, siendo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Utilizando las propiedades de las operaciones con matrices obtenemos:

$$A \cdot X + B = C \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot X = C - B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

Introduciendo en la calculadora las matrices A, B y C y realizando las operaciones indicadas, obtenemos la matriz que aparece en el gráfico.

[A]^-1 * ([C] – [B])

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Resuelve los sistemas que siguen, diagonalizando las matrices ampliadas:

a) $\begin{cases} 3x + 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 4 \\ 8x + 8y - 7z = 8 \end{cases}$

Las matrices ampliadas de los sistemas son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 8 & 8 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Introducimos en la calculadora las matrices anteriores.

La función **rref (**, que podemos encontrar en el menú *Matrices* y en la opción **MATH**, nos devuelve la forma diagonal de una matriz dada.

Para los sistemas del enunciado a), b) y c), obtenemos las matrices [A], [B] y [C] que aparecen en los gráficos.

a)

escre ([A]) ► Frac

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene por solución x = 1/5, y = 1/5, z = - 1/5 y es compatible determinado.

b)

escre ([B])

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema del apartado tiene por soluciones x = 1 – z; y = 0 y es compatible indeterminado.

c)

escre ([C]) ► Frac

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema carece de soluciones y es incompatible.

En la resolución de los sistemas de los apartados a) y c) hemos activado la opción ► Frac que se encuentra en el menú *Matemáticas* (tecla MATH), para obtener los elementos de las matrices expresados en forma de fracción.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 58

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = -1$ e) $\begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 + n^2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = 0$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 - 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -1$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1$

Desarrollamos los determinantes, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.

Las soluciones son x = - 5, x = - 3, x = 3 y x = 5.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0.$

Las soluciones son x = - 1, x = 0 y x = 1.

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow 3 - x = -1.$

La solución es x = 4.

4. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Las razones en cada caso son:

a) Las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = 3 \cdot F_1$.

b) Las columnas primera y tercera coinciden: $C_1 = C_3$.

c) La columna tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$.

d) La fila tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $F_3 = 3 \cdot F_1 + F_2$.

5. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

a) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 2 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \dot{2}$$

b) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 3 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{3}$$

c) Realizamos la siguiente operación con las columnas ($C_3 + C_2 - 2 \cdot C_1 \rightarrow C_3$), sacamos factor común 7 de la tercera columna y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{7}$$

d) Puede observarse que los números que forman cada una de las filas, 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados a la tercera columna, quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} \; 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix} = \dot{11}$$

6. Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicamos y dividimos la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión $\frac{1}{abc}$ fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante es nulo al tener dos columnas iguales.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & 1 \\ abc & b^2 & 1 \\ abc & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sean F_1, F_2 y F_3 las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3 tal que su determinante es det (F_1, F_2, F_3) = 5. Calcula:

a) det (2A) **b) det (A^3)** **c) det ($3F_1 - F_3$, $2F_3$, F_2)**

a) Teniendo en cuenta la propiedad:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

y que el orden es 3:

$$\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 5 = 40.$$

b) Teniendo en cuenta la propiedad:
El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

Obtenemos:

$$\det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

c) Teniendo en cuenta las propiedades:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Si en una matriz cuadrada se permutan dos líneas, su determinante cambia de signo.

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = 2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3)$$

Haciendo uso de la propiedad:
Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se les suma una combinación lineal de otras líneas, su determinante no varía.

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3) = -2 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -6 \cdot \det(F_1, F_2, F_3) = -30$$

8. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla det (A).

a) Utilizando la propiedad $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene: $\det(A^2) = [\det(A)]^2$. Por tanto:

$$\left[\det(A)\right]^2 - \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) \cdot \left[\det(A) - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = 0 \\ \quad o \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

b) Teniendo en cuenta las propiedades $\det(A) = \det(A^t)$ y $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene:

$$\det\left(A \cdot A^t\right) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad \det(A)^2 = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = -1 \\ \quad 0 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

9. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2 y F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son F_3, $F_1 - 2F_2$, $-F_1$?

La solución queda:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - 2F_2 \\ -F_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\,|A| = -8.$$

10. Comprueba que el determinante que sigue es divisible por 5, sin calcularlo, a partir de las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Sustituimos los elementos de la fila tercera por la suma de los elementos de las filas tercera y segunda, y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Observamos que el determinante es divisible por 5.

Existen otras formas de combinar líneas de este determinante para obtener número múltiplos de 5, por ejemplo, la suma de los elementos de la columna tercera con el doble de los elementos de la columna segunda.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 59

11. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{12}, α_{22}, α_{23} y α_{31}, si existen.

b) Calcula, si existen, los adjuntos A_{12}, A_{22}, A_{23} y A_{31}, si existen.

c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

Las respuestas son:

a) Los menores complementarios pedidos son:
En la matriz A: $\alpha_{12} = 0$; $\alpha_{22} = 2$; α_{23} y α_{31} no existen.

En la matriz B: $\alpha_{12} = 4$; $\alpha_{22} = -12$; $\alpha_{23} = -8$ y $\alpha_{31} = -16$.

En la matriz C: $\alpha_{12} = -6$; $\alpha_{22} = -3$; $\alpha_{23} = 6$ y $\alpha_{31} = 1$.

b) Los adjuntos pedidos son:
En la matriz A: $A_{12} = 0$; $A_{22} = 2$; A_{23} y A_{31} no existen.

En la matriz B: $B_{12} = -4$; $B_{22} = -12$; $B_{23} = 8$ y $B_{31} = -16$.

En la matriz C: $C_{12} = 6$; $C_{22} = -3$; $C_{23} = -6$ y $C_{31} = 1$.

c) Las matrices adjuntas son:

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -20 \\ 6 & -12 & 8 \\ -16 & -2 & -10 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Halla las matrices adjuntas de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&-3&2\\3&5&-1\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$

Las matrices adjuntas son:

a) $Adj\,(A)=\begin{pmatrix}3&-4\\-1&2\end{pmatrix}$ b) $Adj\,(B)=\begin{pmatrix}-7&8&19\\20&-13&-5\\12&6&-3\end{pmatrix}$ c) $Adj\,(C)=\begin{pmatrix}5&-1&-7\\-1&-7&5\\-7&5&-1\end{pmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1-a&a\\-a&1+a\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

Las matrices inversas de las matrices del enunciado son:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1+a&-a\\a&1-a\end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$ c) $C^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$

■ 14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&a&3\\4&1&-a\end{pmatrix}$, averigua los valores del parámetro a para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando a = 2.

El determinante de la matriz A es det (A) = - a^2 + 4a – 3 = - (a – 1) (a – 3).

La matriz no tiene inversa para a = 1 o a = 3.

La matriz para a = 2 es $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\4&1&-2\end{pmatrix}$ y su inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&-1&2\\12&2&-3\\-8&-1&2\end{pmatrix}$.

15. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}a&1&-1&-1\\1&-a&1&2\\1&1&a&1\end{pmatrix}$.

Se obtiene que:

- Si a = 0, el rango de A es 2.

- Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

16. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de a.

La matriz B² es $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz M = A² - Aᵗ es $M = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de M es det (M) = (a – 2) (2a – 1) y los valores del rango son:

- Si a ≠ 2 y a ≠ 1/2, el rango de M es 3.

- Si a = 2, el rango de B es 2.

- Si a = 1/2, el rango de B es 2.

17. Determina para qué valores de a el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **es 3.**

El determinante de la matriz A es a – 3, y se anula para a = 3. Por tanto, para cualquier valor de a distinto de 3 el rango de la matriz A es 3.

18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

a) Codifica el mensaje MANDA_DINERO, utilizando como matriz de cifrado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$**.**

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2 x 2, es:

16 14 33 6 22 14

¿Podrías hallar A?

a) El mensaje anterior, según el código numérico se transforma en:

2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia 2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7 y se multiplica, tomando números de dos en dos, por la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\76\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}2\\20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42\\117\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}14\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70\\182\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}14\\14\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\57\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}21\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24\\23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70\\187\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}14\\19\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}27\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41\\116\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}$$

Hay que tener en cuenta que si los números que resultan de multiplicar por la matriz de cifrado son mayores de 28, como por ejemplo en el primer caso que son 30 y 76, hay que restar 28 las veces que sean necesarias hasta obtener un número menor que 28. En nuestro caso:

$$30 - 28 = 2 \quad \text{y} \quad 76 - 28 - 28 = 20$$

El mensaje codificado será: 2 20 14 5 14 14 21 1 14 19 13 4, que se convierte en:

MUABAAPAFAXKY.

b) Teniendo en cuenta el código numérico inicial, la palabra Marisa se corresponde con la clave numérica:

M	A	R	I	S	A
2	14	27	6	8	14

Sea $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ la matriz 2x2 buscada. Se cumplirá:

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\14\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+14b=16\\2c+14d=14\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}27\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}27a+6b=33\\27c+6d=6\end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se obtiene: a = 1, b = 1, c = 0 y d = 1.

La matriz es $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 60

1. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\ \textbf{y}\ B=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\3/4 & 0\end{pmatrix},$$

resuelve la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

La resolución de la ecuación es:

$$A^3 \cdot X - 4\,B = O \;\Rightarrow\; A^3 \cdot X = 4B \;\Rightarrow\; X = \left(A^3\right)^{-1} \cdot 4B$$

Las matrices a calcular son:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \left(A^3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ y\ 4B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de k para los cuales A no es invertible.
b) Para k = 0, calcula la matriz A^{-1}.

c) Para k = 0, resuelve la ecuación matricial A · X = B.

a) El determinante de la matriz A es det (A) = $k^2 - 4k + 3 = (k - 1)(k - 3)$. Para K = 1 y k = 3 la matriz A no es invertible.

b) Para k = 0 la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

c) La solución de la ecuación matricial es $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3 que verifica B2 = 16 I, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2 x 2 para la cual se cumple que A- 1 = At, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

Las respuestas a los distintos apartados son:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\det(F_1, F_2, \ldots, k \cdot F_i, \ldots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

A partir de $B^2 = 16\,I$ podemos escribir $\det(B^2) = \det(16\,I)$. Calculamos ambos determinantes:

$$\det(B^2) = \det(B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^2$$

$$\det(16\,I) = \det\left(16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16^3$$

Por tanto, $(\det(B))^2 = 16^3 \Rightarrow \det(B) = \sqrt{16^3} \Rightarrow \det(B) = 64.$

b) No puede ser $\det(A) = 3$ ya que se cumple:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A^t) \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$**.**

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible?

b) Estudia el rango según los valores de a.

c) Halla a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$**.**

a) Una matriz A es inversible si su determinante es distinto de cero. Hallamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 \quad \Rightarrow -2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Por tanto, A es inversible si $a \neq 0$.

b) Estudio del rango:

- Si $a \neq 0$ el rango de la matriz A es 3, ya que el determinante de A es distinto de 0.

- Si $a = 0$ el rango de A es 1, ya que tiene dos columnas con todos sus elementos nulos.

c) Calculamos la matriz $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj\,(A)]^t$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-2a & 0 & 0\\ 2a & a^2 & -a\\ 0 & 0 & -2a\end{pmatrix}\qquad [Adj\,(A)]^t=\begin{pmatrix}-2a & 2a & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & -a & -2a\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

Expresamos la igualdad matricial $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot A$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{a}{4}\\ -\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2a}=\frac{1}{4}\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a^2=4;\ a=-2\ y\ a=2\\ a=2\\ a=2\end{cases}\qquad\Rightarrow a=2$$

El valor de A buscado es a = 2. Para este valor se cumple:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad y\quad \frac{1}{4}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X para que se cumpla la ecuación matricial A · X – 2 · I = O, siendo I y O las matrices unidad y nula, respectivamente.

Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX-2I==O\ \Rightarrow\ AX=2I\ \Rightarrow\ X=A^{-1}\cdot 2I\ \Rightarrow\ X=2A^{-1}$$

Como $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ se tiene: $X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

6. a) Determina para qué valores de a la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 5-a & -2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

b) Considerando la matriz A del apartado anterior con a = - 1, resuelve la ecuación matricial XA + B = CA, donde:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa si su determinante es cero:

$$\det(A) = 11a - a^2 = a \cdot (11 - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 11 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa para a = 0 y a = 11.

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$XA + B = CA \Rightarrow XA = CA - B \Rightarrow X = (CA - B) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = C - B \cdot A^{-1}$$

Hallamos las matrices A^{-1} y BA^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \qquad B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{6} \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Determina la matriz X solución de la ecuación matricial A · X – I = A, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos en la ecuación matricial para despejar X:

$$AX - I = A \Rightarrow AX = A + I \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + I) \Rightarrow X = I + A^{-1}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ y finalmente:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 61

Matemáticas y criptografía

La criptografía o arte de escribir en clave, aparece y se desarrolla con la invención de la escritura. Las civilizaciones más antiguas ya hicieron uso de ella, aunque fueron los griegos y romanos los que la desarrollaron para comunicarse en secreto con fines belicistas.

A lo largo de los siglos, y en numerosas ocasiones, tanto los criptógrafos como sus oponentes, los descodificadores, han utilizado las matemáticas en sus respectivos trabajos. Entre las herramientas utilizadas podemos encontrar: el análisis por frecuencias, la aritmética modular, los números primos, etc.

Intenta descifrar los mensajes que siguen.

ÑDV · ODWHODWLFDV · VLUYHP · SDUD · WRGR · HP · ÑD · YLGD · BD · TXH · WH · HPVHQDP · D · UDCRPDU · D · UHVRÑYHU · SUREÑODV · SHUR · VREUH · WRGR · OH · KDP · GDGR · GLVFLSÑLPD · SDUD · OL · OLVOD · XPD · GLVFLSÑLPD · YXH · PR · HV · SDUD · PDGD · RSUHVLYD · VLPR · YXH · OH · IDFLÑLWD · VHU · ÑLEUH

EDUEDED · KHPGULFNV

α↑ · ↑7↓5β · ≠α · 4◊3α4◊371◊Δ · ↑β · >α · ≠α□◊≠β · α8 · 47 · 3◊2+7↑↑◊ · 3◊4↓7α8 · 9+α≠αΔ · α81β835◊5 · ↑◊Δ · ◊137■7≠◊≠αΔ · 5αΔ+α↑3◊Δ · ≠α · ↑◊ · +87≠◊≠ · Δ7α3α · ↑◊ · ↑↑◊■α · ≠α · ↑◊ · 3◊2+7↑↑◊ · ↑◊ · 37α8α · α↑ · 1β8Δα5□α · ≠α↑ · 1β↑α<7β · αΔ9α5β · 2+α · 3α · Δ75■◊8 · 9◊5◊ · 95α9◊5◊5 · α↑ · α●◊4α8

◊8◊

Para ayudarte, podemos decirte que uno de los mensajes está codificado con el *cifrado César*, y puedes descifrarlos mediante el análisis por frecuencias.

Investiga sobre criptografía.

El primer mensaje está puesto en clave con el ***cifrado César*** siguiente:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Letra cifrada	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O

Letra	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Letra cifrada	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z	A	B	C

y dice:

LAS MATEMÁTICAS SIRVEN PARA TODO EN LA VIDA, YA QUE TE ENSEÑAN A RAZONAR, A RESOLVER PROBLEMAS. PERO SOBRE TODO ME HAN DADO DISCIPLINA PARA MI MISMA. UNA DISCIPLINA QUE NO ES PARA NADA OPRESIVA QUE ME FACILITA SER LIBRE.

BARBARA HENDRICKS

El segundo mensaje dice:

EL LIBRO DE MATEMÁTICAS LO HE DEJADO EN MI TAQUILLA. TAMBIÉN PUEDES ENCONTRAR LAS ACTIVIDADES RESUELTAS DE LA UNIDAD SIETE. LA LLAVE DE LA TAQUILLA LA TIENE EL CONSERJE DEL COLEGIO. ESPERO QUE TE SIRVAN PARA PREPARAR EL EXAMEN.

ANA

El cifrado puede verse en las tablas:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Símbolo	◊	↓	1	≠	α		<	>	7	□		↑	4

Letra	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Símbolo	8		β	9	2	5	Δ	3	+	■	●		

La descodificación de los mensajes puede hacerse mediante el análisis de frecuencias.

El análisis por frecuencias, para descifrar un criptograma, se basa en estudiar la frecuencia con la que aparecen los distintos símbolos en un lenguaje determinado y luego estudiar la frecuencia con la que aparecen en los criptogramas, y de esta manera establecer una relación entre ellos.

La idea fundamental es que no todas las letras aparecen con la misma frecuencia, sino que algunas aparecen más a menudo que otras. Contando los signos del texto cifrado y ordenándolos de mayor a menor frecuencia podemos establecer conjeturas acerca de qué letra corresponde a cada signo. El análisis se completa con la búsqueda de palabras frecuentes como artículos y preposiciones. El resto es cuestión de intuición.

En nuestro idioma las letras E (≈ 17%) y A (≈ 12%) destacan sobre todas las demás y pueden identificarse con facilidad, aunque en un texto corto la frecuencia de ambas se puede invertir. Todas las vocales ocupan un 47% del texto.

Las consonantes más frecuentes son L, S, N y D (≈ 30%) y las seis letras menos frecuentes son V, Ñ, J, Z y K (con poco más del 1%).

UNIDAD 3: Sistemas de ecuaciones lineales

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 62

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$

Utilizando el método de Gauss, obtenemos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ \quad 5y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ \quad 17y + 23z = 11 \\ \quad y - 8z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ \quad 17y + 23z = 11 \\ \quad 159z = -159 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{142}{57} \\ y = \dfrac{98}{57} \\ z = \dfrac{23}{57} \end{cases}$

2. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z el número de participaciones de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de participaciones, en la segunda el importe total y en la tercera la relación entre participaciones de 1 euro y de 5 euros.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ -y - 4z = -340 \\ y + 3z = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ y + 4z = 340 \\ -z = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

Se han vendido 160 participaciones de 1 euros, 20 participaciones de 2 euros y 80 participaciones de 5 euros.

Puede comprobarse, con facilidad, que la solución obtenida es la correcta:

$$\begin{cases} 160 + 20 + 80 = 260 \\ 160 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600 \\ 160 \qquad - 2 \cdot 80 = 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 79

1. Pesada difícil. Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana, encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos entre 50 y 100 kg. Estos amigos, individualmente, pesan menos de 50 kilos y tres juntos, más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿se puede determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individualmente, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?

La solución queda:

$$\begin{cases} Arturo + Berta = 69 \\ Berta + Carlos = 79 \\ Carlos + Diana = 74 \\ Diana + Arturo = 64 \end{cases}$$

Restando la primera igualdad a la segunda obtenemos: Arturo – Carlos = - 10. Sumando a ésta la tercera obtenemos: Arturo + Diana = 64.

Esta igualdad es la misma que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.

El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por la expresión: Arturo + Carlos = 74 kg; con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 kg; Berta pesa 37 kg; Carlos pesa 42 kg y Diana pesa 32 kg.

2. Curiosa elección. En una clase hacen la elección de delegados de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como las que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene tres cintas rojas y dos amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros, pero no la suya propia. Será elegido quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo; lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta ser elegida delegada. ¿Cómo lo supo?

Número de situación	Ana	Luis	Clara
(1)	R	R	R

(2)	R	R	A
(3)	R	A	R
(4)	A	R	R
(5)	R	A	A
(6)	A	R	A
(7)	A	A	R

En la tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear.

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

El caso (2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla Ana hubiera sabido el color de la suya.

El caso (5) no es posible, pues en esta situación Ana hubiera dicho que su cinta era roja.

El caso (6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto, en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. Suma de cubos. ¿Cuánto suman los cubos de los n primeros números naturales?

Queda así:

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$
…

La sucesión 1, 3, 6, 10, 15… es una progresión aritmética de segundo orden, su término general es $\frac{n^2+n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Vamos a probar la relación anterior por inducción.

Observamos que es cierta la relación para n = 1:

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1^2+1}{2}\right)^2$$

Suponemos que es cierto para n = k, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2$$

y veamos si es cierto para n = k + 1:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3\right) + (k+1)^3 = \left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

Operando en la última expresión, obtenemos:

$$\left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2+4\,(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\,[k^2+4\,(k+1)]}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right]^2$$

Por tanto, se cumple: $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right)^2$

Esto último completa la demostración.

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}=680\quad\Rightarrow\quad n=15.$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 81

1. Discute, según los valores de a, y resolver cuando tenga más de una solución el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ 2x+y+az=4 \\ ax+ay=a-z \end{cases}$$

En la siguiente imagen podemos ver la solución de esta actividad.

Al igualar a cero el determinante de la matriz de los coeficientes A obtenemos los valores de a = - 1 y a = 1.

En la imagen vemos que para a = -1 los rangos son distintos por lo que el sistema es incompatible. Para a = 1 los rangos son iguales a 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores del parámetro a los rangos son iguales a 3 por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolvemos el sistema para a = 1 que es compatible indeterminado y para el caso compatible determinado y obtenemos las soluciones que vemos en la imagen.

Introducimos la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada B :

$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

$B := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ a & a & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ a & a & 1 & a \end{pmatrix}$

Anulamos el determinante de la matriz A :

$\text{resolver}(|A|=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=1\}\}$

Fijamos el valor del parámetro y hallamos los rangos de las matrices A y B :

$a := -1 \rightarrow -1$

$\text{rango}(A) \rightarrow 2$

$\text{rango}(B) \rightarrow 3$

$a := 1 \rightarrow 1$

$\text{rango}(A) \rightarrow 2$

$\text{rango}(B) \rightarrow 2$

Resolvemos el sistema para a = 1 :

$\text{resolver}\begin{bmatrix} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=3, y=-z-2, z=z\}\}$

Resolvemos el sistema para a ≠ −1 :

$a := a \rightarrow a$

$\text{resolver}\begin{bmatrix} x+a\cdot y+z=1 \\ 2x+y+a\cdot z=4 \\ a\cdot x+a\cdot y+z=a \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\{a=1, x=3, y=-z-2, z=z\}, \left\{a=a, x=1, y=\frac{-2}{a^2-1}, z=\frac{2\cdot a}{a^2-1}\right\}\right\}$

2. Discute según los valores de b y resolver, en los casos en que sea posible, el sistema:

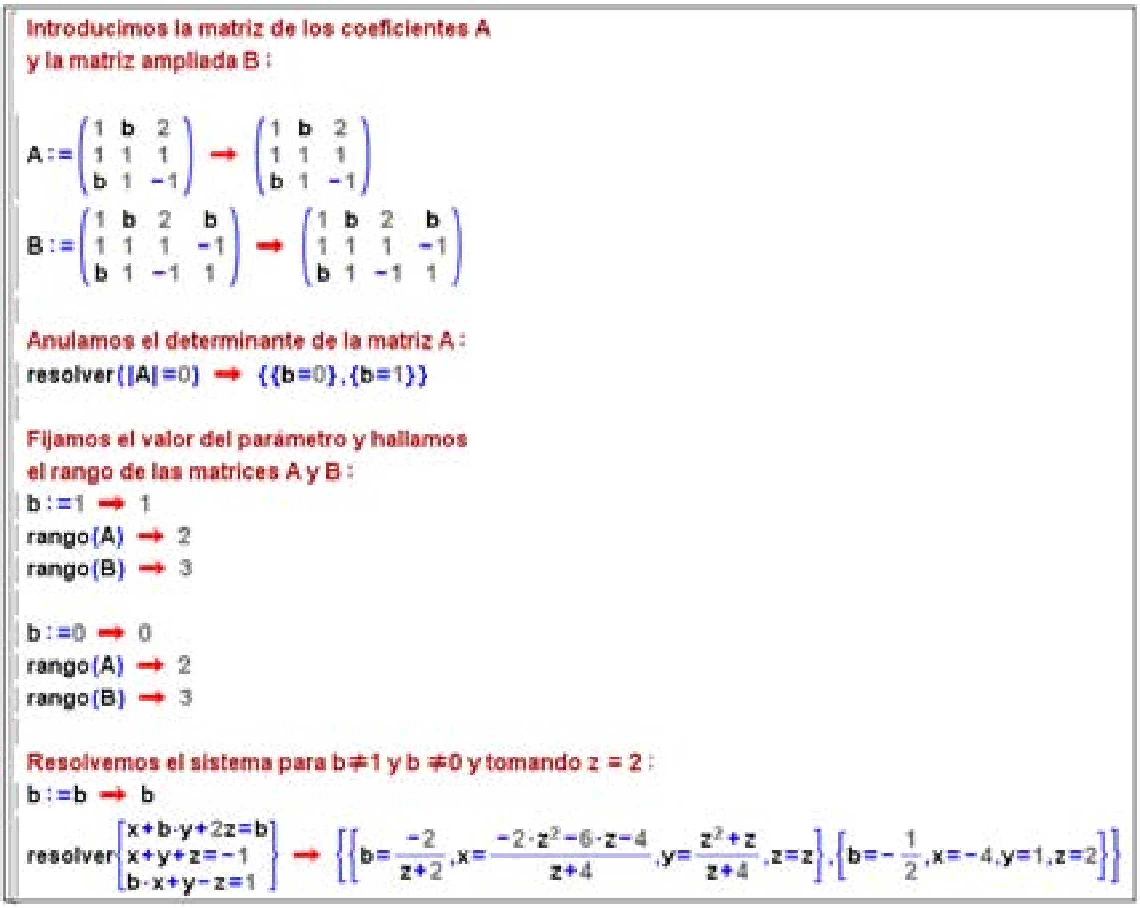
$$\begin{bmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la solución para la cual z = 2.

En la siguiente imagen podemos ver la resolución de esta actividad.

Como vemos el sistema es incompatible para los valores que anulan el determinante de la matriz principal A.

Resolvemos para el resto de valores y obtenemos la solución para z = 2.



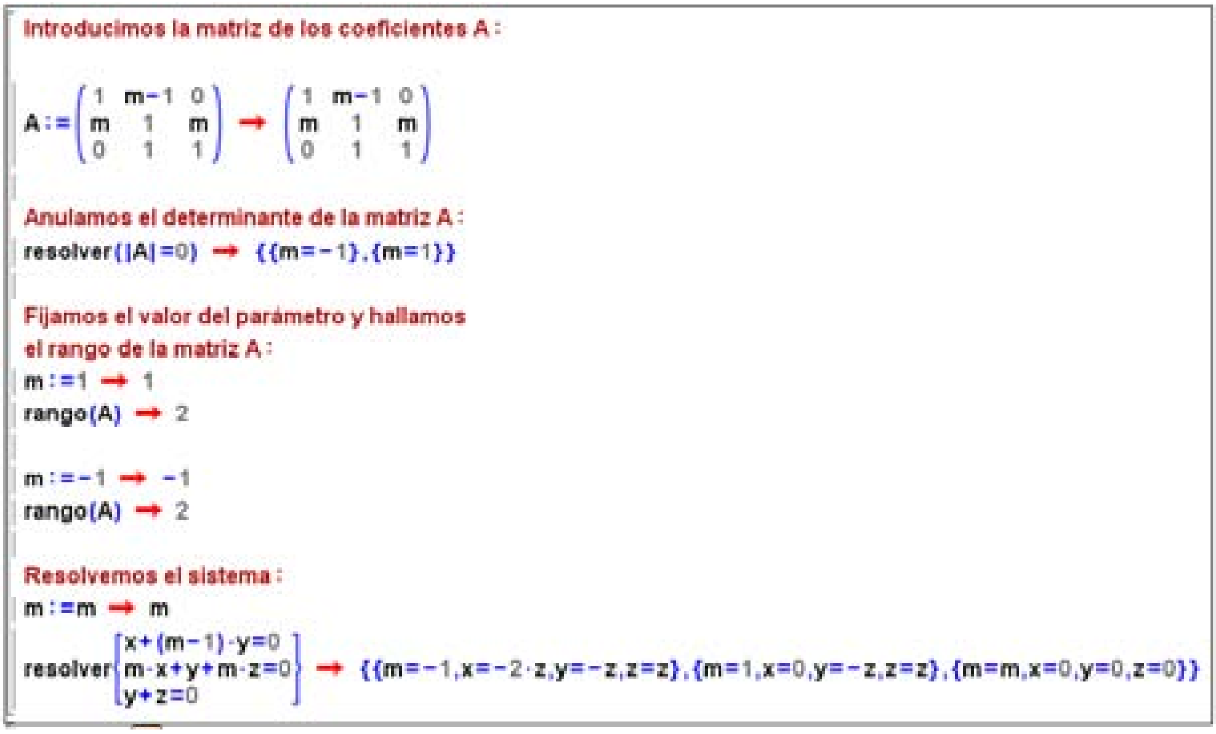
3. Discute, según los valores de m, y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+(m-1)y=0 \\ y+m\ z+mx=0 \\ y=-z \end{cases}$$

En la siguiente imagen podemos ver las soluciones de esta actividad.

Resolvemos la ecuación que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz principal A y obtenemos los valores de m = 1 y m = -1. Para estos valores de m el rango de A es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores de m el rango de A es igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolvemos el sistema para m = -1 y para m = 1 y para el resto de valores de m obtenemos las soluciones que vemos en la imagen.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 84

1. Expresa los sistemas siguientes de todas las formas posibles, poniendo de manifiesto, en cada caso, las matrices de los coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

En cada uno de los apartados queda:

a) Expresión matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \; y \; A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

b) Expresión estándar: $\begin{cases}x-2y=2\\ 2x+y=-1\\ x+3y=3\end{cases}$

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \; y \; A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

c) Expresión estándar: $\begin{cases}x+3y-z=-4\\ 2x-y+2z=3\\ x \qquad -z=1\end{cases}$.

Expresión matricial: $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \; y \; A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Estudia la existencia de soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}3x-2y=5\\ 2x+y=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x-2y=2\\ 2x+y=9\\ x+3y=7\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}x+3y-z=-4\\ 2x-y+2z=3\\ 7x+7y+z=-6\end{cases}$

Estudiamos cada caso y obtenemos:

a) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \; y \; A^{*}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2, por tanto, el sistema es compatible determinado. Tiene una única solución que es x = 1 e y = -1.

b) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \; y \; A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 9\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2 y como el número de incógnitas coincide con el valor del rango, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución. Puede comprobarse que ñla solución es x = 4, y = 1.

c) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 7 & 7 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 7 & 7 & 1 & -6\end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2 y como el número de incógnitas es mayor que el valor del rango, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Puede comprobarse que las soluciones pueden expresarse en la forma: x = 5/7 – 5t; y = - 11/7 + 4t; z = 7t, siendo t un número real cualquiera.

3. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} ax-(3a-2)y=1\\ x \quad -ay=a\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}2x+y=2a\\ x-ay=-3\\ x+y=3\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}ax-y-z=-a\\ x-ay+az=a\\ x+y+z=-1\end{cases}$

Estudiamos cada caso y obtenemos:

a) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}a & -3a+2\\ 1 & -a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a & -3a+2 & 1\\ 1 & -a & a\end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A vale – a^2 + 3a – 2 = - (a – 1)(a – 2). Esta expresión nos permite realizar el estudio que sigue:

- Si a ≠ 1 y a ≠ 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 1 el rango de la matriz A es 1 y el de la matriz A* es 1, menor que el número de incógnitas, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Si a = 2 el rango de la matriz A es 1 y el de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

b) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -a\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2a\\ 1 & -a & -3\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A* vale 2a (a – 2). Esta expresión nos permite realizar el análisis que sigue:

- Si a ≠ 0 y a ≠ 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

- Si a = 0 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

c) Las matrices del sistema son: $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -a \\ 1 & -a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A vale - 2a (a + 1). Esta expresión nos permite realizar el análisis que sigue:

- Si a ≠ - 1 y a ≠ 0 el rango de la matriz A es 3 y el de la matriz A* es 3, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 0 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

- Si a = - 1 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

4. Consideramos el sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$.

a) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible indeterminado.

c) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible determinado.

4. Las respuestas son:

a) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el rango de la matriz ampliada 3. Añadimos, por ejemplo, una ecuación que sea suma de las otras dos, excepto para los términos independientes. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y \quad = 2 \end{cases}.$$

b) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el rango de la matriz ampliada 2. Añadimos, por ejemplo, una ecuación que sea suma de las otras dos. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y \quad = 1 \end{cases}.$$

c) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 3 y el rango de la matriz ampliada 3. Añadimos una ecuación que no sea combinación lineal de las otras dos. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y - z = 10 \end{cases}.$$

5. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \\ -12x + 4y = 4 \end{cases}$

Las soluciones son:

a) El rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 2, el sistema es compatible determinado, con solución única: x = 1, y = 3.

Las ecuaciones representan sendas rectas que se cortan en el punto P (1, 3).

b) El rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, el sistema es incompatible, sin solución.

Las ecuaciones representan rectas que se cortan dos a dos.

c) El rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el rango de la matriz ampliada es 2, el sistema es incompatible, sin solución.

Las ecuaciones representan rectas paralelas.

6. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas en función de los valores del parámetro a:

a) $\begin{cases} 2x + (1-a)y = 0 \\ x + \quad 2y = -a \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = -4 \\ -3x + 6y = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y \qquad = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = 1 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1-a & 0 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz A, det (A) = a + 3, se anula para a = - 3

Estudio:
- Si a ≠ - 3, el rango de la matriz A es 2 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

Las ecuaciones representas rectas que se cortan.

- Si a = - 3, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

Las ecuaciones representas rectas paralelas.

- Si a = 2, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

Las ecuaciones representas rectas paralelas.

b) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 2 & -4 & -4 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 1. En la matriz A* hay menores que valen 4 – 2a o – 6 + 3a.

Estudio:

- Si a ≠ 2, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

  Hay dos rectas coincidentes y otra paralela a las anteriores.

- Si a = 2, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 1, el sistema es compatible indeterminado.

  Las tres rectas son coincidentes.

c) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es det (A) = a - 2.

Estudio:

- Si a ≠ 2, el rango de la matriz A es 3 y el rango de la matriz A* es 3, el sistema es compatible determinado.

  Las ecuaciones representan tres planos que se cortan en un punto.

- Si a = 2, el rango de la matriz A es 2 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

  Las ecuaciones representan tres plano que se cortan en una recta.

7. Resuelve los sistemas siguientes por el método de la matriz inversa:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$

a) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 7.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$$

b) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 1.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Comprueba que los siguientes sistemas son de Cramer y encuentra su solución:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases}$

a) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$.

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{13}{13} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{13} = -2$$

b) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10.$

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{-10} = -1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-10} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-10} = 0$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 85

9. Indica razonadamente si las parejas de sistemas que siguen son equivalentes:

a) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **y** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ **y** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

a) Los dos sistemas son compatibles determinados con solución única x = 3, y = 1. Por tanto, los sistemas son equivalentes al tener la misma solución.

b) Los dos sistemas son compatibles determinados con solución única x = 3, y = - 2, z = 1. Por tanto, los sistemas son equivalentes al tener la misma solución.

10. Averigua para qué valor del parámetro a los dos sistemas siguientes son equivalentes:

$$(I): \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad y \quad (II): \begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Ambos sistemas son compatibles determinados si a ≠ 4.

Las soluciones de los sistemas son:

Sistema (I): $x = -\frac{7}{a-4}$; $y = \frac{4a-2}{a-4}$.

Sistema (II): $x = -\dfrac{7}{a-4}$; $y = \dfrac{2a-1}{a-4}$.

Los sistemas son equivalentes si sus soluciones coinciden, por tanto:

$$\frac{4a-2}{a-4} = \frac{2a-1}{a-4} \Rightarrow 4a-2 = 2a-1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Para este valor del parámetro la solución de ambos sistemas es x = 2, y = 0.

11. Halla los valores de a, b y c para que los sistemas que siguen sean equivalentes:

$$\begin{cases} x + 3y = a \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \textbf{y} \quad \begin{cases} x - 4y = -1 \\ 2x - y = b \\ 3x + 2y = c \end{cases}$$

El sistema primero es compatible determinado para cualquier valor del parámetro a. Su solución, en función de a, es:

$$x = \frac{a+3}{7},\ y = \frac{2a-1}{7}.$$

Sustituimos estos valores en la primera ecuación del segundo sistema, y obtenemos a = 2.

Para a = 2 la solución de ambos sistemas es $x = \dfrac{5}{7},\ y = \dfrac{3}{7}$.

Introducimos estos valores en la segunda y tercera ecuación del segundo sistema y obtenemos: b = 1 y c = 3.

Por tanto los valores buscados son: a = 2, b = 1 y c = 3.

12. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los sistemas siguientes y encuentra sus soluciones en los casos que sean compatibles:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx \quad + 2z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax + y - z = z \\ -x + ay + z = x \\ -3x + 3y + z = y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y\ az = 0 \\ 3x + 2y + 4az = 0 \\ 2x + y = +\ 3z = 0 \end{cases}$

a) El sistema es homogéneo y la matriz del sistema es A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz anterior vale det (A) = - a^2 - a + 6 = - (a - 2) · (a + 3). Este determinante se anula para a = 2 y a = - 3. Estos valores nos permiten hacer el siguiente estudio:

● Si a ≠ - 3 y a ≠ 2, el rango de la matriz A es 3 y coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

En este caso su solución es la trivial, es decir x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = - 3, el rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

Considerando el menor anterior que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y + z = -x \\ 2z = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x \\ z = \dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

Haciendo x = 2t, siendo t cualquier número real, podemos expresar las soluciones en la forma:

x = 2t, y = - 5t, z = 3t, con t $\in$ R.

● Si a = 2, el rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

Considerando el menor anterior que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y + z = -x \\ 2z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

Haciendo x = t, siendo t cualquier número real, podemos expresar las soluciones en la forma:

x = t, y = 0, z = - t, con t $\in$ R.

b) Volvemos a escribir el sistema, que resulta ser homogéneo: $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Estudiamos el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Al ser $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 ≠ 0, el rango de A es 2 con independencia del parámetro.

El determinante de la matriz A es det (A) = a^2 - 8a + 7 =(a - 1)(a - 7). El determinante se anula para a = 1 y a = 7. Estos valores nos permiten hacer el siguiente estudio:

● Si a ≠ 1 y a ≠ 7, el rango de A es 3 que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. En este caso su solución es la trivial, es decir, x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = 1, el rango de A es 2 menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 1 el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ -2x+y=-z \end{cases}$$

Las soluciones son x = t, y = t, z = t, siendo t cualquier número real.

● Si a = 7, estamos en una situación análoga al caso anterior.

Para a = 7 el sistema es:

$$\begin{cases} 7x+y-2z=0 \\ -2x+7y+z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y-2z=0 \\ -2x+7y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=2z \\ -2x+7y=-z \end{cases}$$

Las soluciones son x = $\frac{5}{17}$t, y = -$\frac{1}{17}$t, z = t, siendo t cualquier número real.

c) El determinante de la matriz del sistema es det (A) = 3a- 3. Se anula para a = 1. Podemos realizar el siguiente estudio.

● Si a ≠ 1, el rango de A es 3, que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. En este caso su solución es la trivial, es decir, x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = 1, el rango de A es 2, menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 1 el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x+y+az=0 \\ 3x+2y+4az=0 \\ 2x+y\ \ +3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ 3x+2y=-4z \end{cases}$$

Las soluciones son x = - 2t, y = t, z = t, siendo t un número real cualquiera.

13. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hállalos.

Llamamos x, y, z a los números buscados. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x+y=z+1 \\ x+z=y+1 \\ y+z=x+1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad 2y-2z=0 \\ \quad 2y \qquad =2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Los tres números son x= 1, y = 1, z = 1.

14. El dueño de un supermercado ha comprado embutidos, bebidas y conservas, por un importe total de 4600 euros. El valor de las conservas es el mismo que el de las bebidas y embutidos juntos. Si vende todos estos productos, añadiendo un beneficio del 10% en el embutido, el 20% en las bebidas y el 15% en las conservas, obtendrá un importe total de 5305 euros. Calcula lo que pagó por cada uno de ellos.

Sean x, y, z el importe de los embutidos, las bebidas y las conservas, respectivamente. Con las condiciones del enunciado podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4600 \\ x + y - z = 0 \\ 1{,}1x + 1{,}2y + 1{,}15z = 5305 \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única, al cumplirse:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}15 \end{vmatrix} = 0{,}2 \neq 0$$

Resolvemos el sistema restando las dos primeras ecuaciones, para obtener 2z = 4600, es decir, z = 2300.

Sustituyendo z = 2300 en la primera y tercera ecuación, el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 2300 \\ 1{,}1x + 1{,}2y = 2660 \\ z = 2300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2300 \\ 0{,}1y = 130 \\ z = 2300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1000 \\ y = 1300 \\ z = 2300 \end{cases}$$

El dueño del supermercado pagó 1000 euros por los embutidos, 1300 euros por las bebidas y 2300 euros por las conservas.

15. Tres empresas A, B y C se suministran entre si los bienes que cada una necesita de las otras y a su vez satisfacen la demanda exterior.

La empresa A suministra a la empresa B un 11% del material que esta necesita para hacer una unidad de sus productos, a la empresa C un 3% y a sí misma un 28% y tiene una demanda exterior de 1300 unidades. La empresa B suministra a las empresas A y C, respectivamente un 11% y un 9% de sus necesidades, ella necesita un 39% de lo que fabrica y su demanda exterior de 5000 unidades. La empresa C necesita un 15% de su fabricación, suministra un 6% de lo que necesita A y un 8% de lo que necesita B, y su demanda exterior es de 4000 unidades.

Halla la matriz de salida, es decir, la cantidad que debe producir cada una de las empresas para satisfacer la demanda interior y exterior.

Sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matriz de salida.

Formamos el sistema: $\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}11 & 0{,}03 \\ 0{,}11 & 0{,}39 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} 0{,}28x + 0{,}11y + 0{,}03z + 1300 = x \\ 0{,}11x + 0{,}39y + 0{,}09z + 5000 = y \\ 0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}15z + 4000 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}72x - 0{,}11y - 0{,}03z = 1300 \\ -0{,}11x + 0{,}61y - 0{,}09z = 5000 \\ -0{,}06x - 0{,}08y + 0{,}85z = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\,532 \\ y = 9\,699 \\ z = 5\,868 \end{cases}$$

Otra forma de encontrar la matriz de salida, X, es resolviendo la ecuación matricial:

$$X = A \cdot X + E \quad \Rightarrow \quad I \cdot X - A \cdot X = E \quad \Rightarrow \quad (I - A) \cdot X = E \quad \Rightarrow \quad X = (I - A)^{-1} \cdot E$$

Hallando la matriz inversa de I – A y operando, obtenemos:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot E \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}44 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}28 & 1{,}71 & 0{,}19 \\ 0{,}13 & 0{,}18 & 1{,}20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 4000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3532 \\ 9699 \\ 5868 \end{pmatrix}$$

16. Tres individuos, un agricultor (A), un ganadero (G) y un pescador (P) forman una sociedad de consumos, cuyos productos se intercambian entre ellos sin relación con otras personas. La matriz de entrada y salida correspondiente a esta economía es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & G & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuál debe ser la relación de precios de sus respectivos productos?

Los precios $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de los productos de los tres individuos deben cumplir la relación X = A · X.

La ecuación matricial anterior da lugar al sistema:

$$\begin{cases} x = 0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}3z \\ y = 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}3z \\ z = 0{,}5x + 0{,}4y + 0{,}4z \end{cases}$$

Las soluciones del sistema homogéneo anterior son:

$$\begin{cases} 0{,}7x - 0{,}3y - 0{,}3z = 0 \\ -0{,}2x + 0{,}7y - 0{,}3z = 0 \\ -0{,}5x - 0{,}4y + 0{,}6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}70z \\ y = 0{,}63z \end{cases}$$

Las relaciones de precios serán: $\frac{x}{z} = 0{,}70 \quad \frac{y}{z} = 0{,}63 \quad \frac{y}{x} = 0{,}90$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 86

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ **donde x, y, z son desconocidos.**

a) Sabiendo que A · B + C = 3D, plantea un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

b) Estudia el sistema planteado en función del número de sus soluciones y calcula una de ellas, si es posible.

a) Realizamos las operaciones matriciales indicadas y obtenemos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 3D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos las matrices y obtenemos el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$

b) Las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes vale 2 ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz ampliada vale 2 ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones.

Para encontrar todas las soluciones resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones y en ellas llevamos la incógnita z al miembro de la derecha de la ecuación. Posteriormente calculamos los valores de x e y en función de la incógnita z.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x - y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 - z \\ x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2 \end{cases}$$

Haciendo z = t, con t $\in$ R, las soluciones del sistema son {x = 1 – t, y = 2, z = t}.

Como nos piden una solución hacemos, por ejemplo, t = 0 y obtenemos: x = 1, y = 2, z = 0.

2. a) Determina, según los valores del parámetro a, los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + 3y = -a \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

b) Resuelve los casos compatibles.

a) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -a \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz ampliada, A*, es det (A*) = - 30 – 10ª y se anula para a = - 3.

Estudio:

- Si a ≠ - 3 el rango de A es 2 y el rango de A* es 3, por tanto el sistema es incompatible y carece de solución.

- Si a = - 3, el rango de A es 2, el rango de A* es 2 y este valor coincide con el número de incógnitas, lo que hace que el sistema sea compatible determinado.

b) Resolvemos el sistema para a = - 3. Para este valor del parámetro el sistema queda reducido a la primera y tercera ecuación, ya que la segunda ecuación es una combinación lineal de las otras dos:

$$\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+3y=3 \\ 6x+4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ 6x+4y=2 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquiera de los procedimientos conocidos obtenemos la solución: $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{7}{5}$.

3. Un bar recibe un pedido diario de refrescos y batidos, por el que paga 6 euros, siendo el precio de cada refresco de 20 céntimos de euro y el de cada batido de m céntimos de euro. Si se intercambiasen los precios unitarios de refrescos y batidos, habría pagado 6 euros y 50 céntimos.

a) Plantea un sistema con dos ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de refrescos y el número de batidos adquiridos ese día. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) ¿Cuántos batidos habría comprado si cada batido costase 30 céntimos de euro?

Sea x el número de refrescos e y el número de batidos comprados ese día.

El sistema es:

$$\begin{cases} 20x+my=600 \\ mx+20y=650 \end{cases}$$

Las matrices del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 20 & m \\ m & 20 \end{pmatrix} \quad y \quad A^*=\begin{pmatrix} 20 & m & 600 \\ m & 20 & 650 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es det (A) = 400 – m^2 = (20 + m)(20 – m). Los valores que anulan el determinante son m = 20 y m = - 20, que carece de sentido.

Estudio:

- Si m ≠ 20, el rango de A es 2, el rango de A* es 2 y este valor coincide con el número de incógnitas, lo que hace que el sistema sea compatible determinado.

- Si m = 20, el rango de A es 1, el rango de A* es 2, el sistema es incompatible.

Por tanto, en caso de existir solución, esta es única.

b) El sistema es:

$$\begin{cases} 20x+30y=600 \\ 30x+20y=650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=60 \\ 3x+2y=65 \end{cases}$$

Resolviendo por reducción se obtiene: x = 15, y = 10.

Había comprado 10 batidos.

4. La condición de equilibrio para el precio, en unidades monetarias, de tres productos P_1, P_2 y P_3, relacionados entre sí, da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales: x + y + z = 6; x + y – z = 0; 2x – y + z = 3, siendo x, y, z los precios de los productos P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

Expresa el sistema en forma matricial AX = B. Calcula la matriz inversa de A y determina los precios de equilibrio para estos tres productos P_1, P_2 y P_3.

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos los precios de equilibrio:

$$X = A^{-1} \cdot X \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Los precios son:

- Precio de P_1, 1 unidad monetaria.
- Precio de P_2, 2 unidades monetarias.
- Precio de P_3, 3 unidades monetarias.

5. En un crucero hay paquetes de tres tipos: individual (1 pasajero), pareja (2 pasajeros) y grupo familiar (4 pasajeros). La tarifa individual es de 800 €, la tarifa de pareja es de 1200 € y la tarifa familiar es de 1600 euros. Para el próximo viaje hay 2400 pasajeros que han pagado un total de 1 264 000 €. Si los pasajeros de individual son el 20% de la suma de los de pareja y de grupo familiar, determina la distribución de los pasajeros de los tres tipos de tarifas.

Llamamos x, y, z al número de paquetes individuales, pareja y grupo familiar, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 2400 \\ 800x + 1200y + 1600z = 1264000 \\ x = 0{,}2 \cdot (2y + 4z) \end{cases} \Rightarrow \ \ldots$$

El sistema es compatible determinado al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los procedimientos conocidos se obtiene la solución:

x = 400, y = 360, z = 320.

La distribución de pasajeros es:

- 400 paquetes individuales dan 400 pasajeros.

- 360 paquetes pareja dan 360 · 2 = 720 pasajeros.

- 320 paquetes grupo familiar dan 320 · 4 = 1 280 pasajeros.

6. Un camión trae, en su carga, cajas de tres productos A, B y C. Se ha perdido la hoja de carga, pero uno de los operarios recuerda que en total hay 120 cajas, que las de tipo A eran tantas como las de tipo B y C juntas y que las de tipo C eran la cuarta parte de las del tipo B.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo trae el camión?

b) Otro operario dice que del tipo A eran 12 más que del tipo B. Comprueba si esta información se contradice con la del primer operario.

a) Sean x, y, z el número de cajas de tipo A, B y C, respectivamente.

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x = y + z \\ z = \dfrac{y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - y - z = 0 \\ \quad y - 4z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los procedimientos conocidos, obtenemos:

x = 60, y = 48 y z = 12

El camión trae 60 cajas del producto A, 48 cajas del producto B y 12 cajas del C.

b) Lo que dice el segundo operario da lugar a la ecuación: x = 12 + y.

Esta información no se contradice con la del primer operario, ya que la solución del sistema cumple también la nueva ecuación: 60 = 12 + 48.

7. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 €. Han recaudado en total, 600 € y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 €. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z las participaciones que han vendido de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \\ x + y + z = 260 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los procedimientos que se explican en esta unidad se obtiene como solución: x = 160, y = 20 y z = 80.

Por tanto, los estudiantes vendieron 160 participaciones de 1 €, 20 de 2 € y 80 de 5 €.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 87

Matrices mágicas y cuadrados mágicos

1. Se dice que una ***matriz*** M, de orden 3, es ***mágica*** si las ocho sumas:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij};\quad \sum_{j=1}^{3} a_{ij};\quad \sum_{i=1}^{3} a_{ii};\quad a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1};\quad \sum_{i=1}^{3} a_{i2};\sum_{i=1}^{3} a_{i3};\sum_{j=1}^{3} a_{1j};\sum_{j=1}^{3} a_{2j};\sum_{j=1}^{3} a_{3j};\sum_{i=1}^{3} a_{ii};\quad a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

son iguales.

Llamamos s al valor común de estas sumas y M (s) a una de las matrices correspondientes. Se pide:

a) Encuentra la expresión de todas las matrices mágicas de suma s, M (s).

b) Halla el valor de la suma s si la matriz M (s) es antisimétrica. Construye todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

c) Construye todas las matrices mágicas simétricas, de suma s, de orden 3.

2. Las matrices mágicas están emparentadas con los ***cuadrados mágicos***. Un cuadrado mágico consta de N^2 casillas, cada una ocupada por un número natural distinto, de forma que la suma de los números de las distintas filas horizontales y verticales, así como de las dos diagonales es siempre la misma.

En la imagen puede verse el más famoso de los cuadrados mágicos de orden 4, debido al pintor Durero. Su suma o constante mágica es 34, además los cuatro números del centro (en color verde) también suman 34, así como los cuatro de las esquinas (en color negro). Los dos números en color rojo componen el año en el que fue realizado el grabado en el que aparece.

Los cuadrados mágicos están llenos de propiedades y sorpresas. Investiga sobre ellos.

a) Sea la matriz $M(s) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Expresando las ocho sumas del enunciado e igualándolas a s, obtenemos el siguiente sistema homogéneo de 8 ecuaciones con 10 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} - s = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} - s = 0 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} - s = 0 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} - s = 0 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} - s = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} - s = 0 \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} - s = 0 \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} - s = 0 \end{cases}$$

Realizando operaciones elementales por filas, las matrices que siguen tienen el mismo rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes vale 7. Como el número de incógnitas es 10, las soluciones del sistema, es decir, el conjunto de las matrices M (s) dependerán de 10 – 7 = 3 parámetros.

Procediendo de forma directa, si a_{11} = a; a_{12} = b; a_{21} = c, una matriz mágica de suma s, M (s), se expresará en la forma:

$$M\ (s) = \begin{pmatrix} a & b & s - a - b \\ c & -s + 2a + b + c & 2s - 2a - b - 2c \\ s - a - c & 2s - 2a - 2b - c & -2s + 3a + 2b + 2c \end{pmatrix}$$

Imponiendo que $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ = s, se obtiene 6a + 3b + 3c – 3s = 2, es decir, $c = \frac{4}{3}s - 2a - b.$

Toda matriz mágica M (s) depende de tres parámetros a, b y s. La expresión, respecto de estos parámetros, de una matriz mágica M (s) es:

$$M\ (s) = \begin{pmatrix} a & b & s - a - b \\ \frac{4}{3}s - 2a - b & \frac{1}{3}s & -\frac{2}{3}s + 2a + b \\ -\frac{1}{3}s + a + b & \frac{2}{3}s - b & \frac{2}{3}s - a \end{pmatrix} \qquad [\,\mathrm{I}\,]$$

Podemos expresar la matriz M (s) en función de tres matrices fijas en la forma:

$$M(s) = a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = a\cdot A + b\cdot B + s\cdot S$$

b) Si la matriz mágica M (s) es antisimétrica, se cumplirá: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, luego $s = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. Además, $a = a_{11} = 0$

Haciendo a = 0 y s = 0 en la expresión [I] de la matriz mágica M (s) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} = b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = b\cdot B$$

Todas las matrices mágicas antisimétricas son de la forma anterior.

c) Imponiendo en la expresión [I] que la matriz sea simétrica, resulta:

$$b = \frac{4}{3}a - 2a - b \quad\Rightarrow\quad b = \frac{2}{3}s - a.$$

Sustituyendo este valor de b en la expresión [I] obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{2}{3}s - a & \frac{1}{3}s \\ \frac{2}{3}s - a & \frac{1}{3}s & a \\ \frac{1}{3}s & a & \frac{2}{3}s - a \end{pmatrix}$$

que es la expresión genéricas de las matrices mágicas genéricas.

2. Sobre cuadrados mágicos la información es muy abundante tanto bibliográfica como en Internet, por tanto, dejemos esta cuestión abierta.

UNIDAD 4: Programación lineal

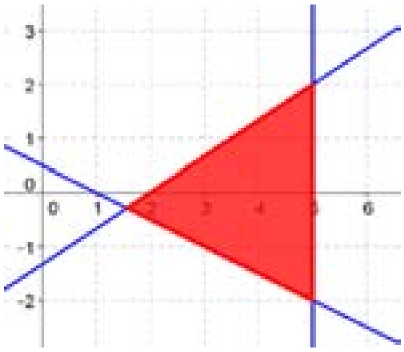
CUESTIONES INICIALES-PÁG. 88

1. Representa en el plano el conjunto de puntos que cumplen las siguientes condiciones:

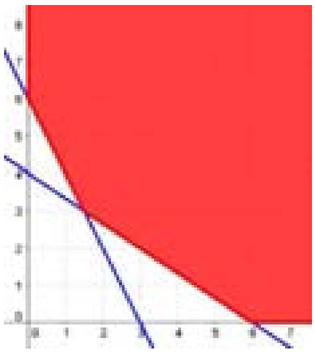
a) $\begin{cases} x+2y \geq 1 \\ x \leq 5 \\ 2x-3y \geq 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+3y \geq 12 \\ 2x+y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Las regiones buscadas son:

a)

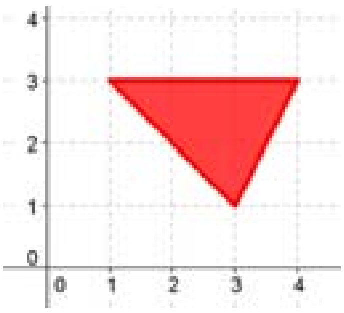


b)

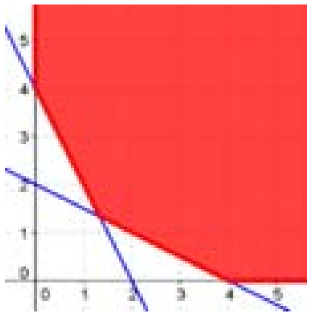


2. Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución es el conjunto de puntos de la figura sombreada:

a)



b)



Los sistemas pedidos son:

a) $\begin{cases} 2x - y \leq 5 \\ x + y \geq 4 \\ \quad y \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 101

1. Lentejas y garbanzos. En un puesto del mercado tiene 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el asco de lentejas?

Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg. Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedan do sólo el saco de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119 - 20 = 99.$$

Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg y 16 kg. El saco de lentejas peso 20 kg.

2. Tres cartas. De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o dos *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un oro, hay una o dos *copas;* y a la derecha de de una *copa*, hay una o dos *copas.* ¿De qué tres caratas se trata?

El caballo y las sotas las señalaremos con C S S. Para que se verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c\ S_o\ S_c$$

Por tanto, las cartas son:

● Caballo de copas ● Sota de oros ● Sota de copas.

3. Primas. Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

Descomponemos 2450 en factores, obtenemos $2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50

7	14	25	46	23
7	14	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades.

La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

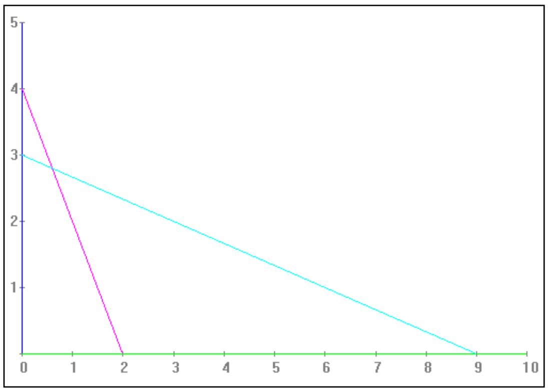
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 103

1. Optimiza la función F(x, y) = x + 3y sujeta a las restricciones:

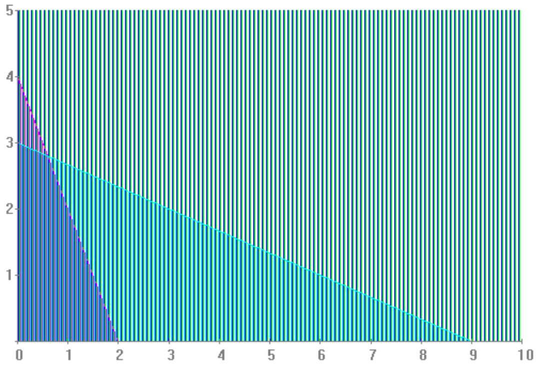
$$\left\{x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + y \leq 4; \quad x + 3y \leq 9\right\}$$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe RESOLUCIÓN DE UN PROGRAMA LINEAL:

- En la ventana **PROGRAMACIÓN LINEAL-Entrada de datos** introducimos las inecuaciones y la función objetivo y pulsando **Aceptar** aparece la representación gráfica de las rectas 2x + y = 4 y x + 3y = 9.



- Para visualizar toda la región de soluciones activamos en el menú **Programación lineal** la opción **Marcar soluciones**. En la imagen adjunta aparecen las soluciones del sistema en el cuadrilátero de color azul, cuyos vértices son los puntos (0, 0); (2, 0); (0,6; 2,8) y (0, 3).



- Si queremos conocer los valores óptimos del programa lineal debemos activar la opción **Copiar la solución en el portapapeles** del menú **Programación lineal** y llevándolo a un procesador de textos el programa nos proporciona los valores que podemos ver a continuación:

F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 4) = 12; S S S N
F(0, 0) = 0; S S S S
F(9, 0) = 9; S S N S
F(2, 0) = 2; S S S S
F(0, 3) = 9; S S S S

Max(0, 3) = 9

F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 3) = 9; S S S S
F(2, 0) = 2; S S S S
F(0, 4) = 12; S S S N
F(0.6, 2.8) = 9; S S S S
F(9, 0) = 9; S S N S

Mín(0, 0) = 0

Los valores anteriores son los que toma la función objetivo en los puntos de corte de las rectas fronteras de la región de soluciones entre sí y con los ejes coordenadas. Observamos que el máximo, de valor 9, se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos (0, 3) y (0,6; 2,8); y el mínimo, de valor 0, se obtiene en el punto (0, 0).

2. Una empresa de transporte debe organizar el traslado de dos productos A y B entre dos ciudades utilizando camionetas y furgones. Cada camioneta permite transportar 5 unidades de A y 4 de B, mientras que en cada furgón se puede transportar 2 unidades de A y 1 de B. La empresa no puede transportar más unidades de las que puede vender en la ciudad de destino y en la ciudad de destino puede vender como máximo 90 unidades de A y 60 de B. El envío de una camioneta le reporta a la empresa un beneficio de 1600 euros, mientras que el envío de un furgón le reporta un beneficio de 600 euros. ¿Cuántas camionetas y furgones deben usar para maximizar el beneficio de estos transportes? ¿A cuánto asciende dicho beneficio óptimo?

Recogemos la información en una tabla:

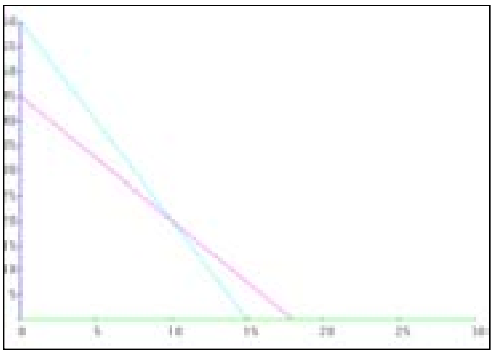
	Camionetas	**Furgones**	**Disponibilidad**
Producto A	5	2	90
Producto B	4	1	60
Vehículos	x	y	
Beneficios	1600 euros	600 euros	

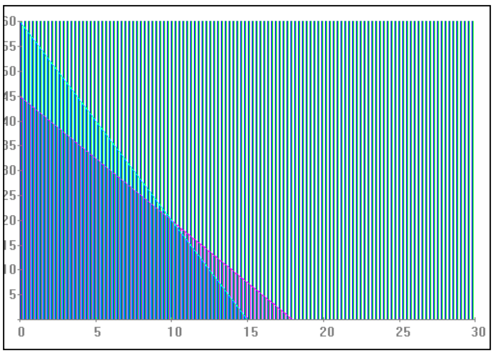
El programa a maximizar es:

Maximizar F(x, y) = 1600 x + 600y sujeta a las restricciones:

$$\{x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 5x + 2y \leq 90; \quad 4x + y \leq 60\}$$

Introducimos las inecuaciones y la función objetivo y dibujamos la región de soluciones como puede verse en la imagen.



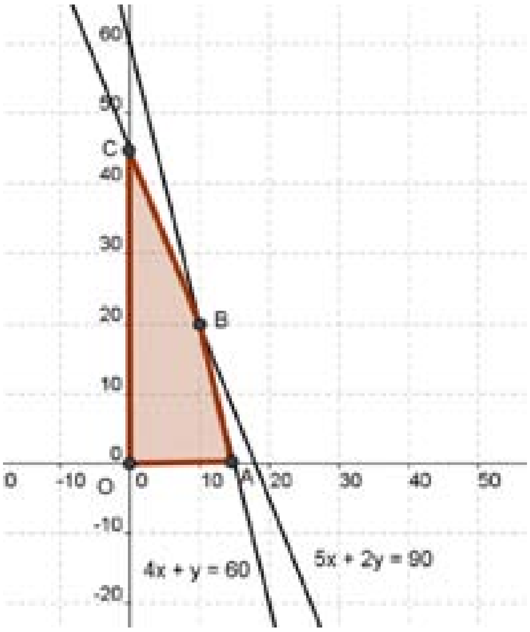


En la imagen adjunta aparecen las soluciones del sistema en el cuadrilátero de color azul, cuyos vértices son los puntos (0, 0); (15, 0); (10, 20) y (0, 45).

Si queremos conocer los valores óptimos del programa lineal debemos activar la opción **Copiar la solución en el portapapeles** del menú **Programación lineal** y llevándolo a un procesador de textos el programa nos proporciona los valores que podemos ver a continuación:

F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 45) = 27000; S S S S
F(0, 0) = 0; S S S S
F(15, 0) = 24000; S S S S
F(18, 0) = 28800; S S S N
F(0, 60) = 36000; S S N S

F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 60) = 36000; S S N S
F(18, 0) = 28800; S S S N
F(0, 45) = 27000; S S S S
F(10, 20) = 28000; S S S S
F(15, 0) = 24000; S S S S



Max(10, 20) = 28000

Mín(0, 0) = 0

El máximo beneficio, de 28 000 euros, se obtiene con el transporte de 10 camionetas y 20 furgones.

En la imagen adjunta puede verse otro dibujo de la región de soluciones y sus vértices.

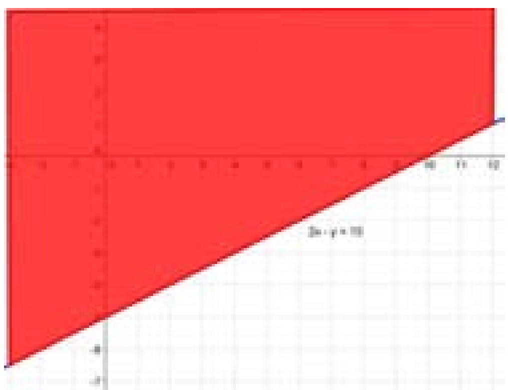
ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 108

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

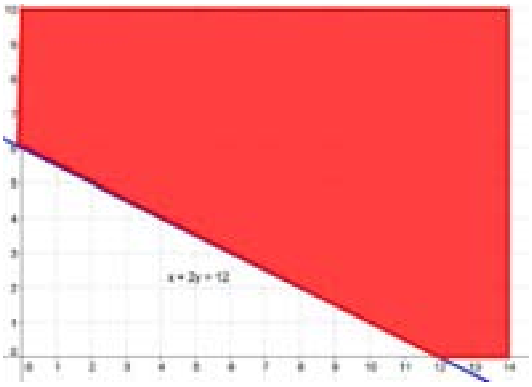
a) $x - 2y \leq 10$ **b)** $x + 2y \geq 12$ **c)** $x \leq 3$ **d)** $y \geq -2$

Las soluciones pueden verse en los dibujos siguientes:

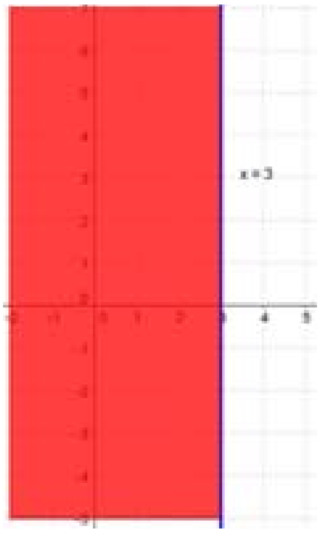
a)



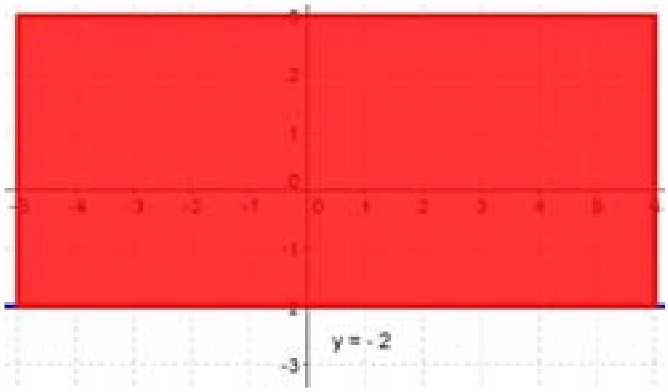
b)



c)



d)



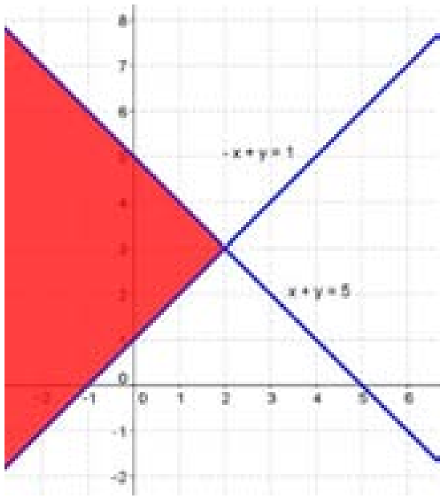
2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -x + y \geq 1 \end{cases}$

Las regiones factibles pueden verse en los dibujos:

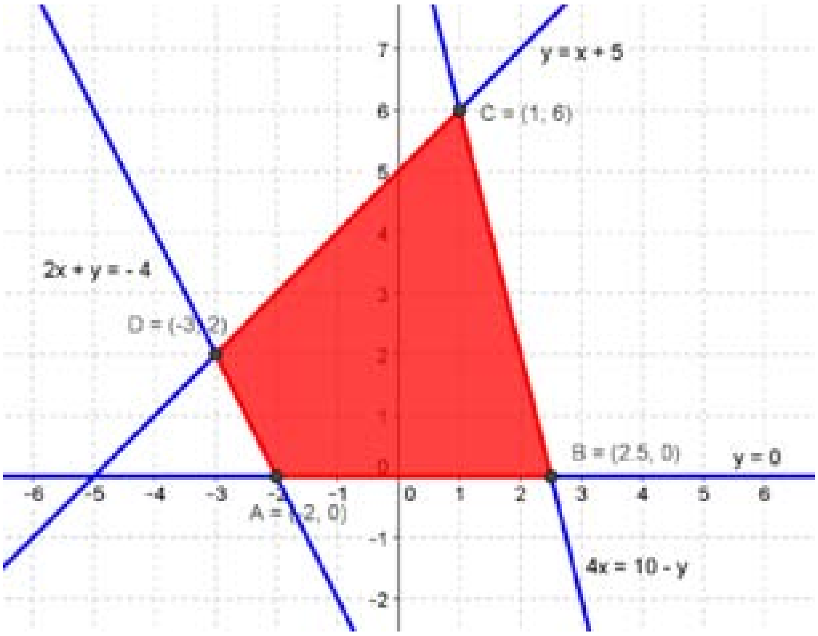
a)

b)



■ 3. Dadas las inecuaciones: y ≤ x + 5, 2x + y ≥ - 4, 4x ≤ 10 – y, y ≥ 0; representa el recinto que limitan y calcula sus vértices.

El recinto que limitan es el que aparece en el dibujo.

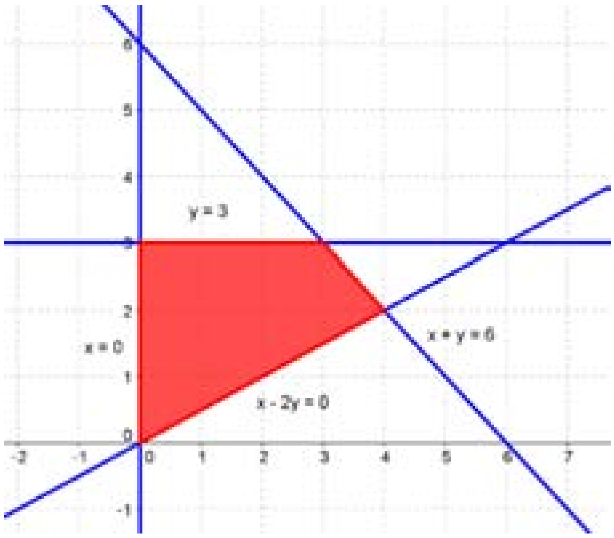


También pueden verse los vértices: A (- 2, 0); B (2,5; 0); C (1, 6) y D (- 3, 2).

4. Para el sistema de inecuaciones siguiente, representa el recinto que limitan, calcula sus vértices y determina todos los puntos de coordenadas enteras que se encuentran en el interior del recinto así como en su frontera.

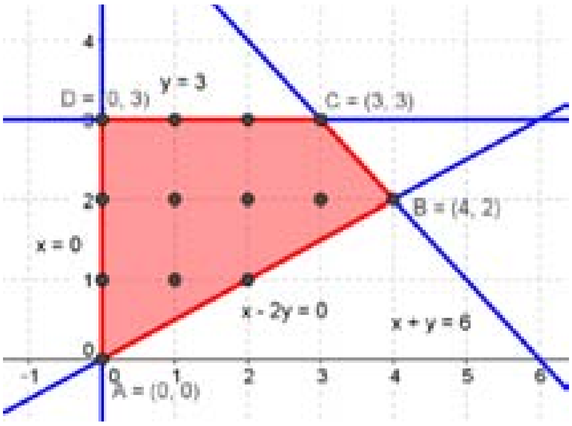
$$\{x - 2y \leq 0,\ x + y \leq 6,\ x \geq 0,\ y \leq 3\}$$

El recinto puede verse en el dibujo:



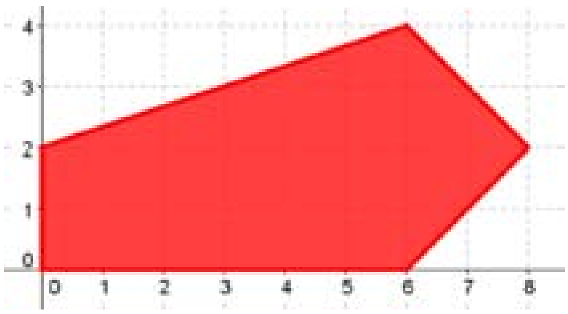
Los vértices son los puntos: A (0, 0); B (4, 2); C (3, 3) y D (0, 3).

Los puntos de coordenadas enteras pedidos, además de los vértices, son: (0, 1); (1, 1); (2, 1); (0, 2); (1, 2); (2, 2); (3, 2); (1, 3) y (2, 3).

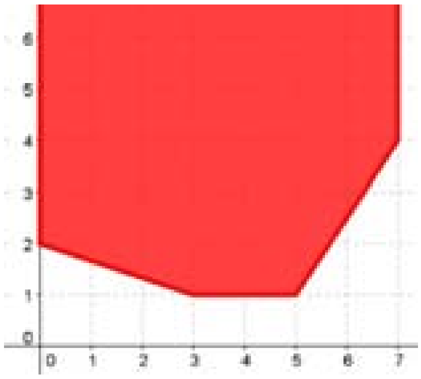


5. ¿Qué sistemas de inecuaciones tienen por solución la región coloreada en cada uno de los gráficos siguientes?

a)



b)



Los sistemas son:

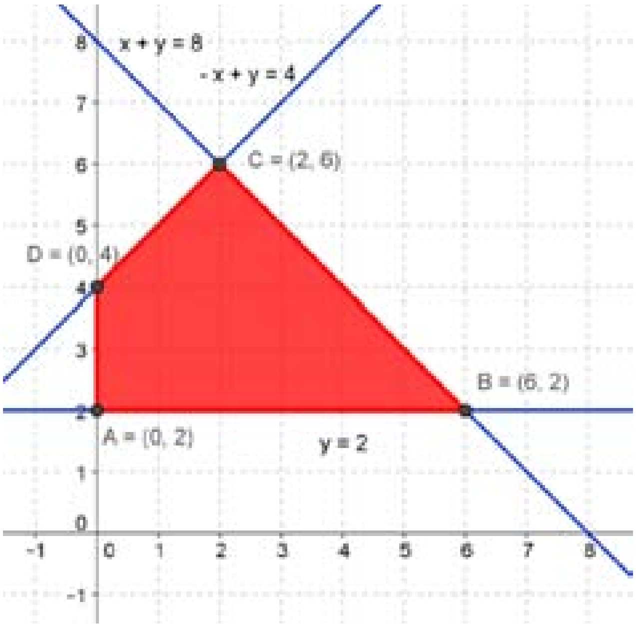
$$\text{a)}\ \begin{cases} x - 3y \geq -6 \\ x + y \leq 10 \\ x - y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + 3y \geq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

6. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

$$\{0 \leq x,\ 2 \leq y,\ x + y \leq 8,\ -x + y \leq 4\}$$

b) Halla los valores máximo y mínimo de la función f (x, y) = x + 3y en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.

a) La región pedida en la zona coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A\ (0, 2)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 8 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B\ (6, 2)$$

$$C: \begin{cases} x + y = 8 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C\ (2, 6)$$

$$D: \begin{cases} -x + y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D\ (0, 4)$$

b) Para hallar los valores máximo y mínimo de f (x) = x + 3y en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

f_A (0, 2) = 0 + 3 · 2 = 6 f_B (6, 2) = 6 + 3 · 2 = 12

f_C (2, 6) = 2 + 3 · 6 = 20 f_D (0, 4) = 0 + 3 · 4 = 12

El mínimo es 6 y se alcanza en el punto A (0, 2).

El máximo es 20 y se alcanza en el punto C (2, 6).

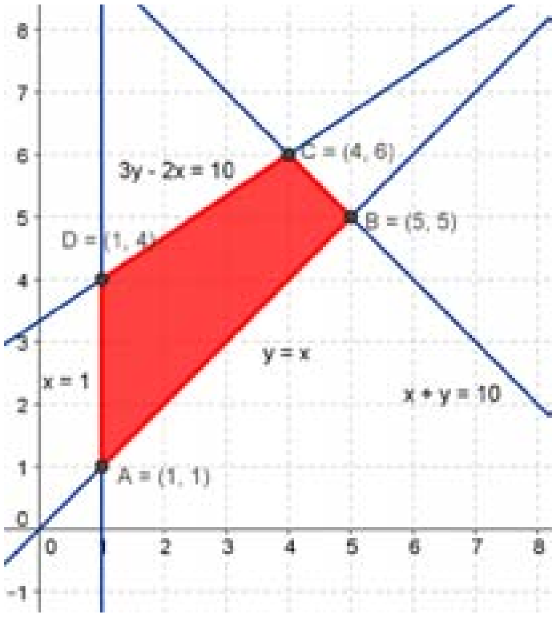
7. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

{x ≥ 1, y ≥ x, x + y ≤ 10, 3y – 2x ≤ 10}

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

b) ¿En qué punto o puntos de esta región alcanza los valores máximo y mínimo la función f (x, y) = 2x – 2y + 7?

a) La región factible es la zona coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A:\begin{cases} x = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A\ (1, 1)$$

$$B:\begin{cases} x + y = 10 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B\ (5, 5)$$

$$C:\begin{cases} x + y = 10 \\ -2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C\ (4, 6)$$

$$D:\begin{cases} -2x + 3y = 10 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D\ (1, 4)$$

b) Para hallar los valores en los que se alcanza el máximo y el mínimo de f (x) = 2x – 2y + 7, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

f_A (1, 1) = 2 · 1 – 2 · 1 + 7 = 7 f_B (5, 5) = 2 · 5 – 2 · 5 + 7 = 7

f_C (4, 6) = 2 · 4 – 2 · 6 + 7 = 3 f_D (1, 4) = 2 · 1 – 2 · 4 + 7 = 1

El mínimo es 1 y se alcanza en el punto D (1, 4).

El máximo es 7 y se alcanza en todos los puntos del segmento de extremos A (1, 1) y B (5, 5).

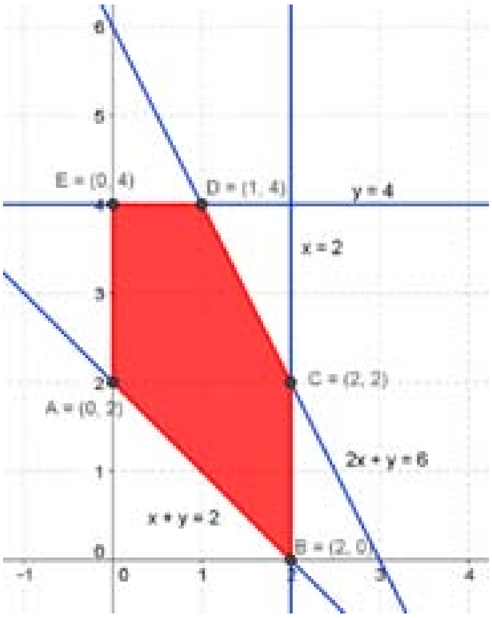
8. Sea el sistema de inecuaciones: {x + y ≥ 2, 2x + y ≤ 6, 0 ≤ x ≤ 2, 0 ≤ y ≤ 4}

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función f (x, y) = 3x + y en la región definida por el sistema.

c) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función g (x, y) = 3x + 3y en la región definida por el sistema.

a) El conjunto de soluciones es la región coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A:\begin{cases} x=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A\ (0,\ 2)$$

$$B:\begin{cases} x+y=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B\ (2,\ 0)$$

$$C:\begin{cases} x=2 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C\ (2,\ 2)$$

$$D:\begin{cases} 2x+y=6 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow D\ (1,\ 4)$$

$$E:\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow E\ (0,\ 4)$$

b) Para hallar el mínimo de f (x) = 3x + y, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

f_A (0, 2) = 3 · 0 + 2 = 2 f_B (2, 0) = 3 · 2 + 0 = 6 f_C (2, 2) = 3 · 2 + 2 = 8

f_D (1, 4) = 3 · 1 + 4 = 7 f_E (0, 4) = 3 · 0 + 4 = 4

El mínimo es 2 y se alcanza en el punto A (0, 2).

b) Para hallar el mínimo de g (x) = 3x + 3y, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en f (x, y) y obtenemos:

g_A (0, 2) = 3 · 0 + 3 · 2 = 6 g_B (2, 0) = 3 · 2 + 3 · 0 = 6 g_C (2, 2) = 3 · 2 + 3 · 2 = 12

g_D (1, 4) = 3 · 1 + 3 · 4 = 15 g_E (0, 4) = 3 · 0 + 3 · 4 = 12

El mínimo es 6 y se alcanza en todos los puntos del segmento de extremos A (0, 2) y B (2, 0).

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 109

9**. Un ahorrador dispone de 4000 € para invertir en dos tipos de fondos de inversión a cierto plazo. En el fondo A cada participación tiene un coste de 40 € y produce un beneficio de 15 €, mientras que en el fondo B cada participación da un beneficio de 5 € y su coste es de 50 €. Sabiendo que se puede adquirir un máximo de 60 participaciones del fondo A y al menos 40 del fondo B, determina cuántas participaciones de cada fondo se deben comprar para maximizar el beneficio y calcula ese beneficio.**

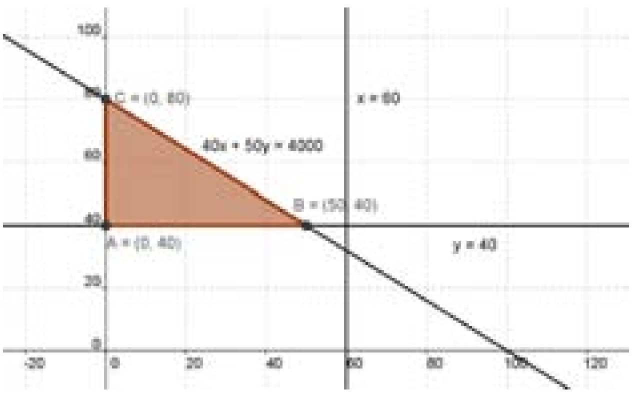
Recogemos la información en una tabla:

Fondos de inversión	Coste	Inversión	Beneficios
A	40 euros	x	15 euros
B	50 euros	y	5 euros
Disponibilidad	4000 euros		

El programa a maximizar es:

Max z = 15x + 5y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 40x + 50y \leq 4000 \\ x \leq 60 \\ y \geq 40 \\ x, y \in N \end{cases}$$



Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.

Hallamos los vértices de la citada región:

$$A(0,\ 40):\begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$B(50,\ 40):\begin{cases} 40x + 50y = 4000 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$C(0,\ 80):\begin{cases} 40x + 50y = 4000 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 80 \end{cases}$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 200$ $\quad$ $Z_B = 950$ $\quad$ $Z_C = 400$

La inversión debe ser: 50 participaciones del fondo A y 40 participaciones del fondo B con un beneficio máximo de:

$$15 \cdot 50 + 5 \cdot 40 = 950 \text{ euros.}$$

10. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Cada joya tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 24 euros. La se tipo B se vende a 30 euros y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si el orfebre sólo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Recogemos la información en una tabla:

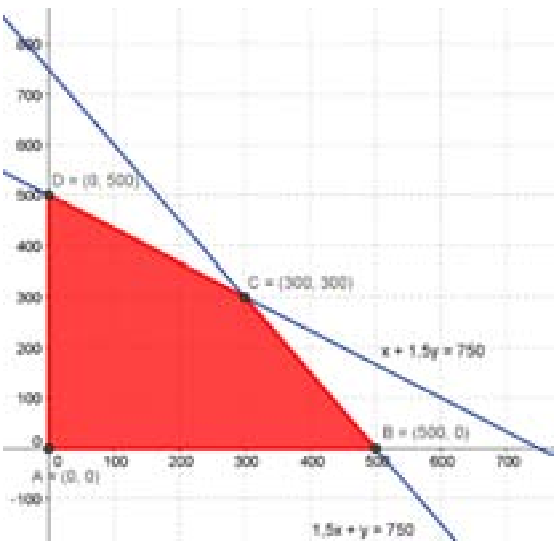
	Tipo A	Tipo B	Disponibilidad
Oro	1	1,5	750 g
Plata	1,5	1	750 g
Precio	24 euros	30 euros	
Número de joyas	x	y	

El programa a maximizar es:

$$\text{Max } z = 24x + 30y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + 1{,}5y \le 750 \\ 1{,}5x + y \le 750 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A:\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\ (0,\ 0)$$

$$B:\begin{cases} 1{,}5x + y = 750 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\ (500,\ 0)$$

$$C:\begin{cases} 1{,}5x + y = 750 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 300 \end{cases} \Rightarrow C\ (300,\ 300)$$

$$D:\begin{cases} x + 1{,}5y = 750 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow B\ (0,\ 500)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 0$ $Z_B = 12\ 000$ $Z_C = 16\ 200$ $Z_D = 15\ 000$

El orfebre debe fabricar 300 joyas de tipo A y 300 joyas de tipo B para obtener un beneficio máximo de 16 200 euros.

11. Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 g de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 g de hidratos de carbono, 10 g de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 g de hidratos de carbono y 90 g de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro.

Determina cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que se cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

Recogemos la información en una tabla:

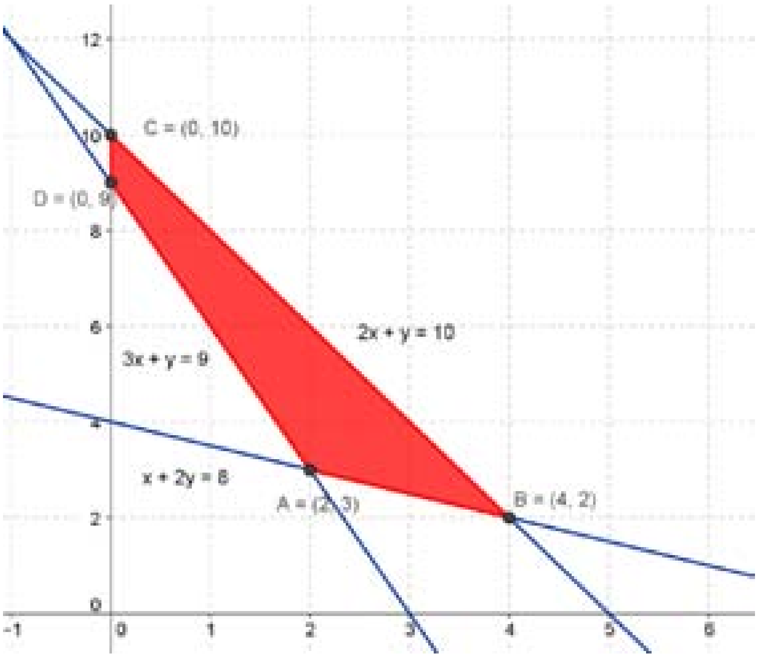
	Chocolate	**Cereales**	**Necesidades**
Hidratos de carbono	40	80	320
Proteínas	30	10	90
Kcal	200	100	1000
Coste	2	1	
Número de barritas	x	y	

El programa a minimizar es:

Min z = 2x + y

$$\text{s.a.}\begin{cases} 40x + 80y \geq 320 \\ 30x + 10y \geq 90 \\ 200x + 100y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A:\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A\ (2, 3)$$

$$B:\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B\ (4, 2)$$

$$C:\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow C\ (0, 10)$$

$$D:\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow B\ (0, 9)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 7$ $Z_B = 10$ $Z_C = 10$ $Z_D = 9$

El deportista tiene que tomar dos barritas de chocolate y tres barritas de cereales.

12. Tenemos que fertilizar unos terrenos de una finca utilizando dos abonos, A y B. El coste del abono A es 0,9 €/kg, y el abono B cuesta 1,5 €/kg. El abono A contiene un 20% de nitrógeno y un 10% de fósforo, mientras que el abono B contiene un 18% y un 15%, respectivamente. Para fertilizar los terrenos correctamente necesitamos un mínimo de 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo. ¿Cuál es el gasto mínimo que debemos hacer si queremos fertilizar los terrenos de la finca correctamente?

Recogemos la información en una tabla:

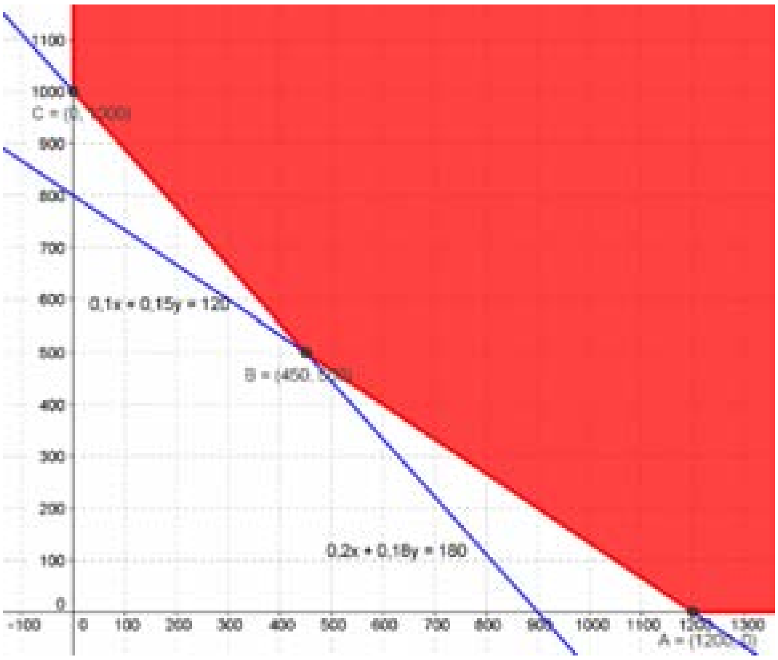
	Abono A	Abono B	Necesidades
Nitrógeno	20%	18%	180 kg
Fósforo	10%	15%	120 kg
Coste	0,9	1,5	
Kilogramos de abono	x	y	

El programa a minimizar es:

Min z = 0,9x + 1,5y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 0{,}2x + 0{,}18y \geq 180 \\ 0{,}1x + 0{,}15y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A: \begin{cases} 0{,}1x + 0{,}15y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1200 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\ (1200,\ 0)$$

$$B:\begin{cases}0{,}2x+0{,}18y=180\\0{,}1x+0{,}15y=120\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=450\\y=500\end{cases}\Rightarrow B\ (450,\,500)$$

$$C:\begin{cases}0{,}2x+0{,}18y=120\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1000\end{cases}\Rightarrow C\ (0,\,1000)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

Z_A (1200, 0)= 0,9 · 1200 + 1,5 · 0 = 1080

Z_B (450, 500) = 0,9 · 450 + 1,5 · 500 = 1155

Z_C (0, 1000) = 0, 9 · 0 + 1,5 · 1000 = 1500

El gasto mínimo que tenemos que hacer para fertilizar la finca es 1080 €, lo que conseguimos comprando 1200 kg de fertilizante A.

13. Una empresa fabrica dos modelos de sillas de ruedas. Los recursos disponibles y las cantidades requeridas para cada silla se dan en la siguiente tabla:

	Modelo 1	Modelo 2	Disponibilidad
Horas de mano de obra	2	4	1000
Unidades de acero	3	1	600
Motores	-	1	200

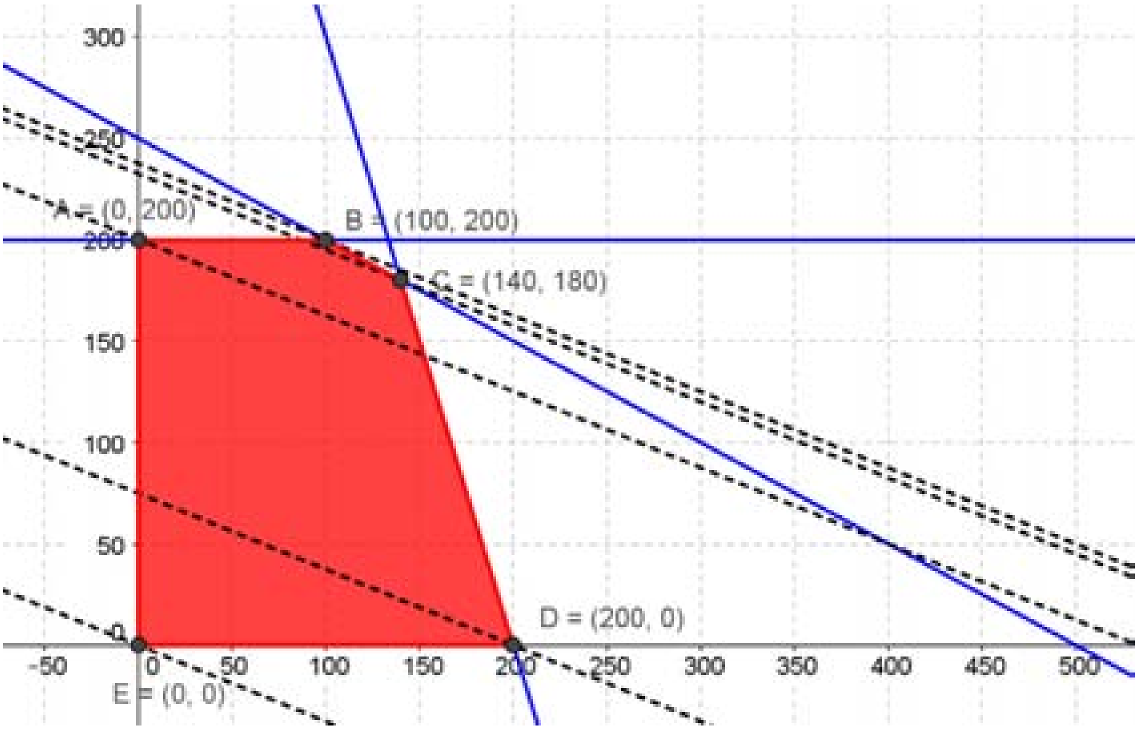
Si cada silla del modelo 1 da un beneficio de 60 euros y cada silla del modelo 2 de 160 euros, ¿cuántas unidades de cada modelo se han de fabricar para maximizar el beneficio? La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico, además, analiza gráficamente qué ocurre si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades.

Sea x el número de sillas del modelo 1 e y el número de sillas del modelo 2, el programa a maximizar es:

Max z = 60x + 160y

$$\text{s.a.}\ \begin{cases}2x+4y\le 1000\\3x+y\le 600\\0\le y\le 200\\x\ge 0\end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta 60x + 160y = 0, es decir, 3x + 8y = 0, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: 3x + 8y - 1600 = 0	Por B: 3x + 8y – 1900 = 0
Por C: 3x + 8y – 1860 = 0	Por D: 3x + 8y – 600= 0

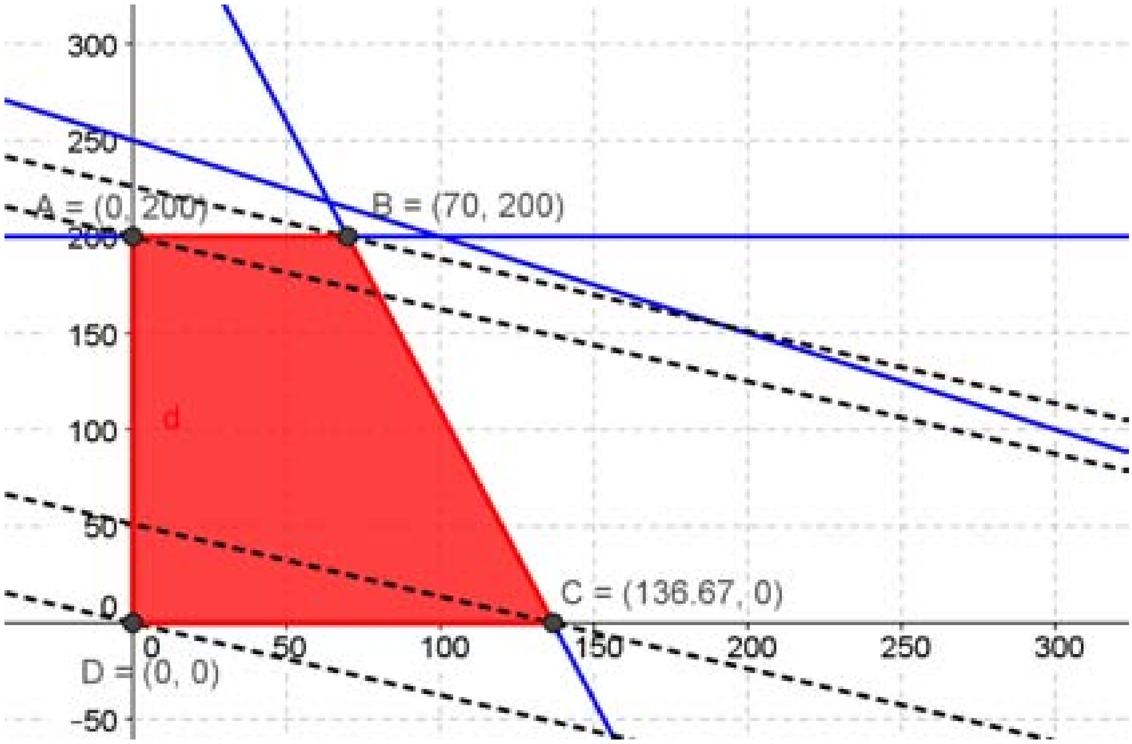
De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por el vértice B (100, 200), en el cual, la función objetivo alcanza su máximo.

Para maximizar el beneficio, hay que fabricar 100 sillas del modelo 1 y 200 sillas del modelo 2.

Si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades, las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \le 1000 \\ 3x + y \le 410 \\ 0 \le y \le 200 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta 60x + 160y = 0, es decir, 3x + 8y = 0, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: 3x + 8y - 1600 = 0 Por B: 3x + 8y – 1810 = 0

Por C: 3x + 8y – 410 = 0

De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por el vértice B (70, 200), en el cual, la función objetivo alcanza su máximo.

Para maximizar el beneficio, habría que fabricar 70 sillas del modelo 1 y 200 sillas del modelo 2.

14. Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo A requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo B requiere 3 días.. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se pueden elaborar, a lo suma 4 muebles de tipo A y 8 de tipo B.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos?

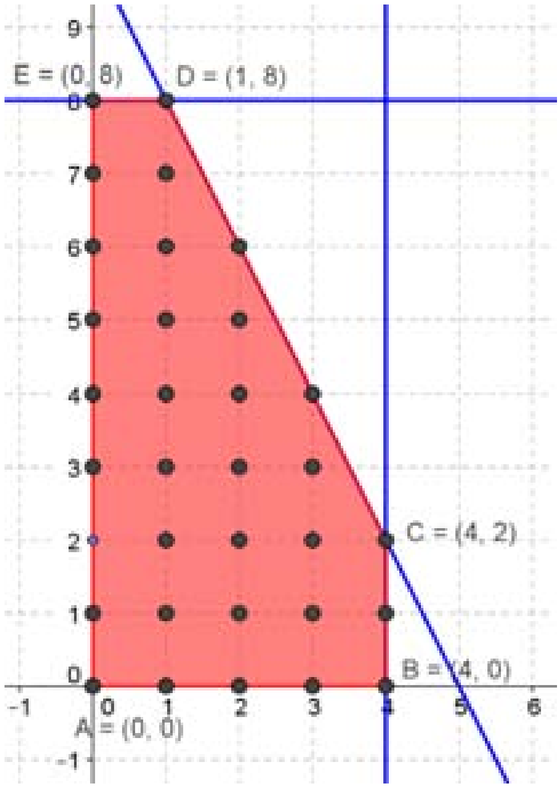
b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo A vendido es de 500 euros y por cada mueble de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

a) Sea x el número de muebles de tipo A e y el número de muebles de tipo B.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ 6x + 3y \leq 30 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones son los puntos de coordenadas enteras de la zona sombreada del dibujo.



b) La función beneficio es f (x, y) = 500x + 200y.

Para determinar su máximo, sustituimos en ella los vértices de la región del conjunto de soluciones:

$f_A(0, 0) = 500 \cdot 3 + 200 \cdot 0 = 0$ $f_B(4, 0) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 0 = 2000$

$f_C(4, 2) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 2400$ $f_D(1, 8) = 500 \cdot 1 + 200 \cdot 8 = 2100$

$f_E(0, 8) = 500 \cdot 0 + 200 \cdot 8 = 1600$

Para maximizar el beneficio, tienen que fabricar 4 muebles de tipo A y 2 muebles de tipo B.

La función "máximo número de muebles elaborados" es g (x, y) = x + y. Para hallar su máximo, procedemos como en el caso anterior:

$g_A(0, 0) = 0 + 0 = 0$ $g_B(4, 0) = 4 + 0 = 4$ $g_C(4, 2) = 4 + 2 = 6$

$g_D(1, 8) = 1 + 8 = 9$ $g_E(0, 8) = 0 + 8 = 8$

El máximo número de muebles elaborados se obtiene fabricando un mueble tipo A y 8 muebles tipo B.

15. En una ciudad existen dos depósitos de harina A y B y tres panaderías P, Q y R. En el depósito A se almacenan 50 toneladas de harina y en el B 70. Las 120 toneladas que hay en total se reparten del siguiente modo: 30 para P, 50 para Q y 40 para R. El coste, en unidades monetarias, del transporte de una tonelada de un depósito a una panadería viene dado en la tabla adjunta. ¿Cómo debe hacerse la distribución de las 120 toneladas para que el coste del transporte sea mínimo?

	P	Q	R
A	8	3	5
B	2	4	4

Si llamamos x a las toneladas a transportar desde el depósito A a la panadería P e y a las toneladas a trasportar desde el depósito B a la panadería Q, toda la distribución de la harina, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

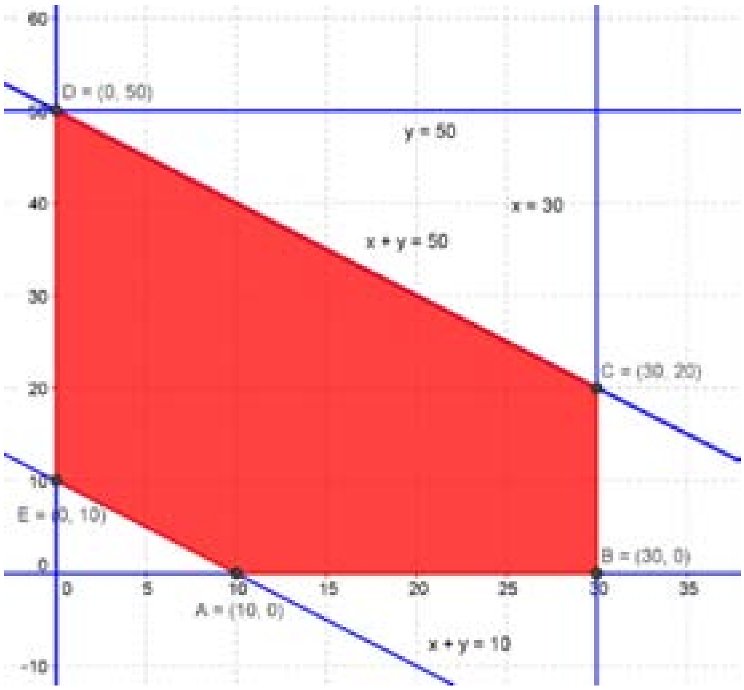
	P	Q	R
A	x	y	50 – x – y
B	30 - x	50 - y	- 10 + x + y

El programa lineal a resolver es:

Min z = 5x – 2y + 470

$$\text{s. a.} \begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x \leq 30,\ y \leq 50 \\ x + y \leq 50 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

La región factible es la zona coloreada del dibujo.



El valor de la función objetivo en los vértices de la región factible es:

z_A (10, 0) = 5 · 10 – 2 · 0 + 470 = 520 z_B (30, 0) = 5 · 30 – 2 · 0 + 470 = 620

z_C (30, 20) = 5 · 30 – 2 · 20 + 470 = 580 z_D (0, 50) = 5 · 0 – 2 · 50 + 470 = 370

z_E (0, 10) = 5 · 0 – 2 · 10 + 470 = 450

En el vértice D (0, 50) se minimiza la función objetivo, por tanto, la solución es x = 0, y = 50, es decir, las cantidades a transportar son las que aparecen en la tabla que sigue:

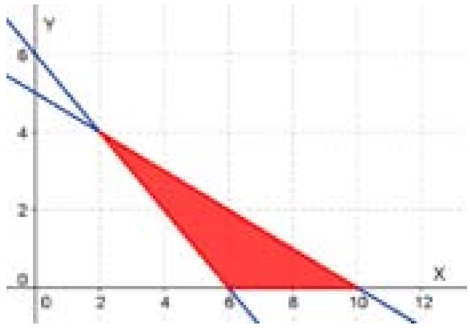
	P	Q	R
A	0	50	0
B	30	0	40

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 110

1. Considera la región sombreada del dibujo:

a) Determina el sistema de inecuaciones que delimita.

b) Calcula el valor máximo de la función z = x + 2y en esta región e indica para qué valores se alcanza dicho máximo.



a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos (6, 0) y (0, 6) es x + y = 6.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (10, 0) y (0, 5) es x + 2y = 10.

Por tanto, el sistema que delimita la región sombreada, incluyendo los bordes, es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) El máximo de la función z = x + 2y en la región sombreada se alcanza en uno de sus vértices:

z (6, 0) = 6 + 2 · 0 = 6 z (10, 0) = 10 + 2 · 0 = 10 z (2, 4) = 2 + 2 · 4 = 10

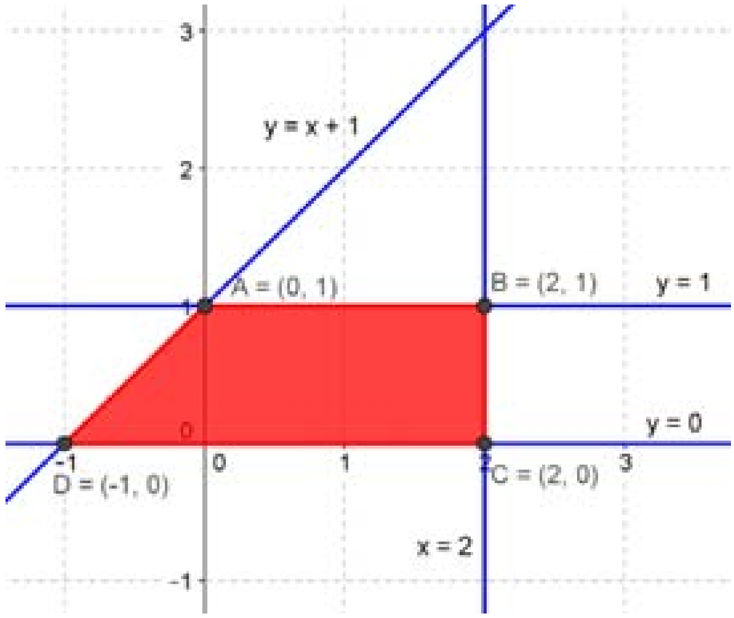
El máximo de la función z = x + 2y en esta región es 10 y se alcanza en el segmento que une los puntos (2, 4) y (10, 0).

■ 2. a) Representa gráficamente el recinto limitado por las desigualdades siguientes:

$$\{0 \le y \le 1;\ \ y - 1 \le x \le 2\}$$

b) Halla los valores máximo y mínimo de la función f (x, y) = - x + 2y en dicho recinto, así como los puntos en los que se alcanza dichos valores.

a) El recinto pedido puede verse en el dibujo.



b) La región factible es la zona sombreada del apartado anterior.

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo f (x, y) = - x + 2y:

f_A (0, 1) = - 0 + 2 · 1 = 2 $\qquad$ f_B (2, 1) = - 2 + 2 · 1 = 0

f_C (2, 0) = - 2 + 2 · 0 = - 2 $\qquad$ f_D (- 1, 0) = - (- 1) + 2 · 0 = 1

El valor máximo, 2, se alcanza en el punto A (0, 1) y el valor mínimo, - 2, se alcanza en el punto C (2, 0).

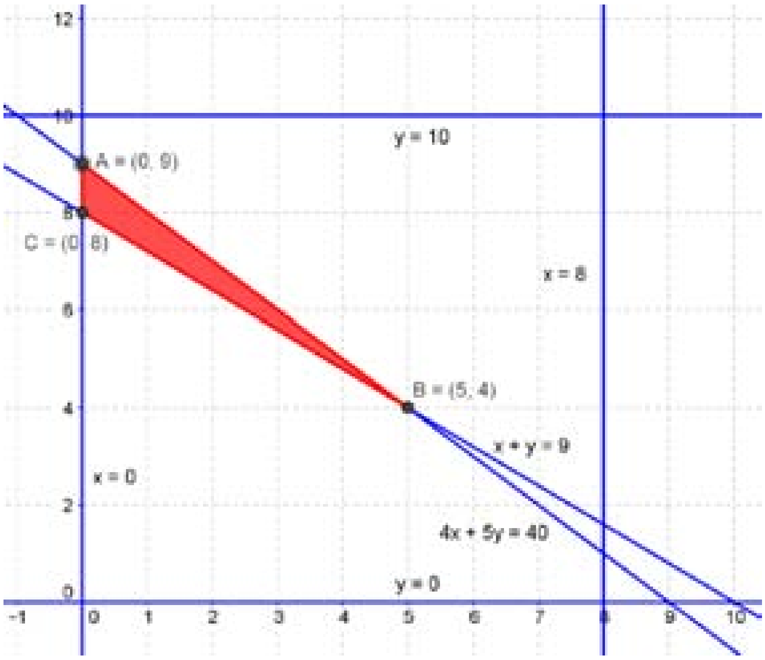
3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autobús grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €. ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible?

a) Siendo x el número de autocares de 40 plazas e y el número de autocares de 50 plazas, el programa a optimizar es:

Min z = 60x + 80y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 40x + 50y \geq 400 \\ x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A: \begin{cases} x + y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow A\ (0, 9)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B\ (5, 4)$$

$$C: \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C\ (0, 8)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$Z_A = 720$ $\quad$ $Z_B = 620$ $\quad$ $Z_C = 640$

Para que la excursión resulte los más económica posible, hay que utilizar 5 autocares de 40 plazas y 4 de 50 plazas.

4. Una industria papelera elabora dos clases de papel a partir de dos tipos de madera. Las cantidades de madera necesarias por unidad de cada tipo de papel y las disponibilidades semanales (en las unidades adecuadas) aparecen en la tabla:

	Papel 1	Papel 2	Disponibilidades
Madera 1	8	8	64
Madera 2	4	8	50

Si el beneficio neto por cada unidad de papel son 100 000 y 200 000 unidades monetarias respectivamente, ¿qué cantidad de papel de cada clase nos dará un beneficio máximo?

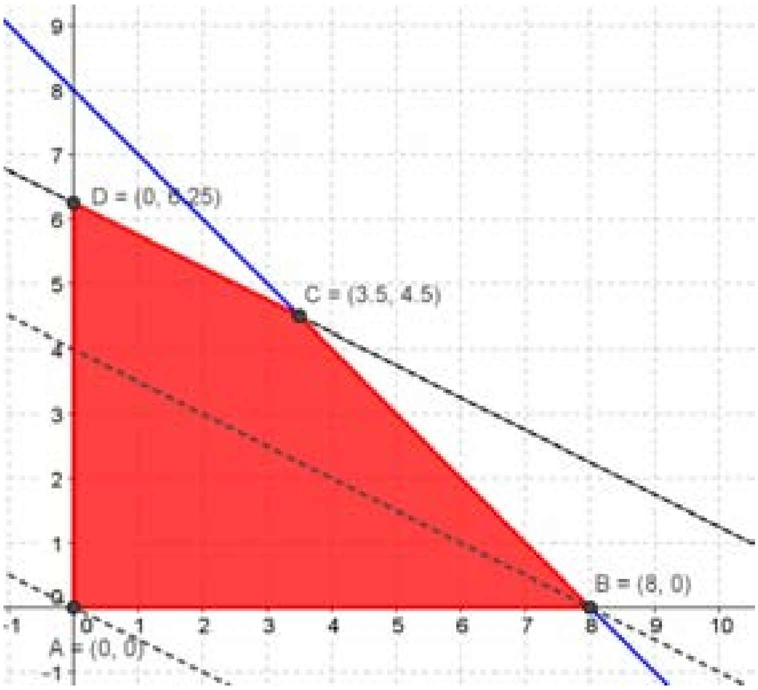
La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico, además, analiza gráficamente qué ocurre si las disponibilidades de madera 1 se reducen a 50 unidades.

a) Sea x el número de unidades de papel 1 e y el número de unidades de papel 2, el programa a maximizar es:

Max z = 100 000x + 200 000y

$$\text{s.a.} \begin{cases} 8x + 8y \leq 64 \\ 4x + 8y \leq 50 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta 100 000x + 200 000y = 0, es decir, x + 2y = 0, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: x + 2y = 0 Por B: x + 2y – 8 = 0

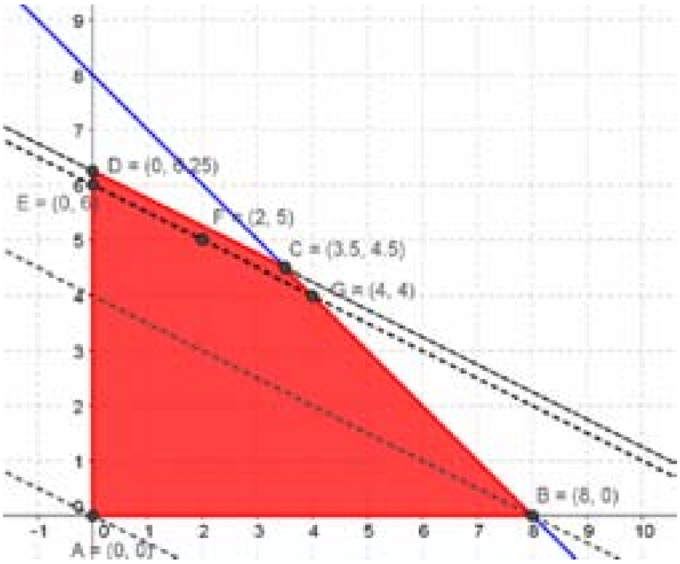
Por C: x + 2y – 12,5 = 0 Por D: x + 2y – 12,5= 0

De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por los vértices C (3,5; 4,5) y D (0; 6,25).

Como los puntos del segmento CD no tiene ambas coordenadas enteras, trazamos la recta de nivel más próxima al segmento CD que pasa por el punto (0, 6), x + 2y – 12 = 0. Los puntos de la región factible que pertenecen a esa recta y tienen las dos coordenadas enteras son los que maximizan el beneficio.

Estos son E (0, 6), F (2,5) y G (4, 4); es decir, hay que elaborar 6 unidades de papel 2, o 2 unidades de papel 1 y 5 unidades de papel 2, o bien 4 unidades de cada tipo de papel.

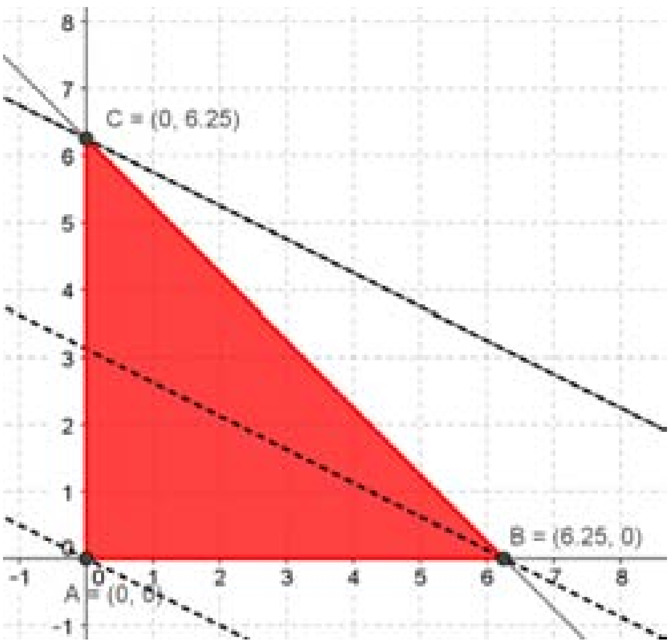
El beneficio máximo en todos los casos es de 1 200 000 unidades monetarias.



b) Ahora las restricciones son:

$$\begin{cases} 4x + 4y \leq 25 \\ 2x + 4y \leq 25 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Procediendo como en el caso anterior se obtiene:



Ahora la solución sería solo el vértice (0, 6,25), pero como no tiene coordenadas enteras es el punto (0, 6). En este caso, para maximizar el beneficio hay que elaborar 6 unidades de papel 2 y ninguna de papel 1.

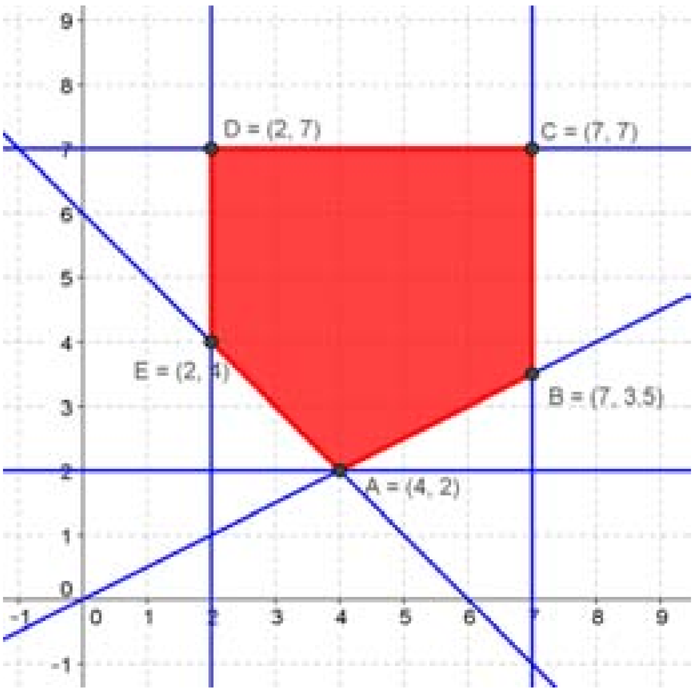
5. Un cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden naranjas a 1000 y 1500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para satisfacer la demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar como máximo al distribuidor A el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determina dicho coste mínimo.

Sea x el número de toneladas de tipo A e y el número de toneladas de tipo B, el programa lineal a resolver es:

Mix z = 1000x + 1500y

$$\text{s. a.} \begin{cases} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x - 2y \le 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

z_A (4, 2) = 1 000 · 4 + 1 500 · 2 = 7 000

z_B (7; 3,5) = 1 000 · 7 + 1 500 · 3,5 = 12 250

z_C (7, 7) = 1 000 · 7 + 1 500 · 7 = 17 500

z_D (2, 7) = 1 000 · 2 + 1 500 · 7 = 12 500

z_E (2, 4) = 1 000 · 2 + 1 500 · 4 = 8 000

Para obtener el mínimo coste, ha de comprar 4 toneladas al distribuidor A y 2 toneladas al distribuidor B. El coste mínimo asciende a 7 000 euros.

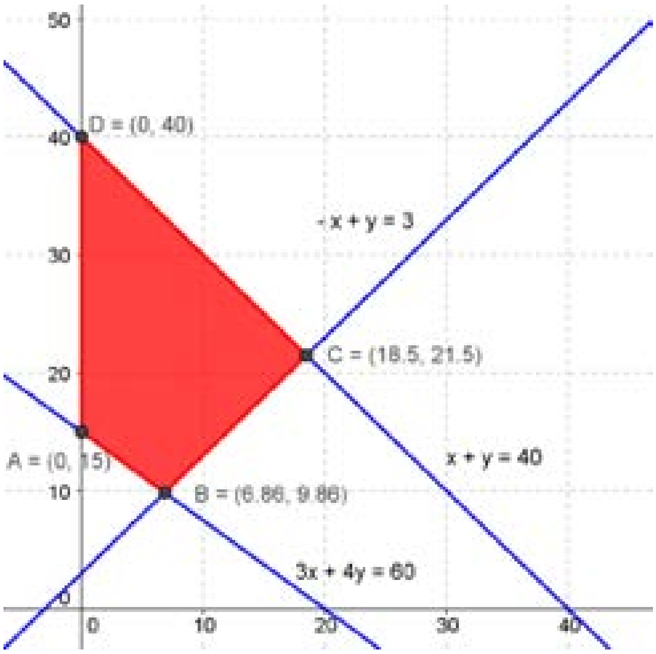
6. Un agricultor estima que el cuidado de cada metro cuadrado cultivado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de coles exige 50. Dispone de un terreno de 40 m^2 de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cultivo de las dos verduras, pero quiere plantar al menos 3 m^2 de más de coles que de lechugas. El metro cuadrado de lechugas le reporta un beneficio de 3 €, mientras que el de coles le proporciona 4 €, planificando obtener al menos un beneficio de 60 €. ¿Cuánta extensión le interesa plantar de cada verdura si su objetivo es que el tiempo dedicado al cuidado de cada cultivo sea mínimo?

Sea x el número de m^2 plantado de lechugas e y el número de m^2 plantado de coles. El programa lineal a resolver es:

Min z = 45x + 50 y

$$\text{s. a.} \begin{cases} x + y \leq 40 \\ y \geq x + 3 \\ 3x + 4y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada del dibujo:



Los vértices de la región factible son los puntos A (0, 15), B (6,86; 9,86), C (18,5; 21,5) y D (0, 40).

Para hallar el mínimo tiempo, sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

z_A (0, 15) = 45 · 0 + 50 · 15 = 750

z_B (6,86; 9,86) = 45 · 6,86 + 50 · 9,86 = 801, 43

z_C (18,5; 21,5) = 45 · 18,5 + 50 · 21,5 = 1907,5

z_D (0, 40) = 45 · 0 + 50 · 40 = 2000

Le interesa plantar 15 m^2 de coles y no plantar lechugas.

7. Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kilogramos, y con 500 euros en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,80 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg. Calcula que podrá vender las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,58 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

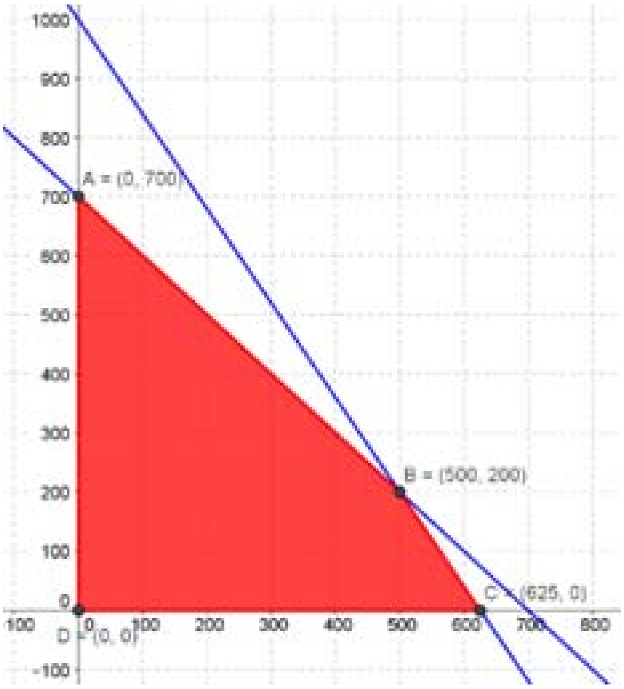
Sean x los kilogramos de manzanas e y los kilogramos de naranjas que compra. La función que queremos maximizar es z (x, y) = 0,10x + 0,08y, puesto que Beneficios = Ingresos – Costes.

El programa lineal a optimizar es:

Max z = 0,10x + 0,08y

$$\text{s. a. } \begin{cases} x + y \leq 700 \\ 0,80x + 0,50y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Los vértices de la región factible son los puntos:

A (0, 700), B (500, 200), C (625, 0) y D (0, 0).

Para obtener el máximo, sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

z_A (0, 700) = 0,10 · 0 + 0,08 · 700 = 56 z_B (500, 200) = 0,10 · 500 + 0,08 · 200 = 66

z_C (625, 0) = 0,10 · 625 + 0,08 · 0 = 62,5 z_D (0, 0) = 0,10 · 0 + 0,08 · 0 = 0

Para obtener el máximo beneficio, 66 euros, le conviene comprar 500 kg de manzanas y 200 kg de naranjas.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 111

Hipatia de Alejandría

Proponemos unas pautas a seguir en la realización de un trabajo sobre Hipatia de Alejandría.

El escenario: Descripción de la época histórica. ¿Cómo era el mundo occidental en la época? La ciudad donde se desarrolla la historia: orígenes, ¿cómo era en los siglos IV y V? ¿Cómo es en la actualidad? Relaciones de la ciudad con el resto del mediterráneo.

Las instituciones: La Biblioteca y el Museo: ¿Qué eran? ¿Qué funciones cumplían? ¿Por qué las destruyen? Las "escuelas": ¿Cómo era la enseñanza en la época? ¿Qué estilos de enseñanza se practicaban?

Las personas y los personajes: Los habitantes de la ciudad: griegos, egipcios y judíos. Las clases sociales, las relaciones entre los habitantes, los cultos, las creencias… El personaje principal: ¿Cómo es? ¿Cómo lo ven los demás? Otros personajes relevantes.

Las relaciones: Estudio de la relación de Hipatia con otros personajes: padres, maestros, alumnos, adversarios, enemigos… Análisis de las diferencias entre los personajes: contrastes, disputas, enfrentamientos… Comentarios sobre las "razones" del comportamiento de los personajes: actitud antes los hechos que ocurren, reacciones…

Hechos concretos: Análisis en profundidad de alguna situación concreta: luchas por el poder, muerte de la protagonista…

El legado de Hipatia: Estudio de la evolución histórica de la situación de la mujer en la sociedad, en la educación, en la ciencia, etc.

En este caso ofrecemos información de fácil acceso.

Referencias bibliográficas:

ALIC, MARGARET (1991): El legado de Hipatia (Historia de las mujeres en la ciencia desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX). Siglo XXI editores. Mexico D. F.

CALVO POYATO, JOSÉ (2009): El sueño de Hipatia. Editorial Plaza y Janés. Barcelona.

DÍAZ, GULLERMO (2009): Hipatia de Alejandría. Editorial Alacena. Málaga.

DZIELSKA, MARÍA (2004): Hipatia de Alejandría. Ediciones Siruela. Madrid.

GÁLVEZ, PEDRO (2004): Hypatia (La mujer que amó la ciencia). Editorial Lumen. Barcelona.

GARCÍA, OLALLA (2009): El jardín de Hipatia. Editorial Espasa Calpe. Madrid.

MATAIX, SUSANA (2003): Matemática es nombre de mujer. Rubes editorial. Barcelona.

Direcciones electrónicas:

[1]http://translate.google.es/translate?hl=es&sl=en&u=http://www.polyamory.org/~howard/Hypatia/&prev=search

[2] https://www.google.es/?gws_rd=ssl#q=Biograf%C3%ADas+de+mujeres+matem%C3%A1ticas

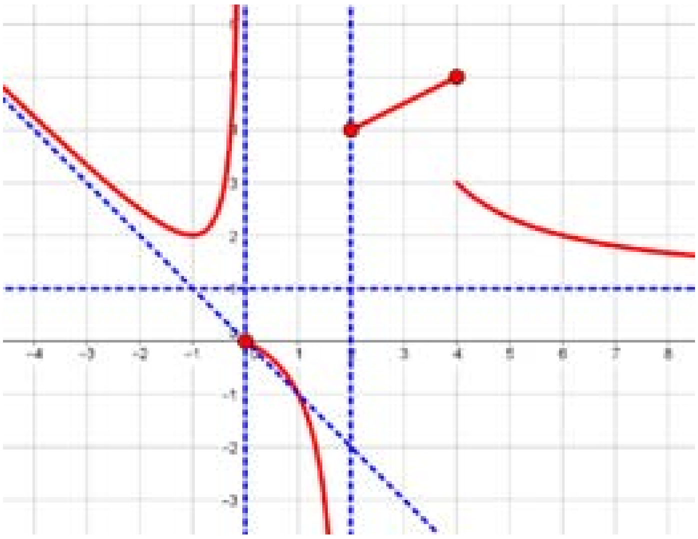
Película de cine:

AMENÁBAR, ALEJANDRO (2009): Ágora.

UNIDAD 5: Límites de funciones. Continuidad

CUESTIONES INICIALES-PÁG.114

1. En la función y = f (x), cuya gráfica aparece en el dibujo, calcula:



- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- **f (0) ; f (2) y f (4)**
- **Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.**

Las respuestas son:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *no existe*
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ *no existe*
- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ no existe.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- f (0) = 0; f (2) = 4 y f (4) = 5

- Las rectas x = 0 y x = 2 son una asíntotas verticales. La recta y = 1 es una asíntota horizontal y la recta y = -x es una asíntota oblicua.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4}$**, halla:**

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

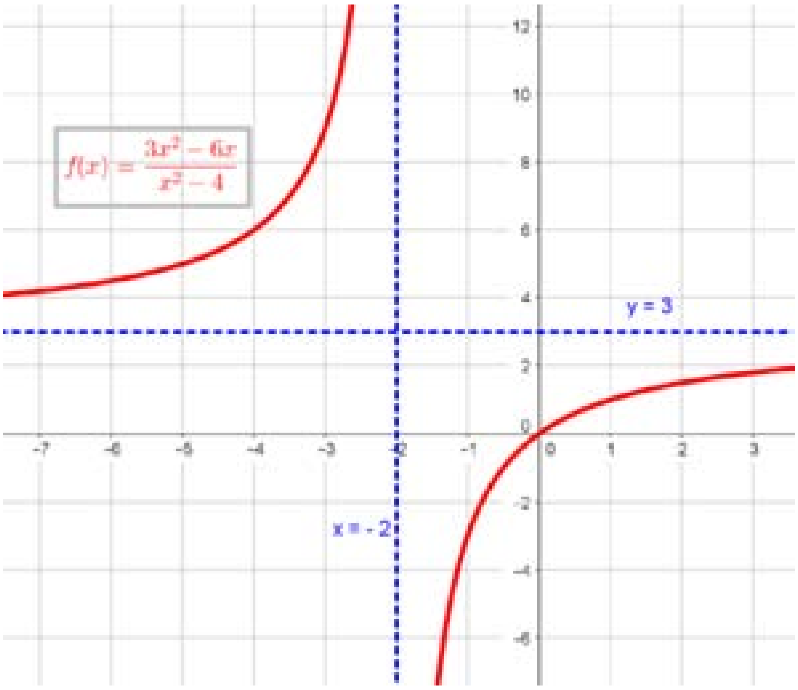
Los límites pedidos son:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \dfrac{0}{-4} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$

Los resultados anteriores pueden verse en la gráfica.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 135

1. Sumas. Demuestra: $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{999 \cdot 1001} = 0,\overline{498501}$.

El término general de la sucesión formada por los sumando es $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Descomponiendo este en fracciones simples, obtenemos: $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1/2}{2n-1} + \dfrac{-1/2}{2n+1}$.

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5}$$

$$\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1/2}{5}+\frac{-1/2}{7}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{1}{997\cdot 999}=\frac{1/2}{997}+\frac{-1/2}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{999}+\frac{-1/2}{1001}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

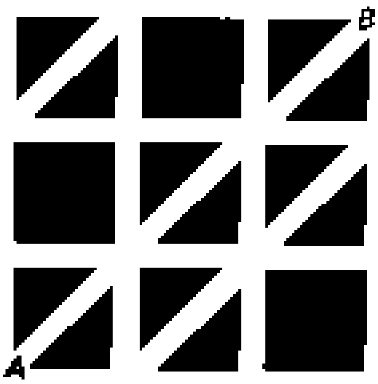
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{1}+\frac{-1/2}{1001}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}=\frac{1000}{2001}=\frac{500}{1001}=0,\overline{498501}.$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el número decimal periódico puro dedo en forma de fracción:

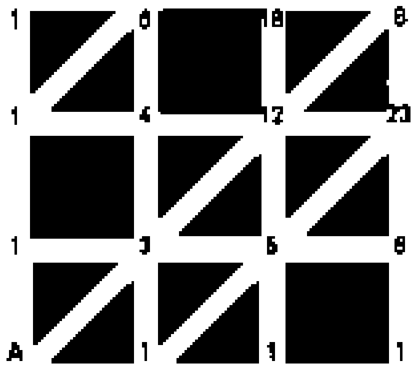
$$0,\overline{498501}.=\frac{499500}{999999}=\frac{500\cdot 27\cdot 37}{1001\cdot 27\cdot 37}=\frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

2. Plano de ciudad. La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?



Queda del siguiente modo:



Solamente consideramos los caminos en vertical hacia arriba que denominamos como V, en diagonal hacia arriba que denotamos con D y en horizontal hacia la derecha que denotamos con H.

En la figura señalamos el número de caminos que hay desde A a cada esquina. Fácilmente se llegan a encontrar esos números sin más que ir trazando caminos. Así en el cruce que hay un 3 se llega a el desde A por tres caminos V-D-H; en el cruce que hay 5 = 3 + 1 + 1, se llega a el por cinco caminos: HHV-HD-DH-VH-HVH.

Observamos que el número que hay en cada cruce es suma de los que de las dos esquinas contiguas si el cuadrado es cerrado y de las tres esquinas si el cuadrado se abierto.

3. Trama triangular. Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.

Procediendo de forma análoga a las del problema de la página anterior, obtenemos:

	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Total
Trama n = 2	1					1
Trama n = 3	3					3
Trama n = 4	6	1				7
Trama n = 5	10	3				13
Trama n = 6	15	6	1			22
Trama n = 7	21	10	3			34
Trama n = 8	28	15	6	1		50

Observamos que aparecen dos sucesiones según sea n par o impar.

● Si n es par, obtenemos la sucesión: 1, 7, 22, 50, 95, 161…

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{n\cdot(n+2)\cdot(2n-1)}{24}$$

● Si n es impar, obtenemos la sucesión: 3, 13, 34, 70, 125…

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(2n-3)}{24}$$

Por tanto, el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia abajo que podemos contar en una trama triangular de n unidades de lado es:

$$\begin{cases} \dfrac{n\cdot(n+2)\cdot(2n-1)}{24} & si\ n\ es\ par \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(2n+3)}{24} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

● En una trama de lado n hay:

I. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28… = $\binom{n}{n-2}$ triángulos de lado 1 con n ≥ 2.

II. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +… = $\binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 2 con n ≥ 4.

III. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +… = $\binom{n-4}{n-6}$ triángulos de lado 3 con n ≥ 6.

Así sucesivamente.

En general es $\binom{n+2-2k}{n-2k}$ con k = 1, 2,…, n; siendo k el número de unidades de lado.

4. Primos. Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

Hemos de demostrar que $p^2 - q^2 = 2\dot{4}$, siendo p y q número primos mayores que 3.

Para demostrarlo, vemos primero que si p es un número primo mayor que 3, entonces $p^2 - 1 = 2\dot{4}$.

Sabemos que $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$. Los números están colocados: p – 1, p (primo) y p + 1.

Como p es primo, p – 1 y p + 1 son múltiplos de 2 y uno de ellos también es múltiplo de 4, pues en tres números consecutivos mayores que 3 con los extremos pares a la fuerza uno de estos extremos es múltiplo de 4.

También (p – 1) o (p + 1) han de ser múltiplos de 3, puesto que son tres números consecutivos.

Por tanto, se cumple que $p^2 - 1 = \dot{2} \cdot \dot{3} \cdot \dot{4} = 2\dot{4}$.

Además como: $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad p^2 - q^2 = 2\dot{4} - 2\dot{4} = 2\dot{4}$.

Por tanto, se cumple que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre múltiplo de 24.

5. Tablero de ajedrez. ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

Partimos del siguiente cuadro:

TIPO DE TABLERO	TIPOS DE RECTÁNGULOS										TOTAL
	1 x 1	1 x 2	1 x 3	1 x 4	2 x 2	2 x 3	2 x 4	3 x 3	3 x 4	4 x 4	
1 x 1	1										1
2 x 2	4	4			1						9
3 x 3	9	12	6		4	4		1			36
4 x 4	16	24	16	8	9	12	6	4	4	1	100
5 x 5	25	40	30	20	16	24	16	9	12	4	225

Observamos la sucesión del número total de rectángulos (incluidos como tales los cuadrados):

1, 9, 36, 100, 225, 441…

1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2…

En un tablero 8x8, que es un tablero de ajedrez, hay 36^2 = 1296 rectángulos.

Si nos quedamos solo con los no cuadrados, habría 1296 – 204 cuadrados = 1092 rectángulos no cuadrados en un tablero 8x8.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 137

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(2x^2-6x+1\right)^{\frac{2}{x^2-6x+9}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x^2}{x+1}-3x\right)$

En la imagen podemos ver el resultado de estos límites hechos con las opciones del menú **Análisis** de Wiris.

$$\lim_{x\to 3^+} (2\cdot x^2-6\cdot x+1)^{\frac{2}{x^2-6\cdot x+9}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{3\cdot x^2}{x+1}-3\cdot x\right) \rightarrow -3$$

2. Halla las asíntotas de la función f(x) = $2x-\dfrac{4}{x-2}$

En la imagen vemos la solución de esta actividad mediante Wiris.

$$f(x) := \left(2\cdot x-\frac{4}{x-2}\right) \rightarrow x \mapsto 2\cdot x-\frac{4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \rightarrow -\infty$$

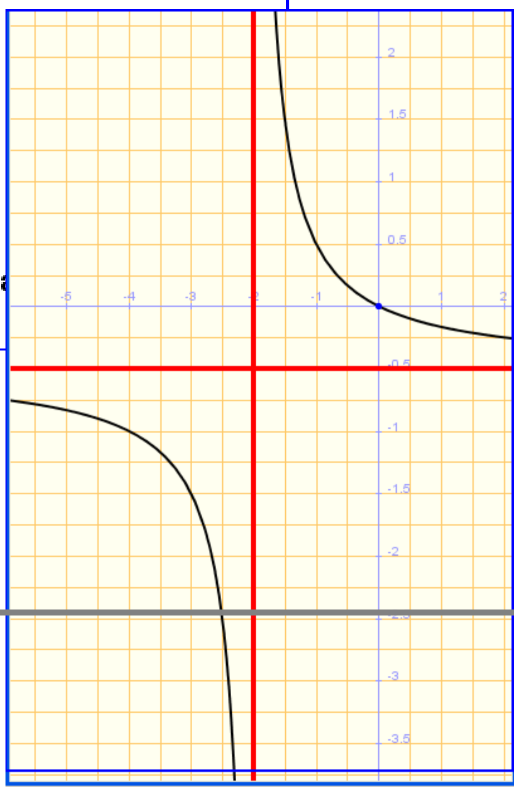
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 2$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} (f(x)-2\cdot x) \rightarrow 0$$

representar(f(x),{asintota={color=rojo,a

→ tablero1



Hemos obtenido las asíntotas de esta función que son las rectas de ecuaciones x = 2 e y = 2x.

En la gráfica podemos ver la función y sus asíntotas.

3. Estudia, de forma analítica y gráfica, la continuidad de las funciones siguientes:

a) f(x) = $\dfrac{x^2-4x}{16+4x-2x^2}$ **b) f(x) =** $\begin{cases} sen\ x & si \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 1-3^x & si \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad 1 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

a) La función f(x) presenta dos discontinuidades en x = 4 y x = - 2. Hallando los límites, como vemos en la imagen, tenemos que en x = 4 presenta una discontinuidad evitable y en x = - 2 una discontinuidad no evitable de primera especie con salto infinito. En la siguiente gráfica podemos ver la discontinuidad en x = - 2.

$f(x) := \dfrac{x^2-4\cdot x}{16+4\cdot x-2\cdot x^2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2-4\cdot x}{16+4\cdot x-2\cdot x^2}$

resolver$(16+4\cdot x-2\cdot x^2=0) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=4\}\}$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) \rightarrow -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \rightarrow +\infty$

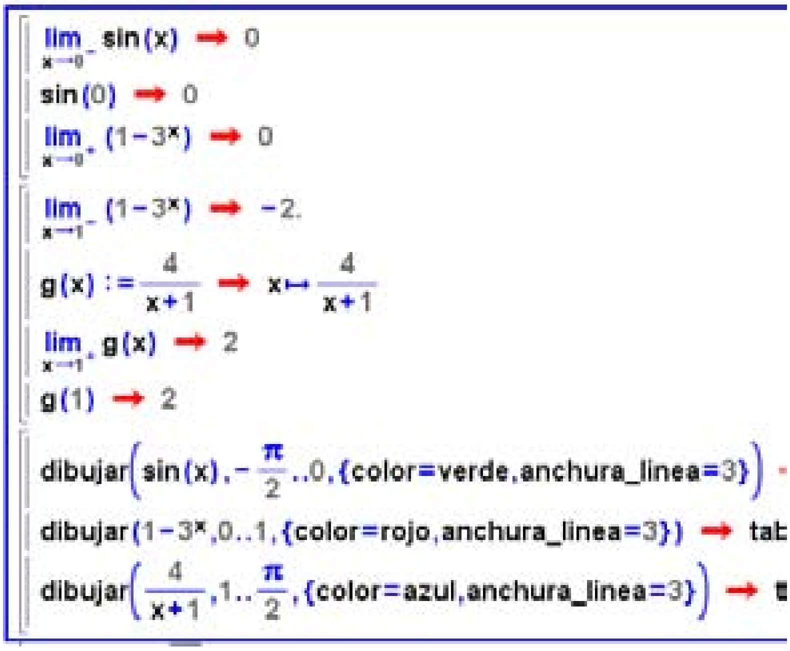
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \rightarrow -\infty$

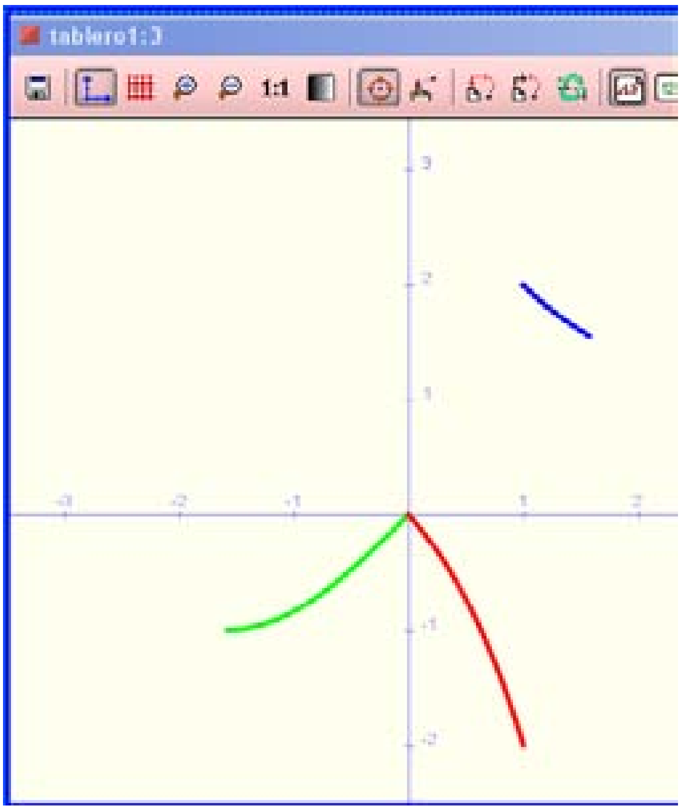
representar
(f(x),{asintota= {color=rojo,anchura_linea=4}})
→ tablero1

b) Para esta función a trozos estudiamos la continuidad en x = 0 y en x = 1.

En la imagen vemos que para x = 0 es continua y no lo es para x = 1. Por tanto, la función es continua en todo su dominio excepto en x = 1.

En la gráfica vemos la continuidad de la función.

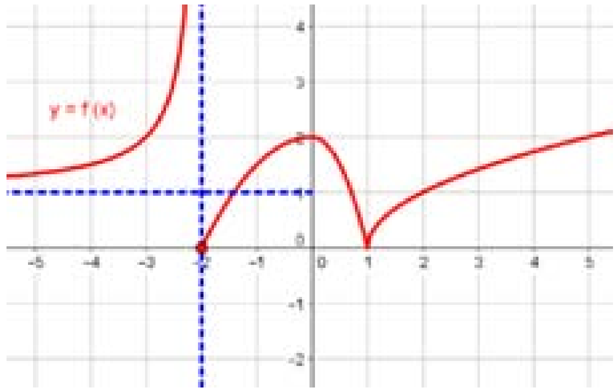




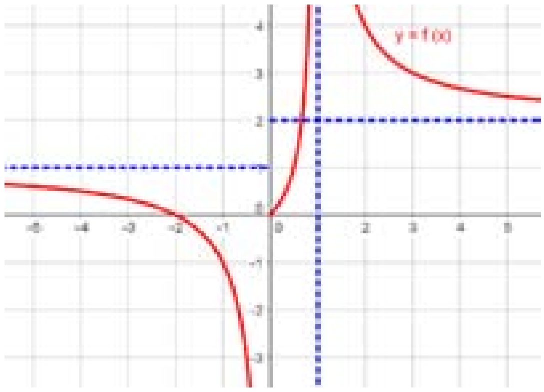
ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 140

1. A partir de las gráficas de las siguientes funciones, halla los valores y los límites pedidos:

I)



II)



a) f (- 2) **d)** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ **j)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **m)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) f (0) **e)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **k)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **n)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) f (1) **f)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **i)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **l)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Los valores y los límites pedidos son:

I)

a) f (- 2) = 0

b) f (0) = 2

c) f (1) = 0

d) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ *no existe*

g) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

j) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$

k) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$

l) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

II)

a) f (- 2) = 0

b) f (0) = 0

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \textit{no existe}$

c) f (1) no existe

d) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0$

e) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

g) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

j) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

k) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

l) $\lim_{x \to 1} f(x) = \text{no existe}$

m) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

n) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

2. Para cada una de las funciones que siguen halla el valor del límite en x = 1. Puedes ayudarte de la representación gráfica de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x \le 1 \\ 2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x \ne 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$ **h)** $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x \ge 1 \end{cases}$

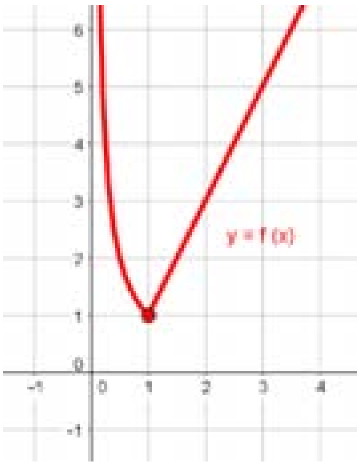
Hallamos los límites laterales en x = 1 para cada una de las funciones.

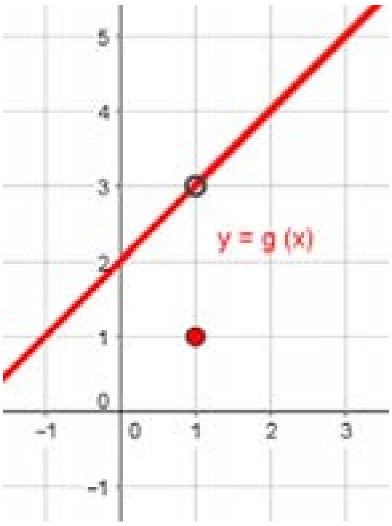
a) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

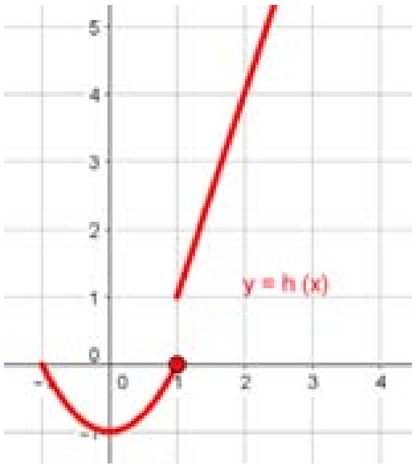
c) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} (3x - 2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} h(x)\ \text{no existe}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 3 \\ \lim_{x \to 1^+} (x + 2) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = 3$

A continuación pueden ver las representaciones gráficas de las funciones alrededor del punto x = 1.







3. Explica el significado de las expresiones que siguen y realiza la

representación gráfica adecuada:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2 + 6x\right) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - 3x\right) = +\infty$

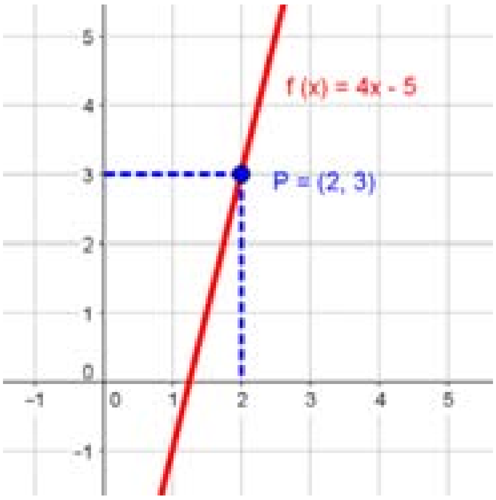
b) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x}{x-4} = 3$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x} = 2$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+4}{x} = +\infty$

A continuación aparece el significado de los límites y las representaciones gráficas pedidas.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$

Podemos conseguir que el valor de la expresión (4x – 5) esté tan próximo a 3 como queramos, dando a x valores suficientemente próximos a 2.

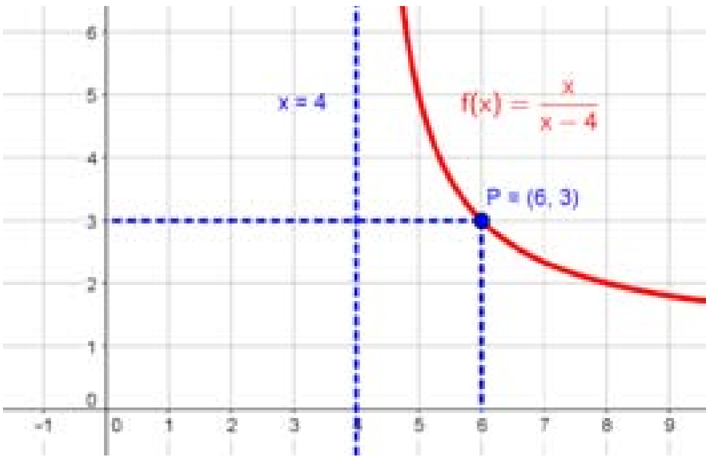
Geométricamente, los valores de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función f (x) = 4x - 5 se aproximan a 3 cuando el valor de las abscisas de dichos puntos se toman próximos a 2.



b) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x}{x-4} = 3$

Podemos conseguir que el valor de la expresión $\dfrac{x}{x-4}$ esté tan próximo a 3 como queramos, dando a x valores suficientemente próximos a 6.

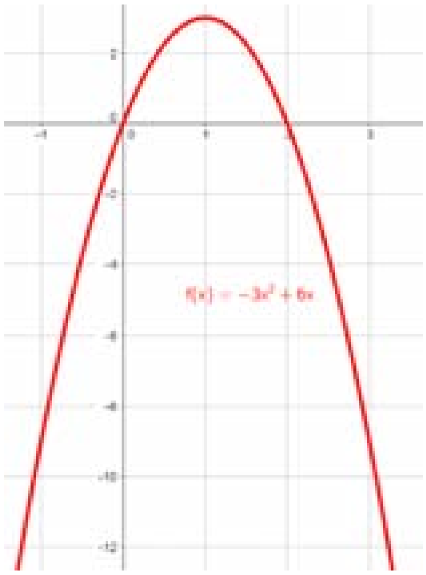
Geométricamente, los valores de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f\,(x) = \dfrac{x}{x-4}$ se aproximan a 3 cuando el valor de las abscisas de dichos puntos se toman próximos a 6.



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2 + 6x\right) = -\infty$

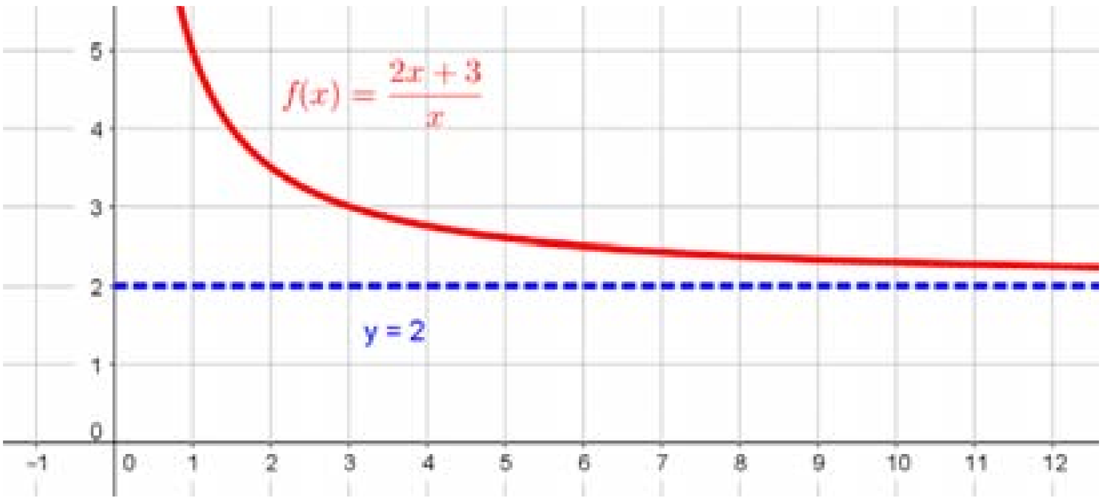
Podemos conseguir que el valor (- $3x^2$ + 6x) sea tan grande como queramos, en valor absoluto, sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + 6x$ tiene una rama parabólica.



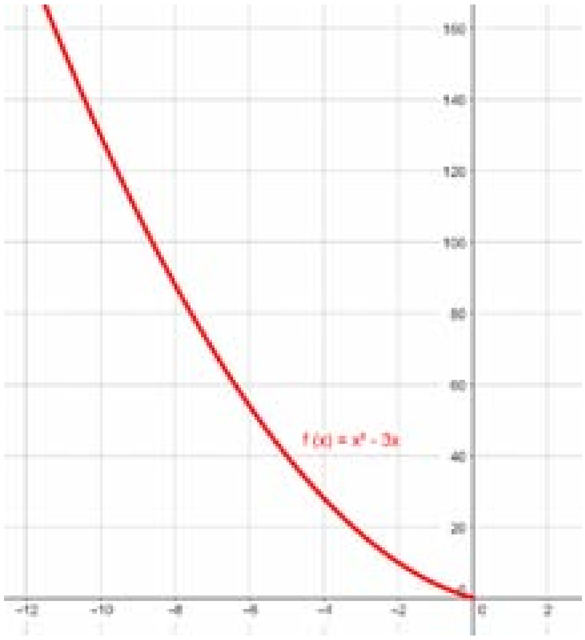
d) Podemos conseguir que el valor de la expresión $\frac{2x+3}{x}$ esté tan próximo a 2 como queramos, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

Geométricamente, los valores de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ se aproximan a 2 cuando el valor de las abscisas de dichos puntos se hacen muy grandes.



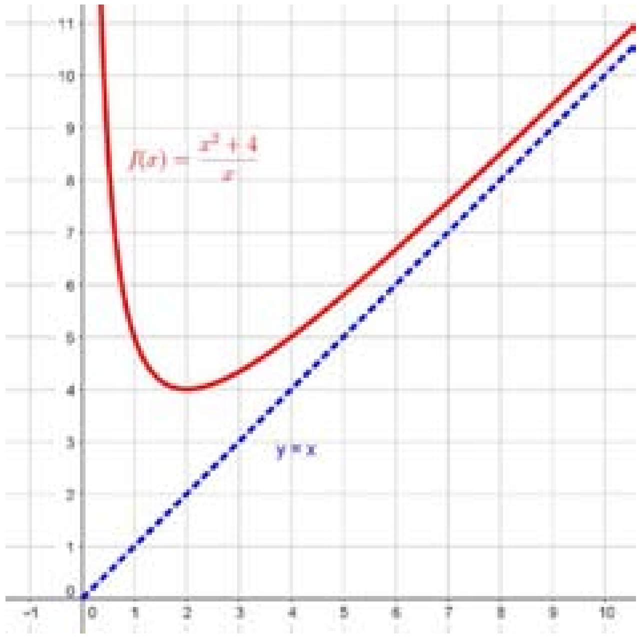
e) Podemos conseguir que el valor (x^2 – 3x) sea tan grande como queramos sin más que tomar x con valores negativos tan grande como sea necesario en valor absoluto.

Geométricamente, la gráfica de la función f (x) = x^2 – 3x tiene una rama parabólica cuando x tiende a menos infinito.



f) Podemos conseguir que el valor $\frac{x^2+4}{x}$ sea tan grande como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

Geométricamente, la gráfica de la función $f\,(x)=\frac{x^2+4}{x}$ tiene asíntota oblicua de ecuación y = x.



■ 4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-3}$　　d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^{-4}}{4}\right)$　　g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3$　　e) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3}{5}\right)$　　h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}\right)$　　f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^3}\right)$　　i) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{-x}$

Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^{-4}}{4}\right) = +\infty$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$ e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{x^3}{5}\right) = 0$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{4}{x^4}\right) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5}{x^3}\right) = 0$ i) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{-x} = +\infty$

5. Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$

a) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ son las rectas de ecuación x = - 2, x = 2 e y = 0.

b) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$ son las rectas de ecuación x = 2 e y = x + 2.

c) La asíntota de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6}$ es la recta de ecuación y = 1.

d) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ son las rectas de ecuación x = 3 e y = x.

6. Las pérdidas o beneficios, acumulados por una empresa a los x años de su fundación, viene dados en millones de euros por la función:

$$G(x) = \frac{10(x - 2)}{x + 4}$$

a) ¿En qué año comenzó la empresa a tener beneficios?

b) ¿Cuáles eran las pérdidas o beneficios de la empresa a los 5, 10 y 15 años de su fundación?

c) Calcula el límite, si existe, de los beneficios de la empresa.

a) Las pérdidas o beneficios de la empresa durante los primeros años fueron:

En el año de la fundación, al ser $G(0) = \dfrac{10(0 - 2)}{0 + 4} = -5$, la empresa perdió 5 millones de euros.

En el primer año, como $G(1) = \dfrac{10(1 - 2)}{1 + 4} = -2$, la empresa perdió 2 millones de euros.

En el segundo año, $G(2) = \dfrac{10(2 - 2)}{2 + 4} = 0$, la empresa no tuvo ni pérdidas ni ganancias.

En el tercer año $G(3) = \dfrac{10(3 - 2)}{3 + 4} = 1{,}43$, la empresa ganó 1,43 millones de euros.

Por tanto, la empresa comenzó a tener beneficios al tercer año de su fundación:

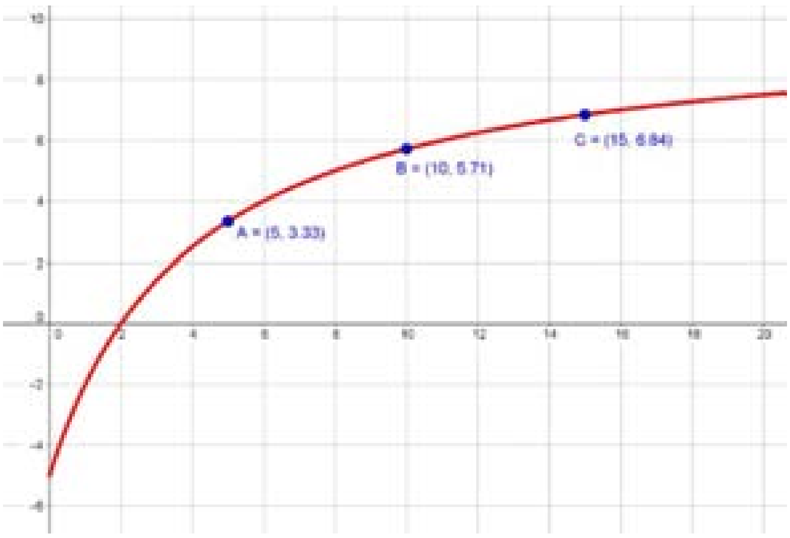
b) Los beneficios de la empresa a los 5, 10 y 15 años de su fundación fueron3,33; 5,71 y 6,84, respectivamente, al cumplirse:

$$G\,(5) = \frac{10(5-2)}{5+4} = 3{,}33 \quad G\,(10) = \frac{10(10-2)}{10+4} = 5{,}71 \qquad G\,(15) = \frac{10(15-2)}{15+4} = 6{,}84$$

c) El límite de los beneficios de la empresa es 10 millones de euros, al cumplirse:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10(x-2)}{x+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{10x}{x} = 10$$

En la gráfica pueden verse alguno de los resultados anteriores.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 141

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 6}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{5x^3 - 6x + 2}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

f) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4}$

g) $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{3 - \sqrt{9 - x}}$

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{x}$

k) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$

l) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 - 1}\right)$

m) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 1}\right)^{5x - 2}$

n) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 2}{x^2 + 2}\right)^{\frac{3}{x - 2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$ **j)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}\right)$ **ñ)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{2/x^3}$

Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{x^3+2x^2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-3x+5}{x^2-6}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-x}{5x^3-6x+2}=\dfrac{2}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}=\dfrac{12}{5}$

f) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}=-\infty$; Por tanto $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}=\textit{no existe}$

g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3-\sqrt{9-x}}=6$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}\right)=0$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\dfrac{1}{2}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2-1}\right)=-\infty$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x-2}=e^{10/3}$

n) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 2} \right)^{\frac{3}{x-2}} = e^4$

ñ) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 4x)^{2/x^3} = +\infty$

8. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 3 & si\ x = 0 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x \leq 1 \\ x^2 - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si\ x \neq -2 \\ -2 & si\ x = -2 \end{cases}$

a) La función $f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 3 & si\ x = 0 \end{cases}$ es continua para cualquier número real, excepto en x = 0, donde pasamos a estudiar su continuidad.

Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a 0:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(3 - \dfrac{-x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3 - \dfrac{x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)\ no\ existe$$

Por tanto, la función es continua en R – {0}.

b) La función $g(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x \leq 1 \\ x^2 - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ es continua para cualquier número real excepto para x = 1, donde pasamos a estudiar su continuidad.

Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a 1:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$$

Como g (1) = 0, la función y = g (x) es continua en para cualquier número real.

c) La función $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si\ x \neq -2 \\ -2 & si\ x = -2 \end{cases}$ es continua para cualquier número real excepto para x = - 2, donde pasamos a estudiar su continuidad.

Hallamos el límite de la función cunado x tiende a – 2:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4$$

Además, h (- 2) = - 2. Por tanto la función y = h (x) en continua en R – {- 2}.

9. Calcula k, en cada caso, de modo que las funciones siguientes sean continuas en todo R.

a) $f(x) = \begin{cases} x + k & si\ x \leq 0 \\ x^2 - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ k & si\ x = 1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) La función y = f (x) es continua el cualquier punto no nulo al ser sus expresiones polinomios.

Estudiamos la continuidad en x = 0. Hallamos los límites laterales en el punto citado y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ &\lim_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k = -1.$$

Como f(0) = k. La función dada es continua en toda la recta real si k = -1.

b) La función y = f (x) es continua el cualquier punto, distinto de x = 1, al ser la expresión racional. Estudiamos la continuidad en x = 1. Hallamos el límite en x = 1 y obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Como f(1) = k. La función dada es continua en toda la recta real si k = 1/2

c) La función y = f (x) es continua el cualquier punto, distinto de x = 1, al ser sus expresiones polinomios y racionales. Estudiamos la continuidad en x = 1. Hallamos los límites laterales en el punto citado y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k \\ &\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ o \\ k = 2 \end{cases}.$$

Como f(1) = 3 - k. La función dada es continua en toda la recta real si k = 1 o k = 2.

10. Determina, en cada caso, los valores de los parámetros m y n para los cuales las funciones siguientes sean continuas en todo su dominio.

a) $f(x) = \begin{cases} mx + 6 & si\ x \leq -1 \\ nx^2 - 2x + 1 & si\ -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x - 5}{(x - 1)^2} & si\ x > 2 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} e^{mx} & si\ x < 0 \\ x + 2m & si\ 0 \leq x < 2 \\ -x + n & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a – 1 y cuando x tiende a 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(mx+6\right)=-m+6\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(nx^2-2x+1\right)=n+3\end{array}\right\}\Rightarrow\ -m+6=n+3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(nx^2-2x+1\right)=4n-3\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-5}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 4n-3=-\dfrac{1}{3}$$

Resolviendo el sistema en las incógnitas m y n obtenemos:

$$\begin{cases}-m+6=n+3\\ 4n-3=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{7}{3}\\ n=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

b) Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{mx}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+2m\right)=2m\end{array}\right\}\Rightarrow\ 1=2m$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+2m\right)=2+2m\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(-x+n)=-2+n\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2+2m=-2+n$$

Resolviendo el sistema en las incógnitas m y n obtenemos:

$$\begin{cases}1=2m\\ 2+2m=-2+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\ n=5\end{cases}$$

11. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ **b)** $g(x)=\begin{cases}3-x^2 & si\ x\le 0\\ e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$ **c)** $h(x)=\begin{cases}|x-2| & si\ x\le 0\\ x^2-2x & si\ x>0\end{cases}$

a) La función $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ es:

● Discontinua no evitable en x = 0 con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=-\infty \ \text{ y } \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=+\infty$$

● Discontinua evitable en x = 3 con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2$$

Redefinimos la función y = f (x) para que sea continua en x = 3, en la forma: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & si\ x\neq 3\\ 2 & si\ x=3\end{cases}$

b) La función $g(x)=\begin{cases}3-x^2 & si\ x\leq 0\\ e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$ tiene, en x = 0, una discontinuidad no evitable con salto finito, al ser:

$$\lim_{x\to 0^-}(3-x^2)=3 \text{ y } \lim_{x\to 0^+}e^{-x}=1$$

c) La función $h(x)=\begin{cases}|x-2| & si\ x\leq 0\\ x^2-2x & si\ x>0\end{cases}$ tiene, en x = 0, una discontinuidad no evitable con salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x\to 0^-}|x-2|=2 \text{ y } \lim_{x\to 0^+}(x^2-2x)=0$$

12. Los gastos de mantenimiento de la maquinaria de una determinada empresa, G (x) (en miles de euros), vienen dados en función del tiempo, x, en meses, que dicha maquinaria lleva en funcionamiento. La expresión de G (x) es:

$$G(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x}{15}+3 & si\ 0\leq x\leq 15\\ \dfrac{60x-60}{x+15} & si\ x>15\end{cases}$$

En la citada empresa, ¿es continuo el gasto de mantenimiento de la maquinaría? ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo?

Veamos si el gasto de mantenimiento es una función continua del tiempo. Para ello calculamos los límites laterales en t = 15, ya que en el resto de valores del dominio de definición las funciones son continuas.

$$\lim_{t\to 15^-}G(x)=\lim_{t\to 15^-}\left(-\frac{2x}{15}+3\right)=1 \qquad \lim_{t\to 15^+}G(x)=\lim_{t\to 15^+}\left(\frac{60x-60}{x+15}\right)=28$$

Observamos que la función no es continua para x = 15.

Veamos qué a medida que pasa el tiempo el gasto de mantenimiento de la maquinaria tiende a 60 000 euros, al cumplirse:

$$\lim_{t\to +\infty}G(x)=\lim_{t\to +\infty}\frac{60x-60}{x+15}=\lim_{x\to +\infty}\frac{60x}{x}=60$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 142

1. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2x^2+4}{x^2-1}-\dfrac{3}{x-1}\right]$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{4x^2+6x}-2x\right]$

Los límites pedidos son:

a) Es una indeterminación del tipo 0/0. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del numerador, simplificamos la expresión resultante y hallamos el límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{3 \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{3 \cdot (1+1)} = \frac{1}{3}$$

b) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Operamos la expresión y el límite pasa a ser una indeterminación del tipo 0/0. Simplificamos la expresión resultante y hallamos el límite.

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{2x^2 + 4}{x^2 - 1} - \frac{3}{x-1} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

c) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada. Operamos la expresión resultante y hallamos el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x\right] \cdot \left[\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x\right]}{\left[\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x\right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\sqrt{4 + \frac{6}{x}} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2. El siguiente límite es una indeterminación del tipo 0/0:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 - bx + 2}.$$

Calcula los valores de a y b y, posteriormente, encuentra el valor del límite.

Si la indeterminación se del tipo 0/0 se cumplirá:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 - bx + 2} = \frac{4 + 4 + a}{4 - 2b + 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} a + 8 = 0 \\ -2b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 3 \end{cases}$$

Para los valores anteriores, el límite vale:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x-1} = 6$$

3. Dada la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & si\ x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ 0 < x < 3 \\ e^{x-3} & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

¿Qué tipo de discontinuidades presenta? ¿Tiene asíntotas horizontales?

3. Las discontinuidades que presenta la función son

- En x = 0 tiene una discontinuidad de primera especie con salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} (2x + 4) = 4 \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

- En x = 2 tiene una discontinuidad de primera especie con salto infinito, al ser:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

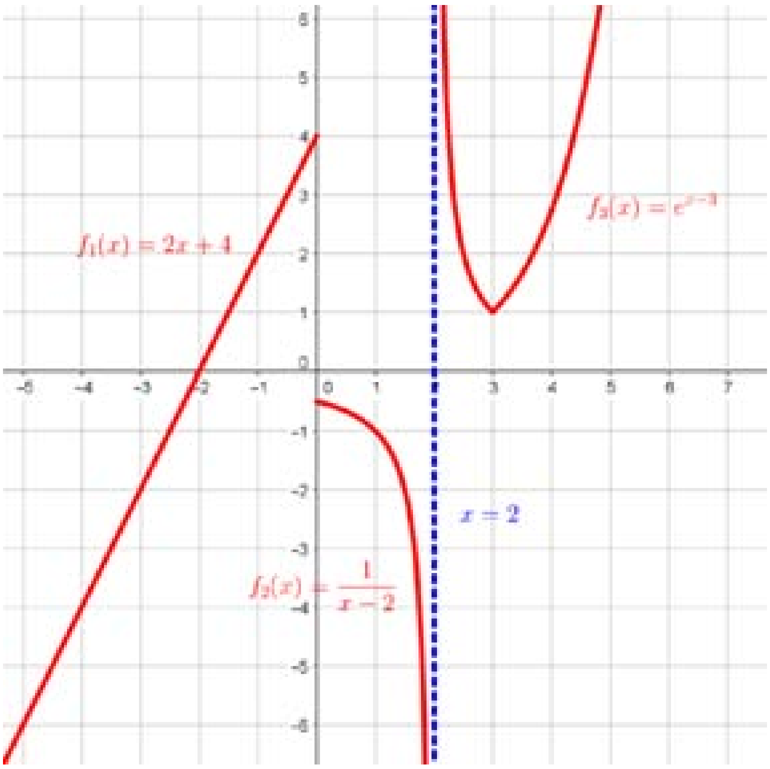
- En x = 3 la función es continua, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-2} = 1;\ \lim_{x \to 3^+} e^{x-3} = 1 \text{ y } f(3) = e^0 = 1$$

La función no tiene asíntotas horizontales ya que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x + 4) = -\infty \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x-3} = +\infty$$



En la gráfica puede verse todo lo anterior.

4. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $f(t) = \dfrac{18 + t^2}{(t+3)^2}$ **donde t es el tiempo medido en años desde t = 0. Calcula el tamaño de la población a largo plazo.**

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{18 + t^2}{(t+3)^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 18}{t^2 + 6t + 9} = 1$$

La población a largo plazo será de un millón de individuos.

5. En cierto país se está produciendo un descenso acusado del índice de natalidad, y se estima que la población en edad escolar (en millones de personas) viene dada en función del año por:

$$P(x) = 0{,}5 + \frac{5}{x - 2015}$$

Calcula la población escolar que habrá en los años 2025, 2030 y 2050. Halla la tendencia futura de la población escolar a largo plazo.

La población escolar en los años indicados será:

$$P(2025) = 0{,}5 + \frac{5}{2025 - 2015} = 0{,}5 + \frac{5}{10} = 1 \text{ millón de personas}$$

$$P(2030) = 0{,}5 + \frac{5}{2030 - 2015} = 0{,}5 + \frac{5}{15} \approx 0{,}83 \text{ millones de personas}$$

$$P(2050) = 0{,}5 + \frac{5}{2050 - 2015} = 0{,}5 + \frac{5}{35} \approx 0{,}64 \text{ millones de personas}$$

Sí x se hace muy grande, el cociente se hará tan pequeño como se quiera (tenderá a cero), por lo que la tendencia de la población a largo plazo será:

$$\lim_{t \to +\infty} P(x) = \lim_{t \to +\infty} \left(0{,}5 + \frac{5}{x - 2015} \right) = 0{,}5 \text{ millones de personas}$$

6. Calcula el valor de k (k ≠ 0) para que se verifiquen:

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3kx^3 - 2kx^2 + kx - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x^2 + kx} - \sqrt{2x^2 - 1} \right] = 1$

a) Siendo k ≠ 0, el límite pedido es una indeterminación del tipo ∞ / ∞, y para que dicho límite valga 1, los coeficientes de x^3 en el numerador y en el denominador deben coincidir.

Por tanto, 3k = - 6, es decir, k = - 2.

Podemos comprobar que para k = - 2 el límite vale:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3kx^3 - 2kx^2 + kx - 1}{x^2 - 6x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-6x^3 + 4x^2 - 2x - 1}{-6x^3 + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-6x^3}{-6x^3} = 1$$

b) El límite es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada y operamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x^2 + kx} - \sqrt{2x^2 - 1}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{2x^2 + kx} - \sqrt{2x^2 - 1}\right] \cdot \left[\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}\right]}{\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + 1}{\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}}$$

El límite anterior es una indeterminación del tipo ∞ / ∞. Dividimos numerador y denominador por x y calculamos el límite resultante.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx + 1}{\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{k}{x}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{k}{2\sqrt{2}}$$

Para que la última expresión sea 1, entonces $k = 2\sqrt{2}$.

7. La profundidad de la capa de arena de una playa se verá afectada por la construcción de un paseo marítimo. En una zona de la playa, esa profundidad, P, en metros, vendrá dada por la siguiente función, siendo t el tiempo en años desde el inicio de la construcción:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 + 2 & si\ 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & si\ t > 1 \end{cases}$$

a) Es la profundidad una función continua del tiempo.

b) Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo, ¿será necesario elevar la altura del paseo?

7. a) Veamos si la profundidad es una función continua del tiempo. Para ello calculamos los límites laterales en t = 1, ya que en el resto de puntos del dominio de definición las funciones son continuas.

$$\lim_{t \to 1^-} P(t) = \lim_{t \to 1^-} (t^2 + 2) = 3 \qquad \lim_{t \to 1^+} P(t) = \lim_{t \to 1^+} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \frac{6}{2} = 3$$

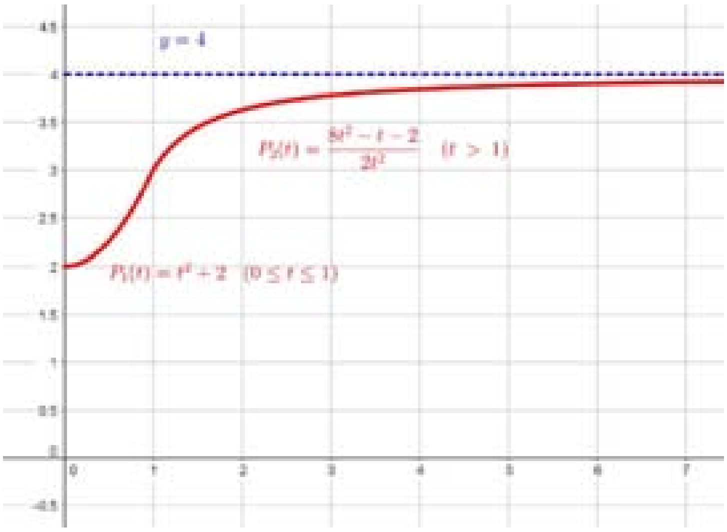
Como los límites laterales son iguales, la profundidad es una función continua del tiempo.

b) Calculamos el límite de la función P (t) cuando t tiende a más infinito.

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{8t^2}{2t^2} = 4$$

No será necesario elevar la altura del paseo ya que la profundidad no superará los 4 metros.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



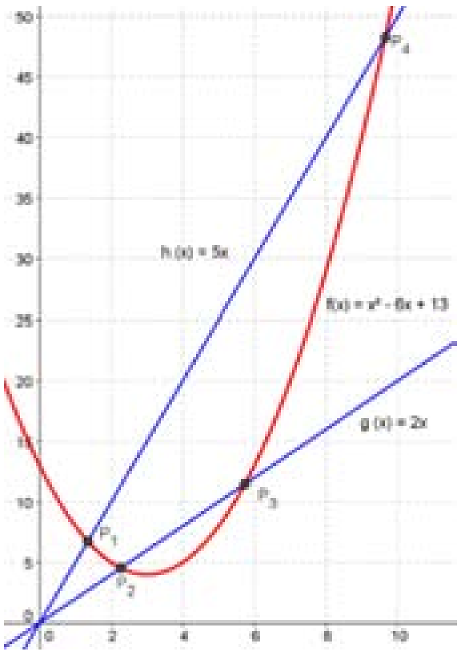
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 143

Parábolas y rectas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen cuando se estudia la intersección de funciones polinómicas con funciones lineales.

1. Consideramos las funciones cuadráticas de expresión $y = (x - p)^2 + q$ cuyas gráficas son parábolas de vértice V (p, q) y las funciones lineales $y = mx$ e $y = nx$.

a) Sea la parábola $y = (x - 3)^2 + 4$ y las rectas $y = 2x$ e $y = 5x$.



Utilizando medios tecnológicos, hallamos las cuatro intersecciones P_1, P_2, P_3, P_4, que pueden verse en el dibujo.

Llamamos x_1, x_2, x_3 y x_4 a las abscisas de estas intersecciones en el orden en el que aparecen, de izquierda a derecha, sobre el eje OX.

Calculamos los valores de las expresiones:

$$D_1 = x_2 - x_1; \quad D_2 = x_4 - x_3 \quad \text{y} \quad V = |D_1 - D_2|.$$

b) Considera otras parábolas de la forma $y = k(x - p)^2 + q$, con $k > 0$, que tengan el vértice en el primer cuadrante, cuando se cortan con las rectas $y = 2x$ e $y = 5x$. Comienza estudiando los casos en los que $k = 1$.

c) Investiga lo que sucede para cualquier valor de k y para cualquier posición del vértice. Si cambiamos las rectas, ¿qué resultados obtenemos?

d) ¿Encontraremos resultados similares para funciones polinómicas de grado tres? ¿Y para funciones polinómicas de grado superior?

1. a) Las intersecciones son los puntos de la parábola y = $(x - 3)^2 + 4$ con las rectas y = 2x e y = 5x, son los puntos:

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 13 = 0 \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 9{,}65; \; y_4 = 48{,}27 \quad (P_4) \\ x_1 = 1{,}35; \; y_1 = 6{,}73 \quad (P_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 13 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5{,}73; \; y_4 = 11{,}46 \quad (P_3) \\ x_2 = 2{,}27; \; y_1 = 4{,}54 \quad (P_2) \end{cases}$$

Los valores pedidos son:

$D_1 = 2{,}27 - 1{,}35 = 0{,}92$; $D_2 = 9{,}65 - 5{,}73 = 3{,}92$ y $V = |0{,}92 - 3{,}92| = 3$.

En las imágenes que siguen pueden verse las cuatro intersecciones:

P_1 (1,35; 6,73); P_2 (2,27; 4,54); P_3 (5,73; 11,46) y P_4 (9,65; 48,27)

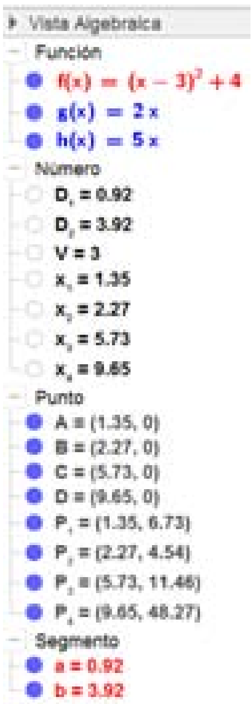
Además aparecen dibujados los puntos A (1,35; 0); B (2,27; 0); C (5,73; 0) y D (9,65; 0) sobre el eje OX, que tienen las mismas abscisas que los puntos intersección

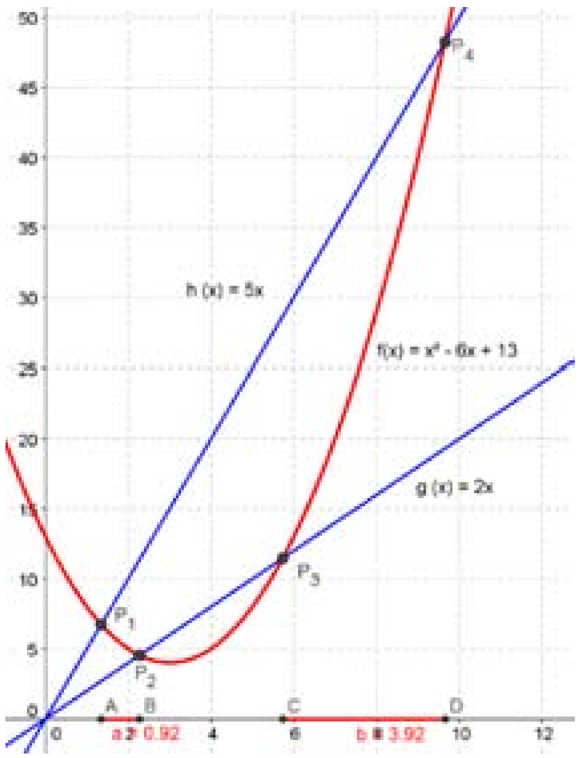
En el recuadro de la Vista Algebraica aparecen calculadas las expresiones:

$D_1 = x_2 - x_1 = 0{,}92$; $D_2 = x_4 - x_3 = 3{,}92$ y $V = |D_1 - D_2| = |0{,}92 - 3{,}92| = 3$.

También pueden verse, sobre el eje OX, los segmentos a = AB y b = CD, de medidas 0,92 y 3,92 respectivamente.

El valor V = 3 es el valor absoluto de la diferencia de las pendientes de la rectas y = 5x e y = 2x.

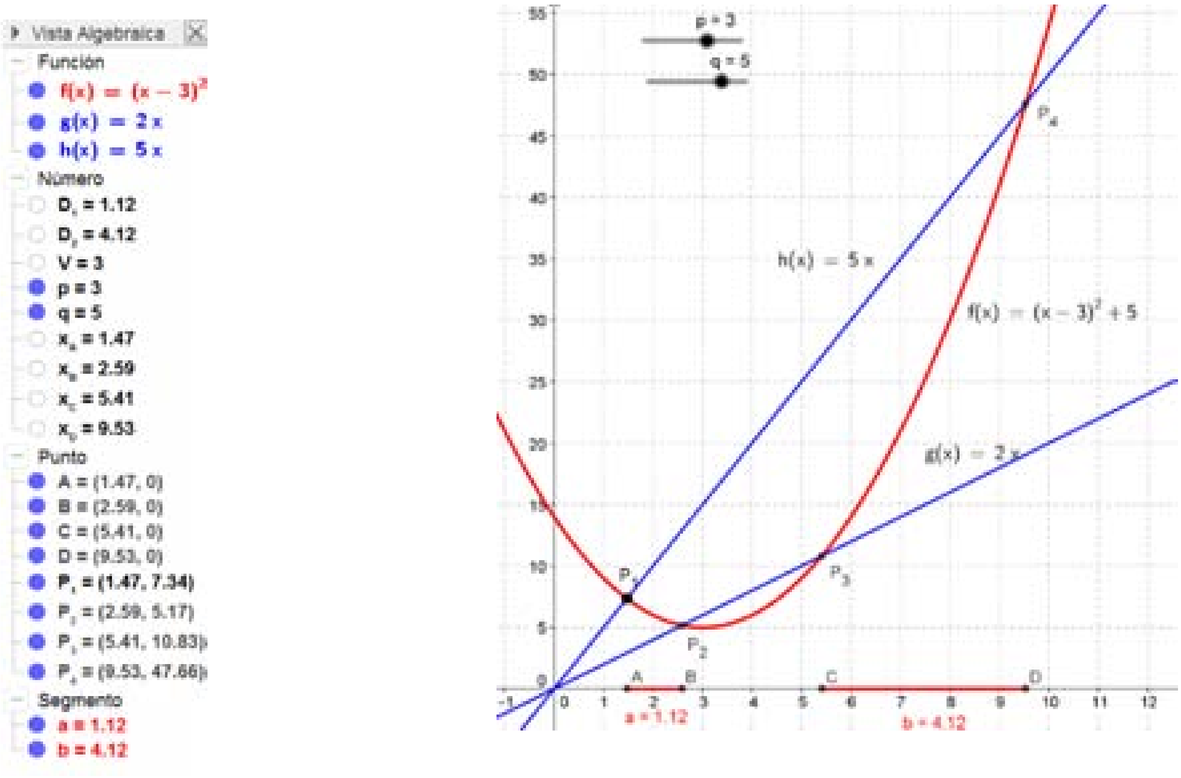


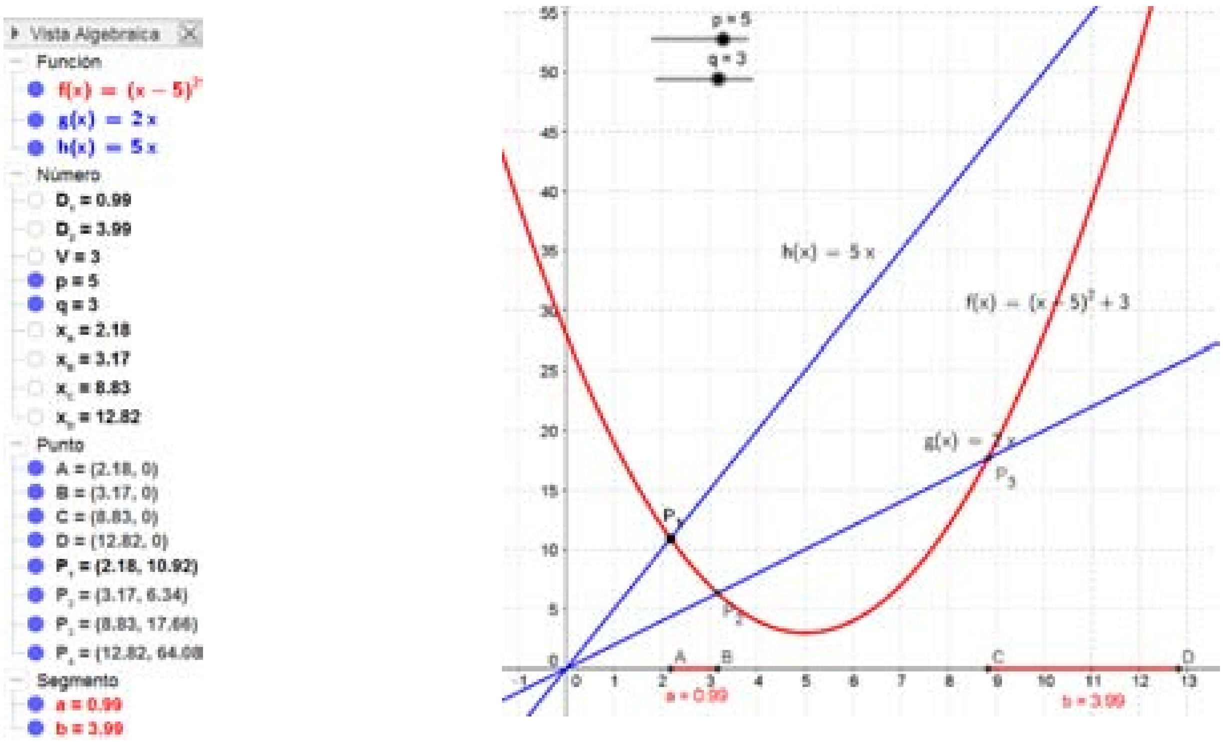


b) Analizamos las situaciones para parábolas de la expresión y = $(x - p)^2 + q$, con p y q positivos y las rectas y = 2x e y = 5x.

Trabajando en el programa GeoGebra, creamos dos deslizadores denominados p y q. Introducimos la función f (x) = (x – p)^2 + q y observamos que al variar los valores de p y q, es decir, la posición del vértice de la parábola, el valor de V se mantiene fijo en 3.

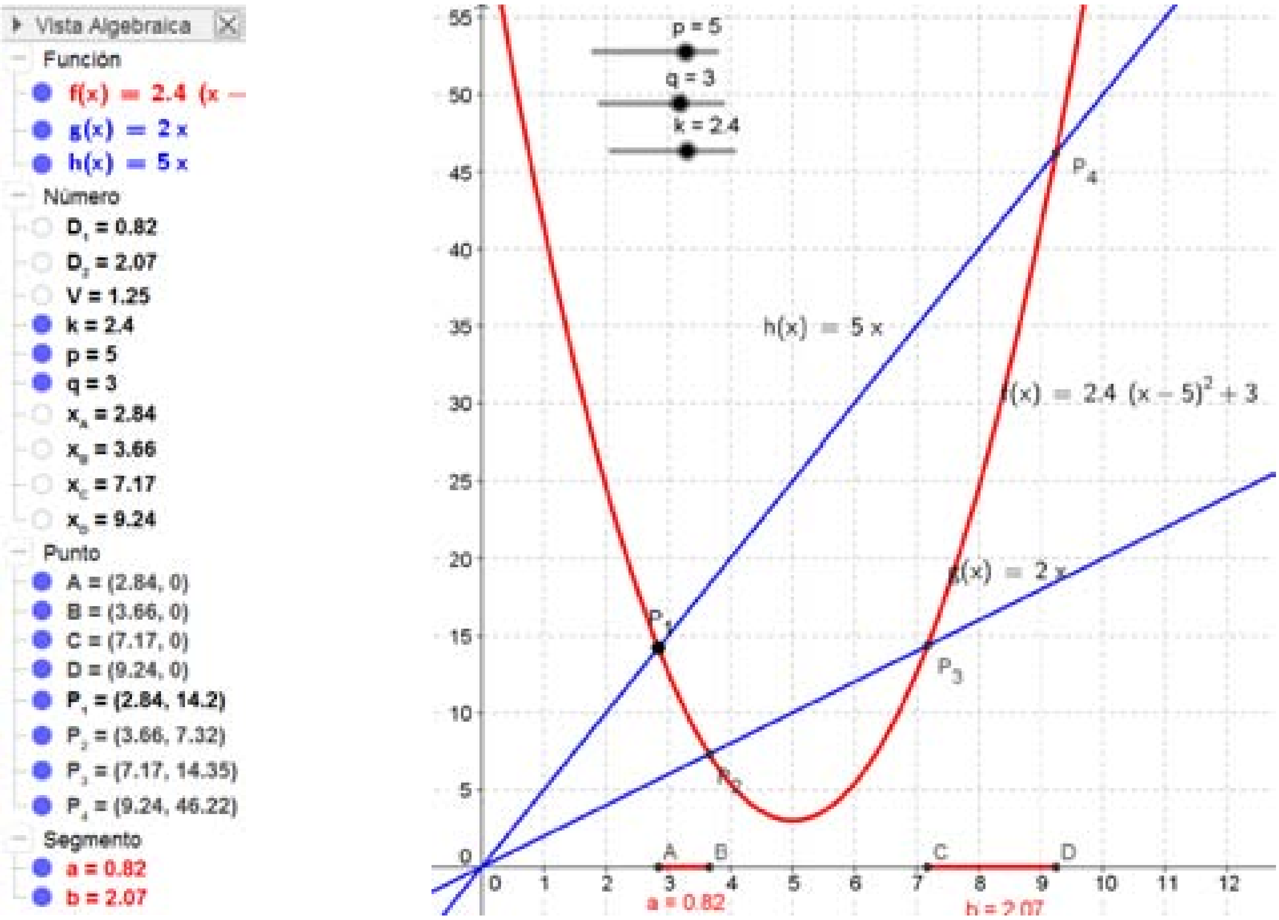
En las imágenes pueden verse los casos de los vértices V (3, 5) y V (5, 3)





c) Introducimos un nuevo deslizador k y lo hacemos variar, observando los resultados.

En la imagen puede verse el valor V = 1,25 que es el resultado de operar $V = \left|\frac{m-n}{k}\right| = \left|\frac{5-2}{2,4}\right| = 1,25$.



Obtenemos otros valores de V haciendo cambios en los tres deslizadores.

Para cambiar las rectas, creamos dos nuevos deslizadores llamados m y n e introducimos las funciones g (x) = mx y h (x) = nx. También podemos analizar las intersecciones de rectas que no pasan por el origen, es decir, funciones de la forma g (x) = mx + m_1 y h (x) = nx + n_1.

Variamos todos los deslizadores y observamos que, en las situaciones que haya intersecciones, el valor buscado es $V = \left|\frac{m-n}{k}\right|$.

El hecho de obtener el valor anterior lo podemos encontrar en el razonamiento que sigue.

Sean y = ax^2 + bx + x, con a ≠ 0, y = mx + m_1 e y = nx + n_1 las ecuaciones de una parábola y dos rectas que se cortan en cuatro puntos.

Hallamos las abscisas de esos cuatro puntos:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + m_1 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + m_1 \Rightarrow ax^2 + (b-m)x + (c - m_1) = 0$$

Si llamamos x_1 y x_4 a las soluciones de la ecuación anterior, una de las relaciones de Cardano puede expresarse en la forma:

$$x_1 + x_4 = -\frac{b-m}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = nx + n_1 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = nx + n_1 \Rightarrow ax^2 + (b-n)x + (c - n_1) = 0$$

Si llamamos x_2 y x_3 a las soluciones de la ecuación anterior, una de las relaciones de Cardano puede expresarse en la forma:

$$x_2 + x_3 = -\frac{b-n}{a}$$

El valor buscado V será:

$$V = \left|(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)\right| = \left|(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)\right| = \left|-\frac{b-n}{a} - \left(-\frac{b-m}{a}\right)\right| = \left|\frac{n-m}{a}\right|$$

El valor anterior depende de las pendientes de las rectas, m y n, y del coeficiente a del término x^2 de la parábola.

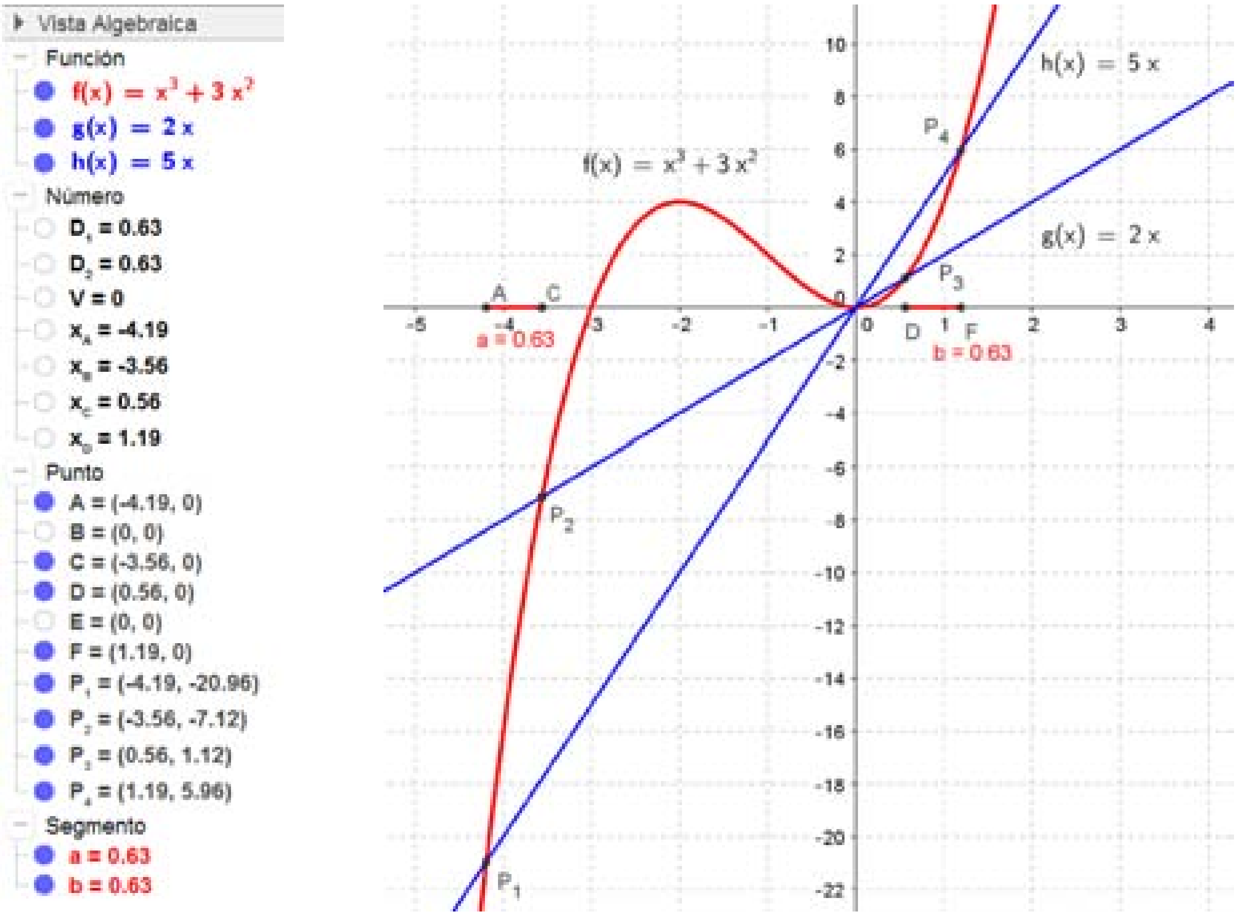
d) Veamos qué ocurre cuando cortamos la curva cúbica de ecuación f (x) = $x^3 + 3x^2$ con las rectas g (x) = 2x y h (x) = 5x.

En las imágenes que siguen pueden verse las intersecciones denominadas P_1, P_2, P_3 y P_4, además del origen de coordenadas y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

Pueden verse los puntos proyección de los puntos anteriores sobre el eje OX: A, C, D y F, con sus coordenadas en la Vista Algebraica.

Hallamos las diferencias:

$D_1 = x_C - x_A = 0,63$ $D_2 = x_F - x_D = 0,63$ $V = |D_1 - D_2| = |0,63 - 0,63| = 0$



Veamos qué ocurre cuando cortamos la curva cúbica de ecuación $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ con las rectas $g(x) = 2x$ y $h(x) = 5x$.

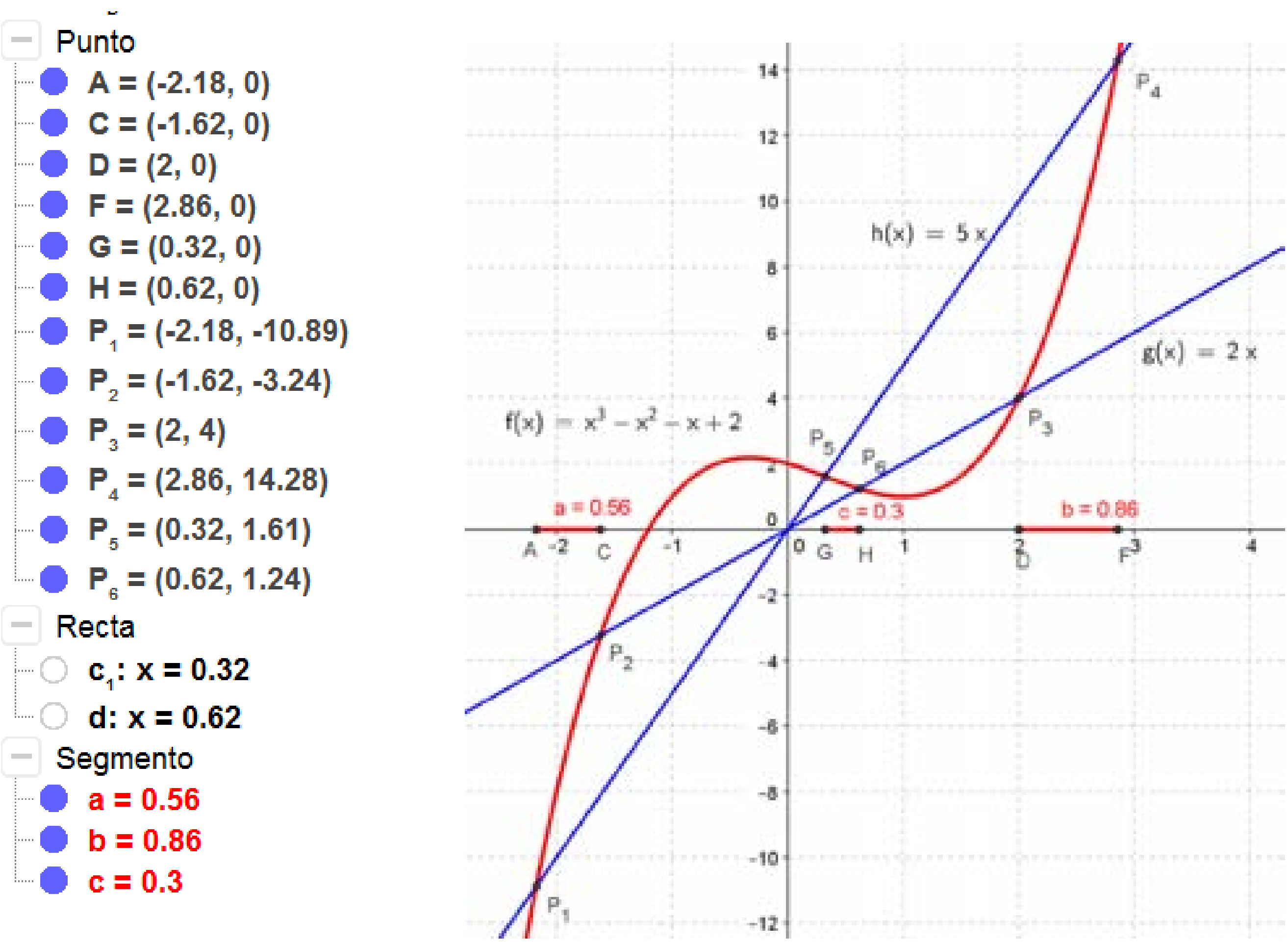
En las imágenes que siguen pueden verse las intersecciones denominadas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6, y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

Pueden verse los puntos proyección de los puntos anteriores sobre el eje OX: A, C, D, F, G y H, con sus coordenadas en la Vista Algebraica.

Hallamos las diferencias:

$$D_1 = x_B - x_C = 0{,}56 \quad D_2 = x_D - x_C = 0{,}86 \quad D_3 = x_H - x_G = 0{,}3$$

$$V = |D_1 - D_2 + D_3| = |0{,}56 - 0{,}86 + 0{,}3| = 0$$



El hecho de obtener el valor anterior, V = 0, lo podemos encontrar en el razonamiento que sigue.

Sean $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, $y = mx + m_1$ e $y = nx + n_1$ las ecuaciones de una cúbica y dos rectas que se cortan en seis.

Hallamos las abscisas de esos seis puntos:

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = mx + m_1 \end{cases} \Rightarrow \ ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + m_1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - m_1) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{cases}$$

Las soluciones x_1, x_3 y x_6 cumplen una de las relaciones de Cardano que puede expresarse en la forma:

$$x_1 + x_3 + x_6 = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = nx + n_1 \end{cases} \Rightarrow \ ax^3 + bx^2 + cx + d = nx + n_1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + (c-n)x + (d-n_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases}$$

Las soluciones x_2, x_4 y x_5 cumplen una de las relaciones de Cardano que puede expresarse en la forma:

$$x_2 + x_4 + x_5 = -\frac{b}{a}$$

El valor buscado V será:

$$V = \left| (x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) - (x_6 - x_5) \right| = \left| (x_2 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_3 + x_6) \right| =$$

$$= \left| -\frac{b}{a} - \left(-\frac{b}{a} \right) \right| = \left| \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \right| = 0$$

El valor anterior siempre es nulo.

Los mismo ocurre para funciones polinómicas de grado superior.

UNIDAD 6: Derivadas

CUESTIONES INICIALES-PÁG.144

1. Calcula la tasa de variación media en los intervalos [0, 3] y [3, 6] para cada una de las siguientes funciones:
a) f (x) = 2x **b) g (x) = x²** **c) h (x) = 2ˣ**

Las tasas de variación media son las que aparecen en la tabla.

Funciones	[0, 3]	[3, 6]
f (x) = 2x	2	2
g (x) = x^2	3	9
h (x) = 2^x	2,33	18,67

2. Dada la función $f\ (x) = \sqrt{2x-3}$ **, calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h}$$

El límite buscado es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-3} - \sqrt{2x-3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2\ (x+h)-3} - \sqrt{2x-3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2\ (x+h)-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2\ (x+h)-3} + \sqrt{2x-3}} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\cdot\left(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3}\right)} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

3. Dada la función $f\ (x) = |3x-6|$**, calcula:**

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h}$$

Los límites laterales pedidos son:

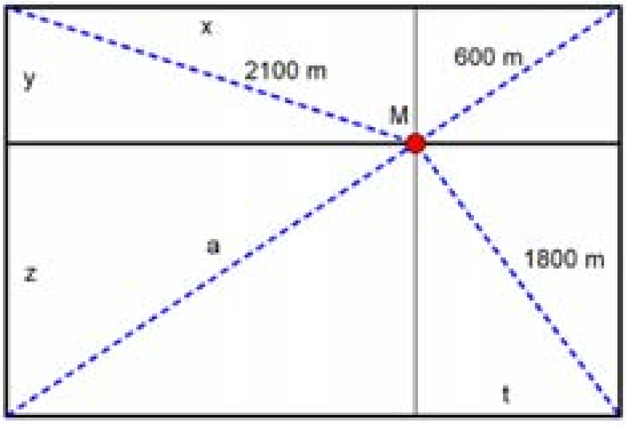
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-3\ (2+h)+6-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-3h}{h} = -3$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\ (2+h)-6-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 165

1. El manantial oculto. En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1800 m de la esquina inferior derecha. El manantial actualmente ha desaparecido. ¿A qué distancia se encontraría de al esquina inferior izquierda?

Denotando con **x, y, z, t** los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con **a** la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2100^2 \\ y^2 + t^2 = 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1800^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2100^2 \\ -y^2 - t^2 = -600^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - t^2 = 2100^2 - 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1800^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = 2100^2 - 600^2 + 1800^2$$

Entre esta última igualdad obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$a^2 = 2100^2 - 600^2 + 1800^2$, entonces a = 2700 metros.

2. Número oculto. La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

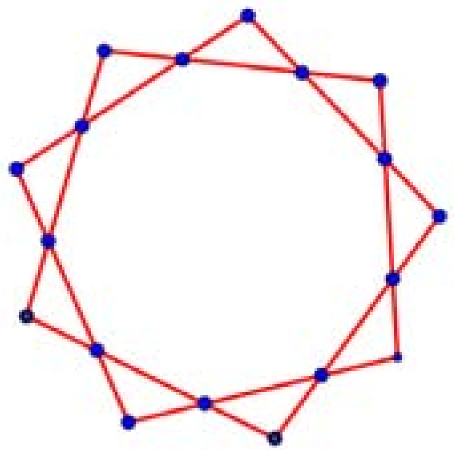
Llamando x a la expresión dada, obtenemos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Luego $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, es el número de oro.

3. Monedas. ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?

En la figura pueden verse 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas en cada fila.



4. Tantos por ciento. Parte de los 8 000 habitantes de un pueblo se va de vacaciones en verano. De los que quedan, el 63,636363…% les gusta la música y al 27,297297297… les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes de fueron de vacaciones en verano?

Observamos que:

$$63{,}6363... = \frac{6300}{99} = \frac{700}{11} \quad \text{y} \quad 22{,}297297... = \frac{22\,275}{999} = \frac{2\,475}{111} = \frac{825}{37}$$

Al 63,63% de los que queden les gusta la música, es decir al $\frac{700}{11}\%$ les gusta la música.

Al 22,297% de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir al $\frac{825}{37}\%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

Les gusta la música: $\frac{700}{1100} \cdot x = \frac{7}{11} \cdot x$. Les gusta usar vaqueros: $\frac{825}{37} \cdot x = \frac{33}{148} \cdot x$.

Por lo tanto, x ha de ser múltiplo de 11 y de 48.

Puede ser x = 1628; x = 3256; x = 4884; x = 6512.

Se fueron de vacaciones. 6372 si x = 1628 o 4744 si x = 3256; así sucesivamente.

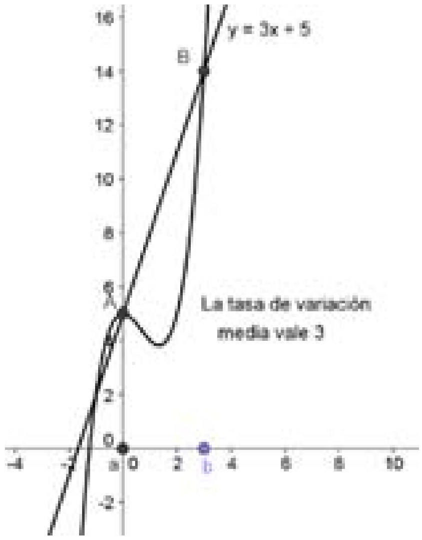
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 167

1. Halla la tasa de variación media de las funciones que siguen en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ en [0, 3] **b) $f(x) = \sqrt{x+5}$ en [4, 11]**

a) Seguimos los pasos siguientes:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=x^3-2x^2+5** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.



- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, en el eje OX, el punto A de abscisa x = 0 y el punto B de abscisa x = 3. Renombramos ambos puntos como a y b.

- En el Campo de Entrada introducimos los puntos A = (x(a),f(x(a))) y B=(x(b),f(x(b))), que aparecerán dibujados sobre la gráfica de la función.

- Dibujamos, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, la recta que une los puntos A y B**.** En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta secante a la gráfica, cuya pendiente es el valor de la tasa de variación media de la función en el intervalo [0, 3].

- En este caso, la tasa de variación media vale 3.

b) Seguimos los pasos siguientes:

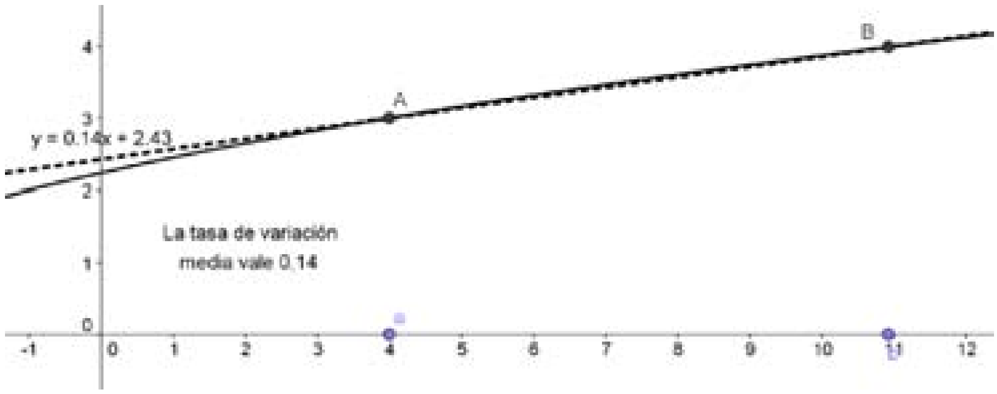
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=sqrt(x+5)** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, en el eje OX, el punto A de abscisa x = 4 y el punto B de abscisa x = 11. Renombramos ambos puntos como a y b.

- En el Campo de Entrada introducimos los puntos A = (x(a),f(x(a))) y B=(x(b),f(x(b))), que aparecerán dibujados sobre la gráfica de la función.

- Dibujamos, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, la recta que une los puntos A y B**.** En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta secante a la gráfica, cuya pendiente es el valor de la tasa de variación media de la función en el intervalo [4, 11].

- En este caso, la tasa de variación media vale 0,14.

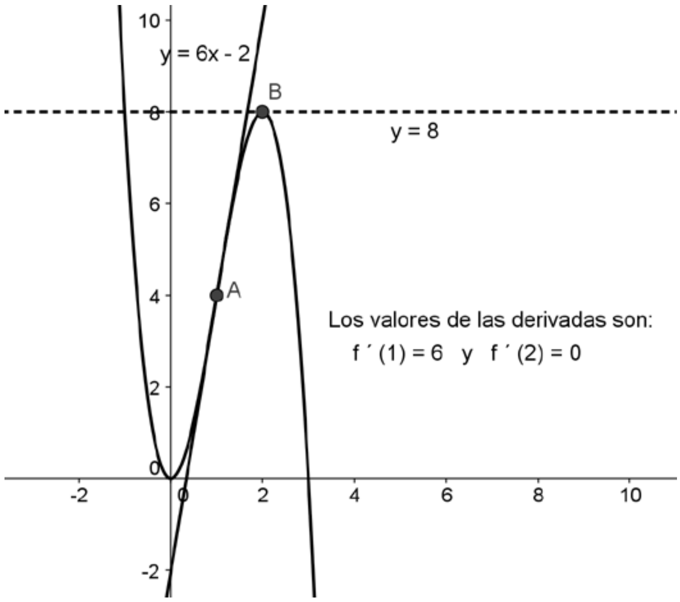


2. Calcula f ´ (1) y f ´ (2) en la gráfica de la función f(x) = 6x^2 – 2x^3. Dibuja las tangentes a la gráfica de la función anterior en los puntos de abscisa x = 1 y x = 2.

Para calcular f ´ (1) seguimos los pasos:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=6x^2-2x^3** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con el comando **Tangente [1, f]** dibujamos la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 1. Determinamos el punto de tangencia A con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** como intersección de la gráfica y la recta tangente. En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta tangente, y = 6x – 2, a la gráfica en el punto A, cuya pendiente es el valor de la derivada para x = 1. Tenemos que f ´ (1) = 6.



Para calcular f ´ (2) seguimos los pasos:

- Con el comando **Tangente [2, f]** dibujamos la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 2. Determinamos el punto de tangencia B con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** como intersección de la recta tangente y la gráfica. En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta tangente, y = 8, a la gráfica en el punto B, cuya pendiente es el valor de la derivada para x = 2. Tenemos que f ´ (2) = 0.

Todo lo anterior puede verse en la imagen.

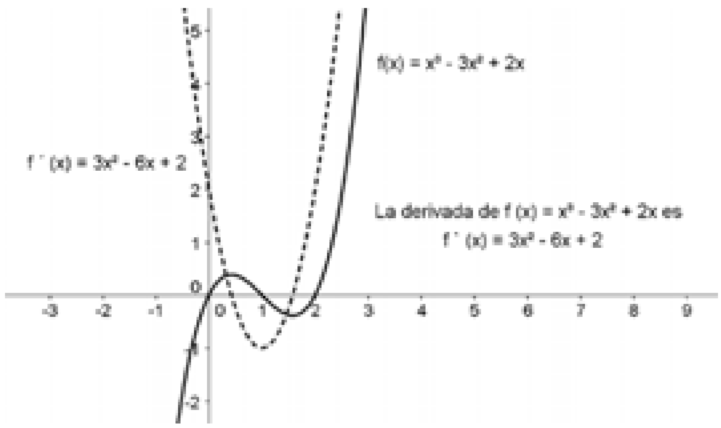
3. Estudia y representa las funciones siguientes y sus derivadas:

a) f(x) = x^3 – 3x^2 + 2x **b) f(x) = e^{-2x}** **c) f(x) = ln (x – 2)**

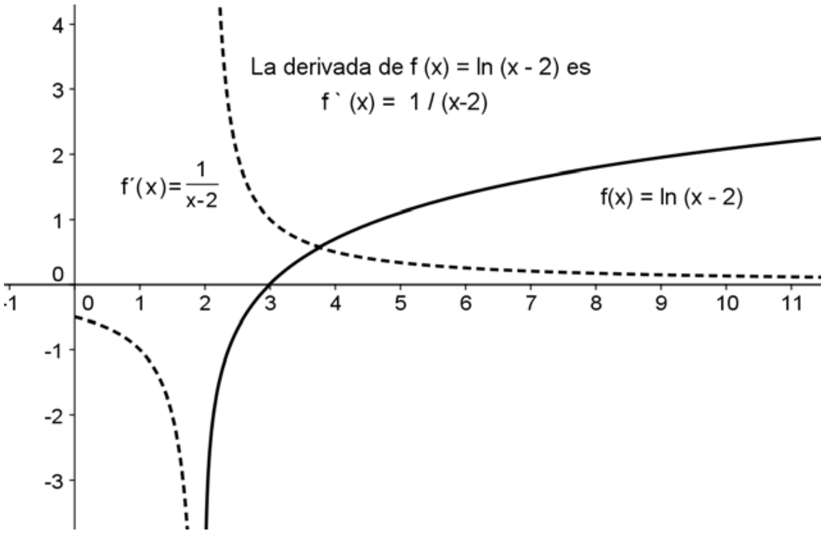
Seguimos los pasos:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=x^3-3x^2+2x** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con el comando **Derivada [f**] calculamos la derivada de la función, que podemos ver en la Ventana algebraica, y la representación gráfica. Todo ello puede verse en el gráfico, que va acompañado de un texto estático.



- Para las otras funciones procedemos de manera análoga y obtenemos los resultados que pueden verse en las imágenes.



4. Estudia las derivadas sucesivas de las familias de funciones:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ **b) $f(x) = a \cdot sen\,(bx + c)$**

a) Para la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ seguimos los pasos:

- Con la herramienta **Deslizador** creamos tres deslizadores que llamamos a, b y c, que varíen entre – 10 y 10 con incremento 0,1.

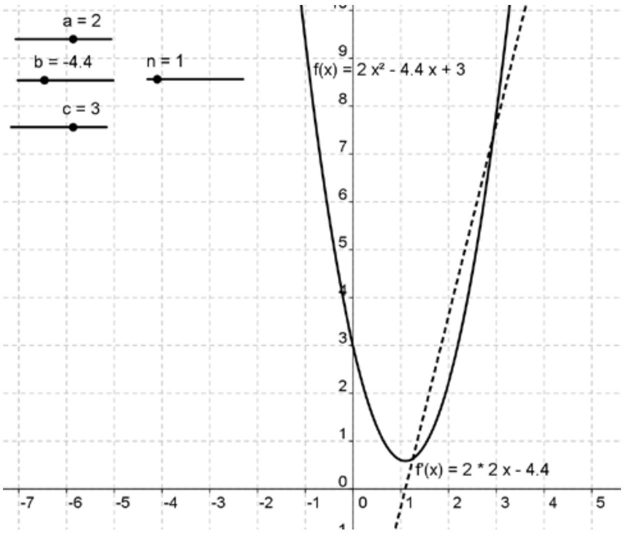
- Con la herramienta **Deslizador** creamos un cuarto deslizador que llamamos n y hacemos que varíe entre 1 y 10 con incremento de una unidad.

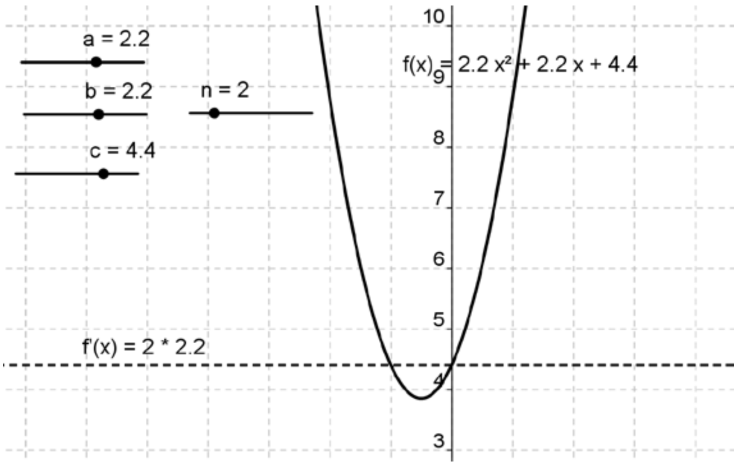
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=a*x^2+b*x+c** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

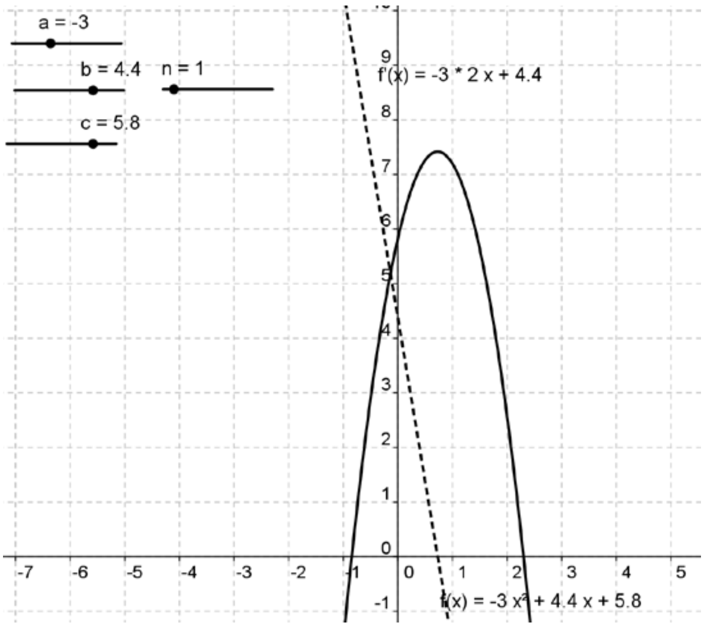
- Con el comando **Derivada [f, n]** calculamos la derivada de orden n que se representa gráficamente y aparece su expresión en la Ventana algebraica.

- Variamos el valor de los deslizadores y observaremos las gráficas de la función y de su función derivada del orden correspondiente.

En las imágenes aparecen algunos de las múltiples situaciones que pueden darse.







b) Para la función f(x) = a · sen (bx + c) seguimos los pasos:

- Con la herramienta **Deslizador** creamos tres deslizadores que llamamos a, b y c, que varíen entre – 10 y 10 con incremento 0,1.

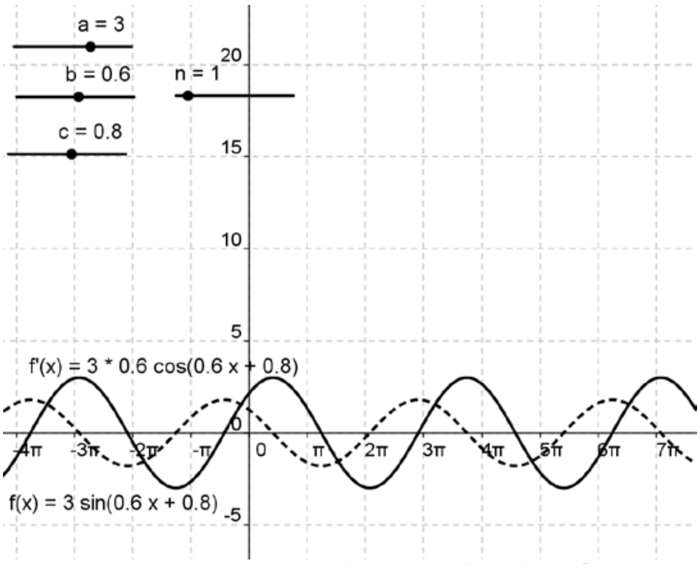
- Con la herramienta **Deslizador** creamos un cuarto deslizador que llamamos n y hacemos que varíe entre 1 y 10 con incremento de una unidad.

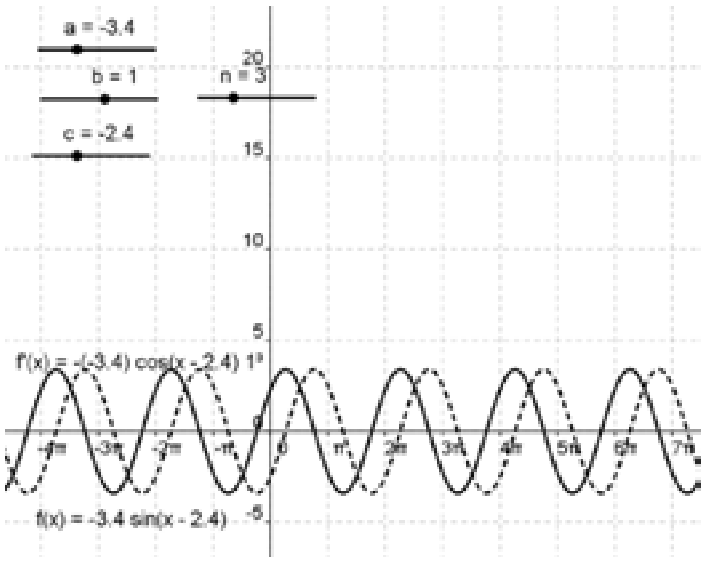
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=a*sin(b*x+c)** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

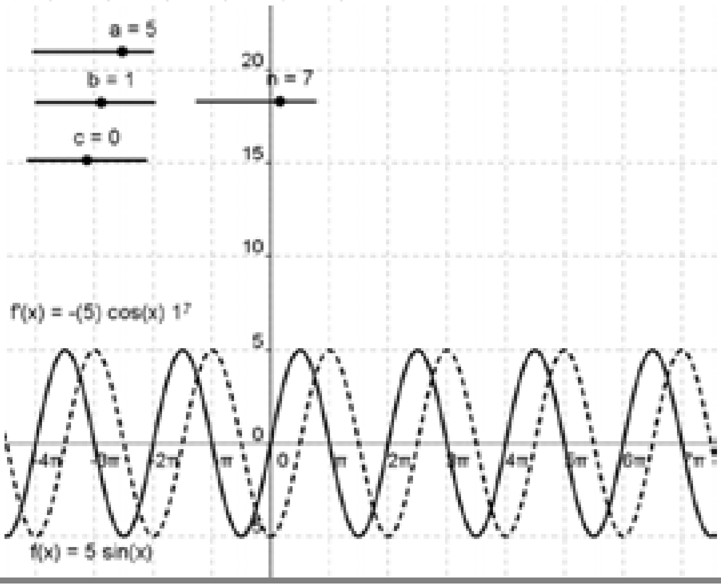
- Con el comando **Derivada [f, n]** calculamos la derivada de orden n que se representa gráficamente y aparece su expresión en la Ventana algebraica.

- Variamos el valor de los deslizadores y observaremos las gráficas de la función y de su función derivada del orden correspondiente.

En las imágenes aparecen algunos de las múltiples situaciones que pueden darse.







ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 170

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] de las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ **d)** $k(x) = \sqrt{x+5}$

Las tasas pedidas son:

a) $t_{vm}\ [2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{15-3}{2} = 6$

b) $t_{vm}\ [2, 4] = \dfrac{g(4) - g(2)}{4-2} = \dfrac{\frac{4}{3} - 1}{2} = \dfrac{1}{6} \approx 0,1667$

c) $t_{vm}\left[2, 4\right] = \dfrac{h(4) - h(2)}{4-2} = \dfrac{\frac{5}{17} - \frac{3}{5}}{2} = -\dfrac{13}{85} \approx -0,22$

d) $t_{vm}\ [2, 4] = \dfrac{k(4) - k(2)}{4-2} = \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \approx 0,1771$

2. Una empresa que fabrica componentes electrónicos ha comprobado que la variación de la demanda, D, de un determinado producto en función de su precio varía de acuerdo con la expresión:

$$D(x) = 1000 - 2x^2$$

a) Determina la variación de la demanda si el precio cambia de 5 a 10 euros.

b) Calcula la variación media de la demanda en el intervalo de precios [5, 15].

c) Averigua la variación instantánea de la demanda para x = 5.

a) Las demandas del producto para x = 5 y x = 10 euros, son respectivamente:

$$D(5) = 1000 - 2 \cdot 5^2 = 950 \ \text{ y } \ D(10) = 1000 - 2 \cdot 10^2 = 800$$

La variación de la demanda será D (10) – D (5) = 800 – 950 = - 150.

b) La variación media de la demanda en el intervalo [5, 15] es:

$$t_{vm}\ [5, 15] = \frac{D(15) - D(5)}{15-5} = \frac{550 - 950}{10} = -40$$

c) La variación instantánea de la demanda para x = 5 será:

$$t_{vi}\ (5) = \lim_{x \to 5} \frac{D(x) - D(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{50 - 2x^2}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{-2(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \to 0} [-2 \cdot (x+5)] = -20$$

3. El crecimiento de una colonia de bacterias viene dado por la siguiente expresión en función del tiempo P (t) = t^2 + 40t + 100, donde éste viene dado en minutos.

a) ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento entre el comienzo del cultivo y pasados 10 minutos?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a los 10 minutos?

a) La velocidad media entre t = 0 y t = 10 es:

$$t_{vm}\ [0, 10] = \frac{P\ (10) - P\ (0)}{10 - 0} = \frac{600 - 100}{10} = 50$$

b) La velocidad de crecimiento para t = 10 es:

$$t_{vi}\ (10) = \lim_{t \to 10} \frac{P\ (t) - P\ (10)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{t^2 + 40t - 500}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{(t - 10)\ (t + 50)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} (t + 50) = 60$$

4. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) f (x) = 2x – x^2; D [f (1)] **b)** $f\ (x) = \sqrt{x - 3};\ f\,'(7)$ **c)** $f\ (x) = \dfrac{2}{x + 1};\ D\left[f\ (3)\right]$

Las derivadas son:

a) $$D\left[f\ (1)\ \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (1 + h) - f\ (1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h) - (1 + h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2}{h} = 0$$

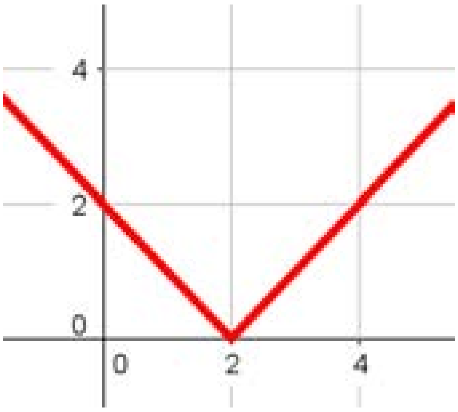
b) $$f\,'\ (7) = \lim_{x \to 7} \frac{f\ (x) - f\ (7)}{x - 7} = \lim_{x \to 70} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} \cdot \frac{\sqrt{x - 3} + 2}{\sqrt{x - 3} + 2} =$$

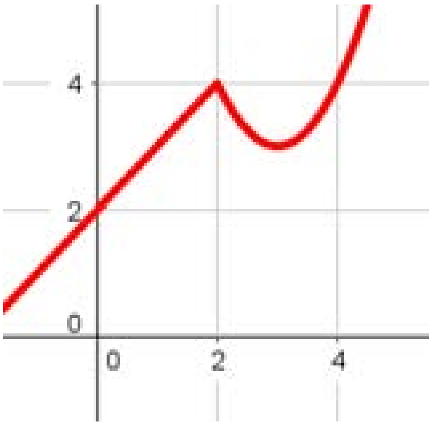
$$= \lim_{x \to 70} \frac{x - 7}{(x - 7) \cdot \left(\sqrt{x - 3} + 2\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 2} = \frac{1}{4}$$

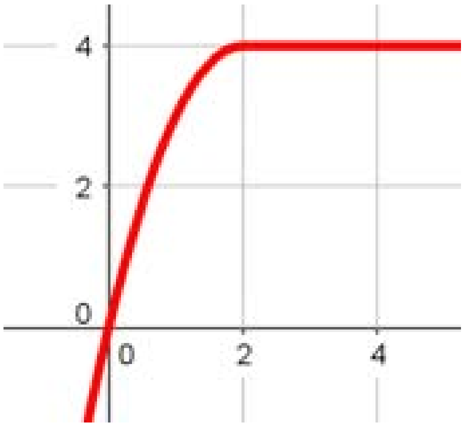
c) $$D\left[f\ (3)\ \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (3 + h) - f\ (3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{h + 4} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h\ (h + 4)} = -\frac{1}{8}$$

■ 5. Haciendo uso del concepto de derivada lateral en un punto, estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en x = 2. Para cada una de ellas representa gráficamente su función derivada.

a) f (x) = |2 - x| **b)** $g\ (x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **c)** $h\ (x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



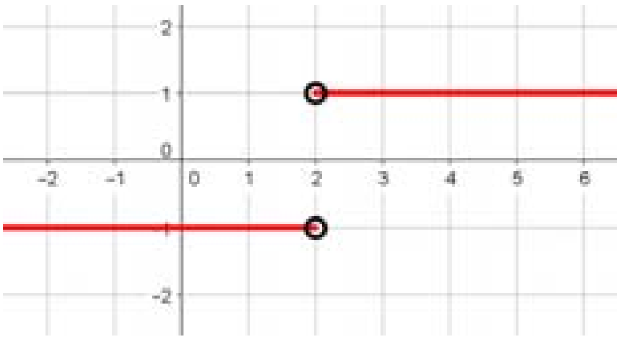




a) La función f (x) = |2 - x| es derivable en R – {2}.

La derivadas laterales en x = 2 son f ´ (2⁻) = - 1 y f ´ (2⁺) = 1.

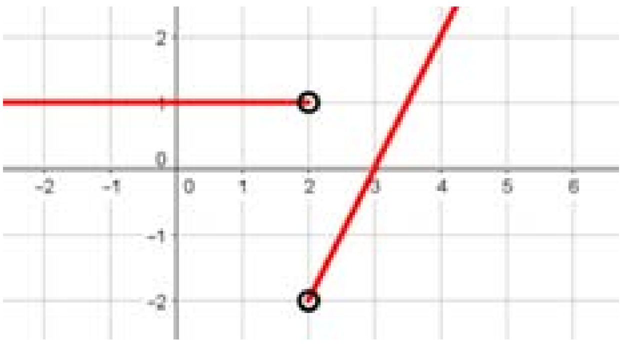
La función derivada es $f\,'(x) = \begin{cases} -1 \ si \ x < 2 \\ 1 \ \ si \ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



b) La función $g\,(x) = \begin{cases} x + 2 & si \ x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 12 & si \ x > 2 \end{cases}$ es derivable en R – {2}.

Las derivadas laterales en x = 2 son g ´ (2⁻) = 1 y g ´ (2⁺) = - 2.

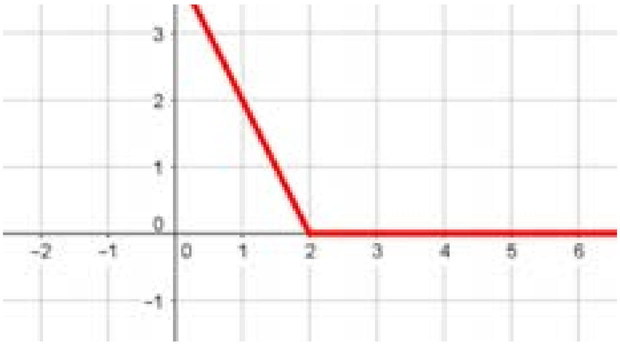
La función derivada es $g\,'(x) = \begin{cases} 1 \quad si \ \ x < 2 \\ 2x - 6 \ si \ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



c) La función $h(x)=\begin{cases}-x^2+4x & si\ x\le 2\\ 4 & si\ x>2\end{cases}$ es derivable en R.

Las derivadas laterales en x = 2 son $h'(2^-)=0$ y $h'(2^+)=0$.

La función derivada es $h'(x)=\begin{cases}-2x+4 & si\ x<2\\ 0 & si\ x>2\end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



6. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 2x^3 + x$ en $x_0 = 0$ **b) $g(x)=\frac{6}{x}$ en $x_0 = 2$** **c) $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ en $x_0 = 3$**

a) El punto de tangencia es (0, 0). La pendiente de la recta tangente es $f'(0) = 1$.

La ecuación de la tangente es y – 0 = 1 · (x – 0), es decir, x – y = 0.

b) El punto de tangencia es (2, 3). La pendiente de la recta tangente es $g'(2) = -\frac{3}{2}$.

La ecuación de la tangente es: $y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$, es decir, 3x + 2y = 12.

c) El punto de tangencia es (3, 4). La pendiente de la recta tangente es $h'(3) = -\frac{3}{4}$.

La ecuación de la tangente es: $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$, es decir, 3x + 4y = 25.

7. Sea la curva de ecuación $y = -x^3 + 11x$. Halla las ecuaciones de sus rectas tangentes que sean paralelas a la recta de ecuación y = - x.

La derivada de la función es $f'(x) = -3x^2 + 11$.

Las abscisas de los puntos de tangencia son las soluciones de la ecuación $-3x^2 + 11 = -1$. Éstas son x = - 2 y x = 2. Los puntos de tangencia son P (- 2, - 14) y Q (2, 14).

Las rectas tangentes pedidas son:

- En el punto P (- 2, - 14): y + 14 = - (x + 2), es decir, x + y = - 16.

En el punto Q (2, 14): y – 14 = - (x – 2), es decir, x + y = 16.

8. Encuentra los puntos de la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^3}$ en los que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación y = 2.

La pendiente de la recta tangente es la derivada en dicho punto: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^4}$.

La pendiente de la recta y = 2 es 0. Por tanto las tangentes de f (x) paralelas a y = 2 tiene que cumplir:

$$\frac{x^2 - 9}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Los puntos pedidos son $\left(-3, \dfrac{2}{9}\right)$ y $\left(3, -\dfrac{2}{9}\right)$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 171

9. ¿Para qué valores de m y n cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \le 1 \\ -x^2 + nx & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x^3 - x & si\ x \le 0 \\ mx + n & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Para que la función sea continua en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 - 5x + m\right) = m - 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(-x^2 + nx\right) = -1 + n \end{array}\right\} \Rightarrow m - 4 = -1 + n \quad \Rightarrow m - n = 3$$

Para que la función sea derivable en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + n = -3$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} m - n = 3 \\ -2 + n = -3 \end{cases}$, obtenemos: $\begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$

b) Para que la función sea continua en x = 0 se cumplirá:

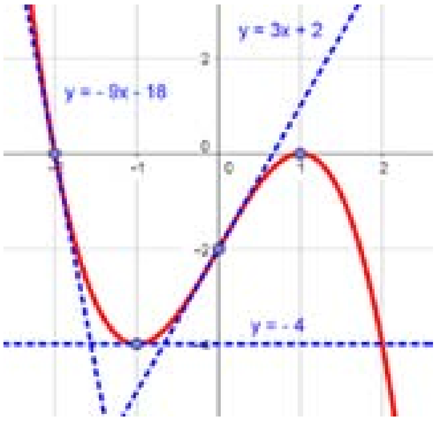
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^3 - x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(mx + n\right) = n \end{array}\right\} \Rightarrow n = 0$$

Para que la función sea derivable en x = 0 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} g\,'(0^-) = -1 \\ g\,'(0^+) = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = -1$$

Los valores buscados son m == - 1 y n = 0.

10. En la gráfica adjunta está representada la función y = f (x). Calcula, de forma razonada:



a) D f (- 2) **b) D f (- 1)** **c) D f (0)** **d) D f (1)**

En cada caso:

a) D f (- 2) = - 9, que es la pendiente de la recta tangente, de ecuación y = - 9x – 18, a la función en x = - 2.

Razonando de forma análoga:
b) D f (- 1) = 0 c) D f (0) = 3 d) D f (1) = 0

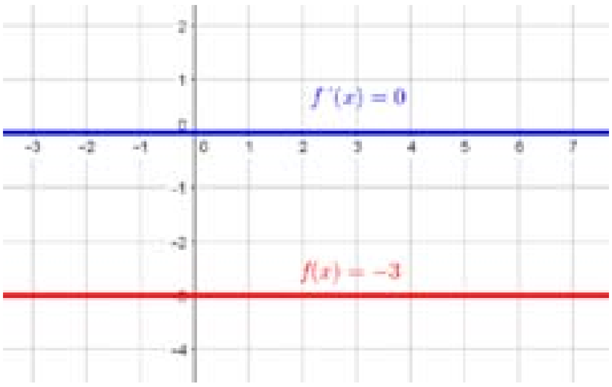
11. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones y representa, en el mismo diagrama, la función y su función derivada.

a) f (x) = - 3 **c) f (x) = 3x^2 – 6x**

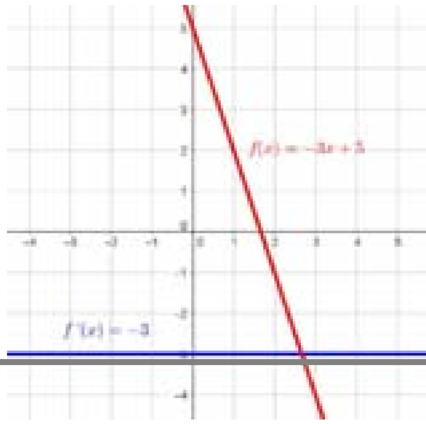
b) f (x) = - 3x + 5 **d) f (x) = x^3 – 12x + 8**

Las gráficas de las funciones propuestas pueden verse en color rojo y las de sus funciones derivadas en color azul.

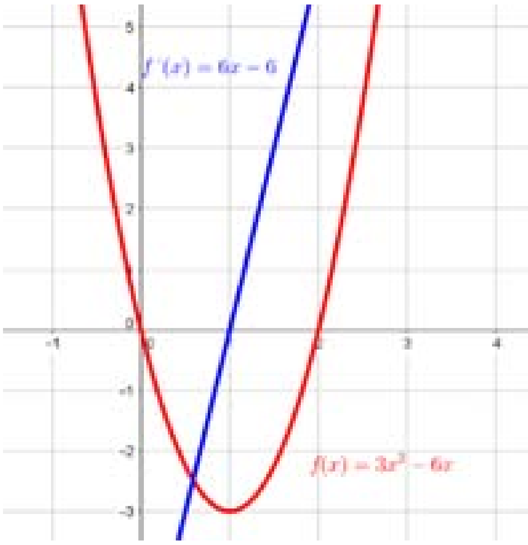
a) La función f (x) = - 3 y su función derivada f ´(x) = 0.



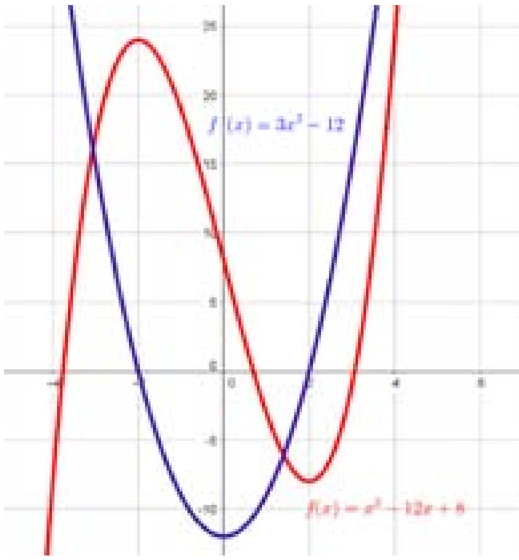
b) La función f (x) = - 3x + 5 y su función derivada f ´ (x) = - 3.



c) La función f (x) = $3x^2 - 6x$ y su función derivada f ´ (x) = $6x - 6$.



d) La función f (x) = $x^3 - 12x + 8$ y su función derivada f ´(x) = $3x^2 - 12$.



■ **12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $D\left[2x^3 + 3\sqrt[3]{x^2}\right]$

b) $D\left[3x^2 \cdot \sqrt{x^3}\right]$

c) $D\left[(x^3 - 2)^4\right]$

d) $D\left[x^3 \cdot 3^x\right]$

j) $D\left[(2^{3x} - 5)^3\right]$

k) $D\left[10^{x^2} + 10^x + 10\right]$

l) $D\left[\sqrt{2 - 5e^x}\right]$

m) $D\left[(1 - x^2) \cdot e^x\right]$

r) $D\left[(sen\ x - \cos x)^2\right]$

s) $D\left[\ln(\cos(2x))\right]$

t) $D\left[tg^2\ x + tg\ x^2\right]$

u) $D\left[\sqrt{x^2 + 3} \cdot sen\ x\right]$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]$ **n)** $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1+x^2}\right]$ **v)** $D\left[\dfrac{sen\ x}{1-sen\ x}\right]$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]$ **ñ)** $D\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right]$ **w)** $D\left[e^{tg\ x}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]$ **o)** $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]$ **x)** $D\left[arcsen\ x^3\right]$

h) $D\left[\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}\right]$ **p)** $D\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$ **y)** $D\left[arctg\ \dfrac{x}{2}\right]$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2}+5^{2x+1}\right]$ **q)** $D\left[\ln^2 x-\ln(\ln x)\right]$ **z)** $D\left[arctg\ \sqrt{x+1}\right]$

Las funciones derivadas son:

a) $D\left[2x^3+3\sqrt[3]{x^2}\right]=6x^2+2x^{-1/3}$

b) $D\left[3x^2\cdot\sqrt{x^3}\right]=\dfrac{21}{2}x^{5/2}$

c) $D\left[(x^3-2)^4\right]=12x^2(x^3-2)^3$

d) $D\left[x^3\cdot 3^x\right]=x^2\cdot 3^x\cdot(3+x\cdot\ln 3)$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]=\dfrac{\ln 2\cdot x\cdot 2^x-2\cdot 2^x}{x^3}$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]=-\dfrac{6}{(x-1)^3}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]=-\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}\,(2x-1)}$

h) $D\left[\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}\right]=\dfrac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2}$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2}+5^{2x+1}\right]=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+1}$

j) $D\left[(2^{3x}-5)^3\right]=9\cdot\ln 2\cdot 2^{3x}\cdot(2^{3x}-5)^2$

k) $D\left[10^{x^2}+10^x+10\right]=2x\cdot\ln 10\cdot 10^{x^2}+\ln 10\cdot 10^x$

l) $D\left[\sqrt{2-5e^x}\right]=\dfrac{-5e^x}{2\sqrt{2-5e^x}}$

m) $D\left[(1-x^2)\cdot e^x\right](-x^2-2x+1)\cdot e^x$

n) $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1+x^2}\right]=\dfrac{(3x^2-2x+3)\cdot e^{3x}}{(1+x^2)^2}$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right]=\dfrac{e^{1/x}}{x^2\cdot\left(1+e^{1/x}\right)^2}$

o) $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]=\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$

p) $D\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]=-\dfrac{1}{2x\left(1+\sqrt{x}\right)}$

q) $D\left[\ln^2 x-\ln(\ln x)\right]=\dfrac{2\ln^2 x-1}{x\cdot\ln x}$

r) $D\left[(sen\ x-\cos x)^2\right]=2\cdot(sen^2\ x-\cos^2\ x)$

s) $D\left[\ln(\cos(2x))\right]=-2\ tg\ (2x)$

t) $D\left[tg^2\ x+tg\ x^2\right]=\dfrac{2\cdot tg\ x}{\cos^2\ x}+\dfrac{2x}{\cos^2\ x^2}$

u) $D\left[\sqrt{x^2+3}\cdot sen\ x\right]=\dfrac{x\cdot sen\ x+(x^2+3)\cdot\cos x}{\sqrt{x^2+3}}$

v) $D\left[\dfrac{sen\ x}{1-sen\ x}\right]=\dfrac{\cos x}{(1-sen\ x)^2}$

w) $D\left[e^{tg\ x}\right]=\dfrac{e^{tg\ x}}{\cos^2\ x}$

x) $D\left[arcsen\ x^3\right] = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

y) $D\left[arctg\ \dfrac{x}{2}\right] = \dfrac{2}{4+x^2}$

z) $D\left[arctg\ \sqrt{x+1}\right] = \dfrac{1}{2\cdot(x+2)\cdot\sqrt{x+1}}$

13. Calcula el valor de k para que la derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2+1}{2x+k}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ valga 1.

La derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2+1}{2x+k}$ es $f\,'(x) = \dfrac{2kx^2+2k^2x-2}{(2x+k)^2}$.

Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ se cumplirá:

$$\frac{\dfrac{2k}{4}+\dfrac{2k^2}{2}-2}{(1+k)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2k^2+k-4}{2k^2+4k+2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

14. Los beneficios acumulados de una empresa, en miles de euros, a los t años de su fundación vienen dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t^2}{t+4} - 4$$

a) ¿Cuál fue la inversión inicial? ¿Cuándo comenzó a tener beneficios?

b) ¿Cuáles fueron las ganancias medias por año en los cinco y diez primeros años?

c) ¿Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento al final del primero, quinto y décimo año?

a) La inversión inicial fue de 4000 euros, al ser los beneficios iniciales $B(0) = \dfrac{2\cdot 0^2}{0+4} - 4 = -4$.

Para saber cuando la empresa comenzó a tener beneficios debe cumplirse B (t) > 0. Resolvemos la inecuación anterior y obtenemos:

$$B(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2t^2}{t+4} - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2t^2-4t-16}{t+4} > 0 \quad \Rightarrow \quad t > 4$$

La empresa comienza a tener beneficios a partir del cuarto año.

b) Las ganancias medias por año durante los cinco primeros años fueron:

$$\frac{B\,(5) - B\,(0)}{5} = \frac{1{,}56 - (-\,4)}{5} = 1{,}11111 \text{, es decir 1 111,11 euros.}$$

Las ganancias medias por año durante los diez primeros años fueron:

$$\frac{B\,(10) - B\,(0)}{10} = \frac{10{,}29 - (-\,4)}{10} = 1{,}42857 \text{, es decir 1 428,57 euros.}$$

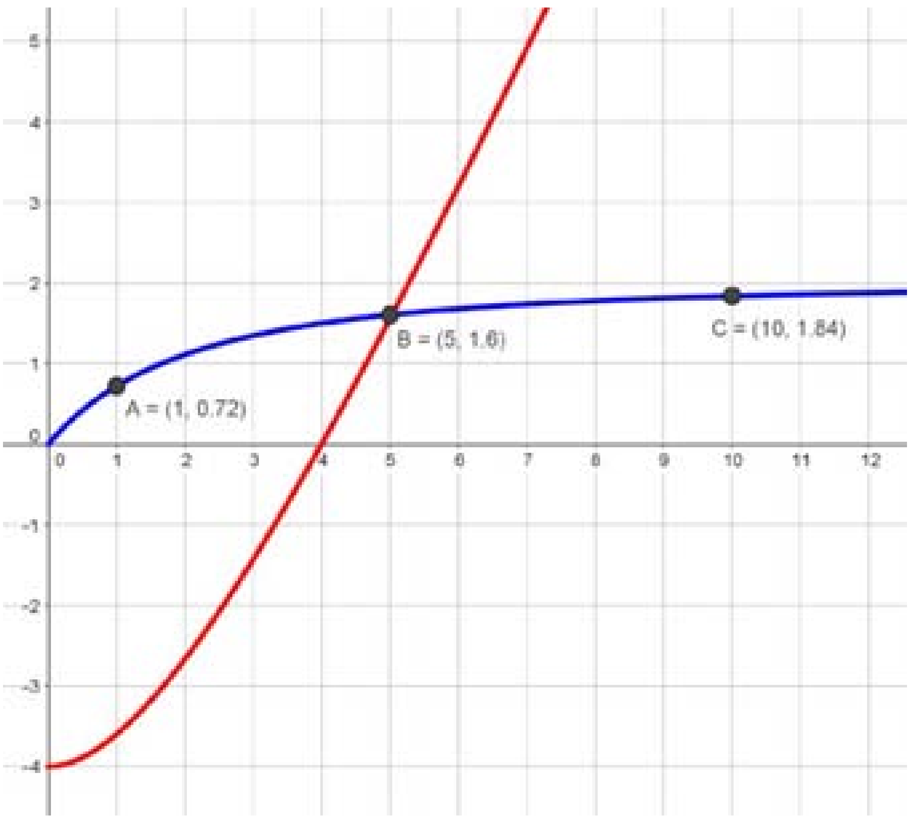
c) Las velocidades instantáneas de crecimiento en los años pedidos son:

En el primer año: $B\,'\,(1) = \dfrac{2 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1}{(1+4)^2} = 0{,}72$

En el quinto año: $B\,'\,(5) = \dfrac{2 \cdot 5^2 + 16 \cdot 5}{(5+4)^2} = 1{,}60$

En el décimo año: $B\,'\,(10) = \dfrac{2 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10}{(10+4)^2} = 1{,}84$

En la imagen puede verse la gráfica de la función en color rojo y la gráfica de su función derivada en color azul. En los puntos A, B y C aparecen los valores de las velocidades instantáneas de crecimiento en los años 1, 5 y 10.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 172

1. La población de una pequeña comunidad rural varía de acuerdo con la función:

$$P\,(t) = \frac{10\ 000}{1 + 4e^{-0,1t}}$$

a) Encuentra el incremento de población en los primeros 5 años, y en los primeros 10 años. Halla, en ambos casos, los correspondientes incrementos medios anuales de población.

b) Calcula los incrementos instantáneos de población en los años quinto y décimo.

a) Los incrementos de población fueros:

- En los primeros 5 años: P (5) – P (0) ≈ 2919 – 2000 = 919 habitantes.

- En los primeros 10 años: P (10) – P (0) ≈ 4046 – 2000 = 2046 habitantes.

Los incrementos medios de población fueron:

- En los primeros 5 años: $\frac{P\,(5) - P\,(0)}{5} = \frac{919}{5} = 183,8$ habitantes/año

- En los primeros 10 años: $\frac{P(10) - P(0)}{10} = \frac{2046}{10} = 204,6$ habitantes/año.

b) La función derivada de P (t) es $P\,'\,(t) = \frac{4\ 000 \cdot e^{-0,1t}}{(1 + 4e^{-0,1t})^2}$.

Los incrementos instantáneos pedidos son:

- En el quinto año: $P\,'\,(5) = \frac{4\ 000 \cdot e^{-0,1 \cdot 5}}{(1 + 4e^{-0,1 \cdot 5})^2} = 206,68$ habitantes/año.

- En el décimo año: $P\,'\,(10) = \frac{4\ 000 \cdot e^{-0,1 \cdot 10}}{(1 + 4e^{-0,1 \cdot 10})^2} = 240,90$ habitantes/año.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+2}, & x \neq -2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

a) Determina sus puntos de discontinuidad y su derivada en x = - 2 y x = 2.

b) Explica la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media en un punto, indicando lo que significa el valor de la derivada de la función f(x) en x = 2.

a) La función f(x) es continua para cualquier número real salvo para x = - 2 donde presenta una discontinuidad, al cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-2}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-2}{x+2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-2}{x+2} \text{ no existe}$$

La función derivada de la función f(x) es $f\,'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, válida para R – {- 2}.

La derivada en x = - 2 no existe al ser en dicho punto discontinua.

La derivada en x = 2 vale f´(2) = $\dfrac{4}{(2+2)^2} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

b) La tasa de variación media de la función f(x) en un entorno de centro 2 y radio h vale:

$$t_{vm}[2-h, 2+h] = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2+h-(2-h)} = \frac{\dfrac{2+h-2}{2+h+2} - \dfrac{2-h-2}{2-h+2}}{2h} = \frac{\dfrac{h}{4+h} + \dfrac{h}{4-h}}{2h} = \frac{4}{16-h^2}$$

La derivada en el punto 2 es:

$$f\,'(2) = \lim_{h \to 0} t_{vm}[2-h, 2+h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2+h-(2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{4}{16-h^2} = \frac{1}{4}$$

El valor de la derivada en el punto x = 2 es el valor de la tasa de variación instantánea en x = 2 o la pendiente de la recta tangente trazada en la gráfica de la función en x = 2.

3. Determina a y b para que la función siguiente sea derivable en x = 2.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable en x = 2, tiene que ser continua en ese punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 2b = -6$$

Además las derivadas laterales en x = 2 tienen que coincidir. Si $f\,'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & si\ x < 2 \\ 2x - b & si\ x > 2 \end{cases}$ se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(2^-) = 4a + 3 \\ f\,'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + b = 1$$

Los valores buscados son la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva f (x) = $x^3 - x^2 + x + 1$ que tiene pendiente m = 2.

Las abscisas de los puntos de tangencia son las soluciones de la ecuación:

$$f'(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (1, f (1)) = (1, 2) es:

$$y - 2 = 2 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 0.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{27}\right)$ es:

$$y - \frac{14}{27} = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + \frac{32}{27} \quad \Rightarrow \quad 54x - 27y = -32$$

5. La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (0, - 2) es tangente a la curva y = x^3. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (0, - 2) y tiene pendiente 3 es y = 3x – 2.

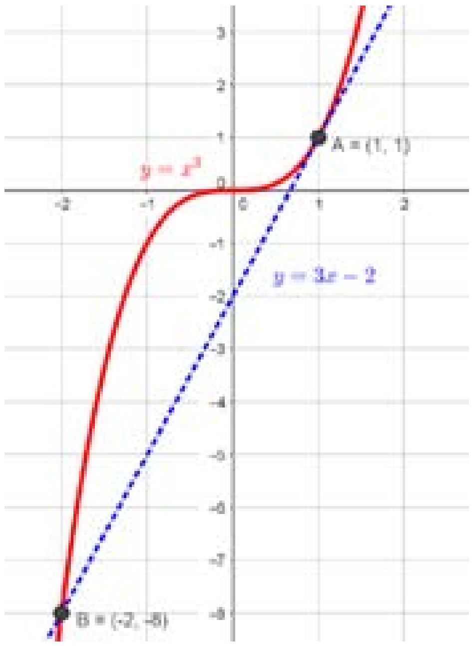
Resolvemos el sistema cuyas ecuaciones son las de la curva y la de la tangente y obtenemos:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \; o \; \begin{cases} x = -2 \\ y = -8 \end{cases}$$

El punto de tangencia tiene de coordenadas (1, 1).

El punto (- 2, - 8) es un punto de corte entre la curva y la tangente.

Puede observarse en la imagen.



6. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

La derivada de la función es f ´ (x) = $4x - x^2$.

La abscisa del punto de tangencia es la solución de la ecuación $4x - x^2 = 4$, es decir, x = 2. El punto pedido es $\left(2, \frac{16}{3}\right)$.

7. Calcula las derivadas de las funciones que se indican a continuación:

a) $D\left[2^{5x}+\frac{1}{x^2}\right]$ **d)** $D\left[e^{\sqrt{x\cdot(1-x)}}\right]$ **g)** $D\left[\frac{x^2-2}{\ln x}\right]$

b) $D\left[\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]$ **e)** $D\left[\frac{e^{-2x}}{(2-x^2)^2}\right]$ **h)** $D\left[\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\right]$

c) $D\left[\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]$ **f)** $D\left[\frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right]$ **i)** $D\left[arctg\,\frac{x-1}{x+1}\right]$

Las funciones derivadas son:

a) $D\left[2^{5x}+\frac{1}{x^2}\right]=5\cdot\ln 2\cdot 2^{5x}-\frac{2}{x^3}$

b) $D\left[\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

c) $D\left[\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]=\frac{7}{6x^2\sqrt[6]{2x}}$

d) $D\left[e^{\sqrt{x\cdot(1-x)}}\right]=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot e^{\sqrt{x-x^2}}$

e) $D\left[\frac{e^{-2x}}{(2-x^2)^2}\right]=\frac{(2x^2+4x-4)\cdot e^{-2x}}{(2-x^2)^3}$

f) $D\left[\frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right]=\frac{1}{2x\,(1-\ln x)\,\sqrt{1-\ln x}}$

g) $D\left[\frac{x^2-2}{\ln x}\right]=\frac{2x^2\cdot\ln x-x^2+2}{x\cdot\ln^2 x}$

h) $D\left[\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\right]=\frac{3x+12}{2x\,(x+3)}$

i) $D\left[arctg\,\frac{x-1}{x+1}\right]=\frac{1}{1+x^2}$

8. El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del mes de enero viene dado por la función:

$$N(t) = 100 + 200 \cdot e^{0,2\,t}$$

donde t representa el número de días transcurridos a partir del 1 de enero.

a) ¿Cuántos enfermos había el citado día 1 de enero?

b) Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de la evolución del número de enfermos al cabo de t días.

c) Determina la fecha en la cuál la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803 enfermos/día.

a) El número de enfermos al comienzo del día 1 de enero era de $N(0) = 100 + 200 \cdot e^{0,2 \cdot 0} = 300$.

b) La velocidad de evolución del número de enfermos está dad por la derivada, es decir, por la función:

$$N'(t) = 200 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2 \cdot t} \text{, es decir, } N'(t) = 40 \cdot e^{0,2 \cdot t}$$

c) Resolviendo la ecuación:

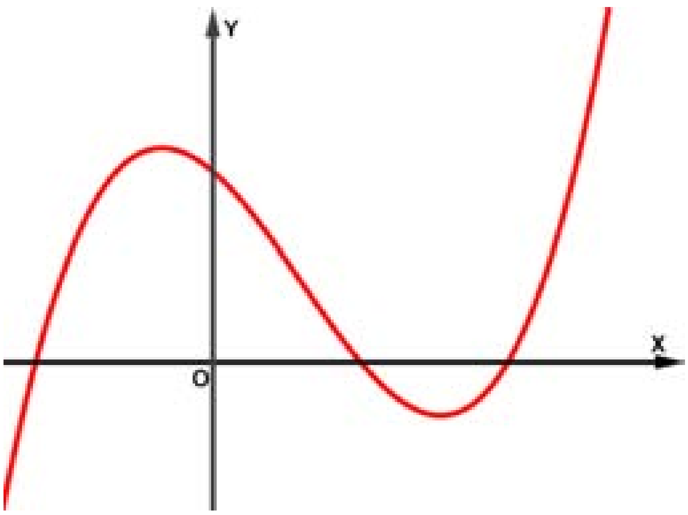
$$N'(t) = 40 \cdot e^{0,2 \cdot t} = 803 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0,2} \cdot \ln \frac{803}{40} \approx 15$$

Por tanto, la velocidad de evolución del número de enfermos fue de 803 enfermos/día al finalizar el día 15 de enero.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 173

Una propiedad de las cúbicas

1. Utilizando algún medio tecnológico (calculadora gráfica o programa con representación gráfica) representa la función cúbica $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 20x + 75$ y halla la *Ventana gráfica* adecuada para que el dibujo de la gráfica aparezca como se muestra en la imagen.



a) ¿Cuáles son las raíces de la función y = f (x)? Confirma los valores utilizando el teorema del resto

b) Toma las raíces de dos en dos y halla las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de abscisa igual a la media aritmética de cada par de raíces.

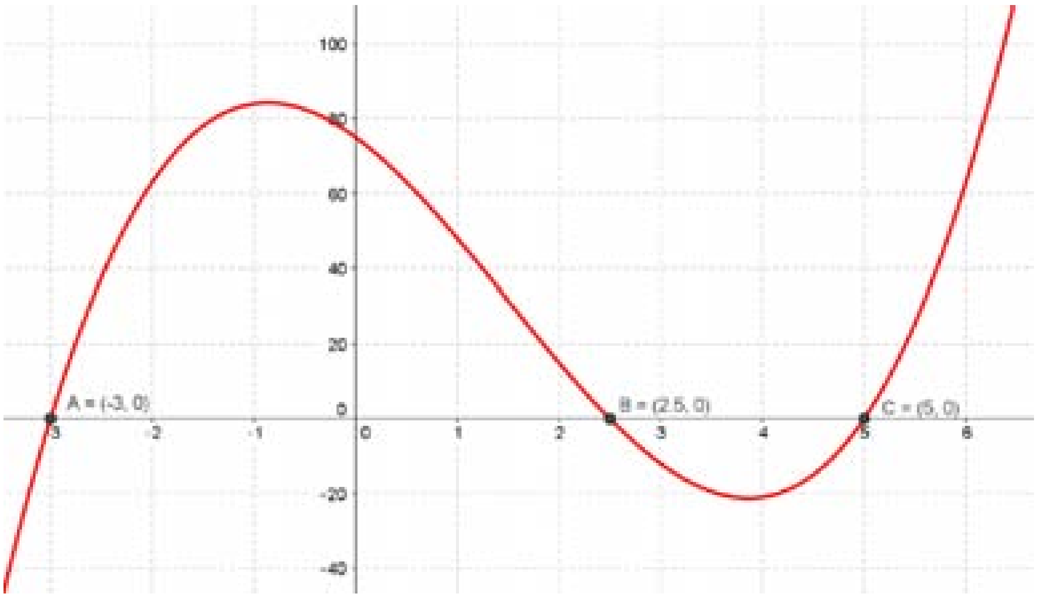
c) Halla el punto donde cada una de estas rectas tangentes corta de nuevo a la curva. ¿Ocurre siempre lo mismo sea cual sea el par de raíces utilizado?

2. ¿Ocurre lo mismo para otras funciones cúbicas similares? ¿Puedes probar las propiedades observadas u obtenidas?

3. Investiga las propiedades anteriores con funciones cúbicas que tengan: (a) una raíz triple, (b) dos raíces reales, una de ellas doble, (c) o una raíz real y dos raíces complejas.

1. La parte gráfica de esta investigación se ha realizado con GeoGebra.

Introducimos la expresión de la función f (x) = $2x^3 – 9x^2 – 20x + 75$, ajustamos la Ventana gráfica y hallamos la intersección de la gráfica de y = f (x) con el eje OX, obteniendo los puntos: A (- 3, 0); B (2,5; 0) y C (5, 0).



a) Las raíces son x_A = - 3, x_B = 2,5 y x_C = 5.

Comprobamos, con el teorema del resto, que es así:

f (x_A) = f (- 3) = 2 · $(- 3)^3$ – 9 · $(- 3)^2$ – 20 · (- 3) + 75 = 0

f (x_B) = f (2,5) = 2 · $(2,5)^3$ – 9 · $(2,5)^2$ – 20 · (2,5) + 75 = 0

f (x_A) = f (5) = 2 · 5^3 – 9 · 5^2 – 20 · 5 + 75 = 0

b) Los puntos, sobre el eje OX, de abscisa la media aritmética de las raíces son:

De A (- 3, 0) y B (2,5; 0) es M_1 (- 0,25; 0)

De A (- 3, 0) y C (5, 0) es M_2 (1, 0)

De B (2,5; 0) y C (5, 0) es M_3 (3,75; 0)

Hallamos los puntos P, Q y R, sobre la gráfica, cuya abscisa es la de los puntos M_1, M_2 y M_3:

f (x_{M1}) = f (- 0,25) = 2 · $(- 0,25)^3$ – 9 · $(- 0,25)^2$ – 20 · (- 0,25) + 75 = 79,41

$f(x_{M2}) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 + 75 = 48$

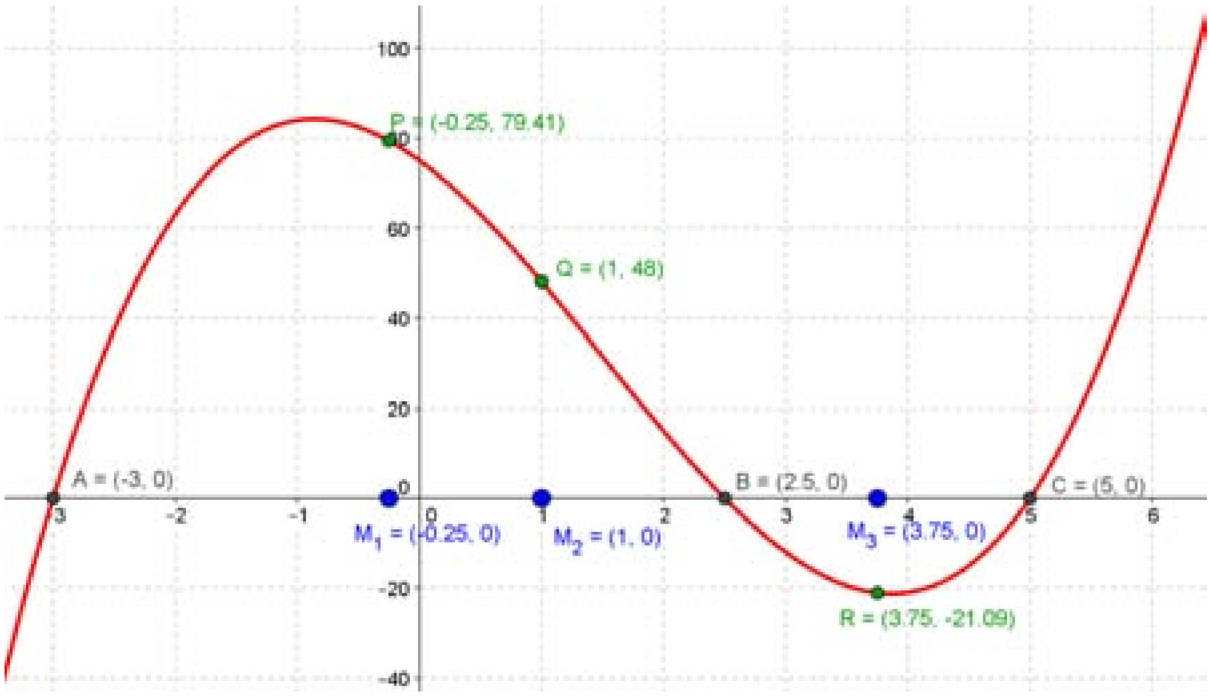
$f(x_{M3}) = f(3{,}75) = 2 \cdot (3{,}75)^3 - 9 \cdot (3{,}75)^2 - 20 \cdot (3{,}75) + 75 = -21{,}09$

Todos los puntos pueden verse en la imagen que sigue:

Puntos, en color negro, cuyas abscisas son las raíces: A (- 3, 0); B (2,5; 0) y C (5, 0).

Puntos, en color azul, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las raíces: M_1 (- 0,25; 0); M_2 (1, 0) y M_3 (3,75; 0).

Puntos, en color verde, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las raíces y están sobre la gráfica de la función: P (- 0,25; 79,41); Q (1, 48) y R (3,75; - 21, 09).



Para hallar las ecuaciones de las tangentes en los puntos P, Q y R, hallamos los valores de las pendientes de las tangentes citadas. La derivada de la función y = f (x) es $f'(x) = 6x^2 - 18x - 20$.

Las pendientes de las tangentes son:

$m_P = f'(-0{,}25) = 6 \cdot (-0{,}25)^3 - 18 \cdot (-0{,}25) - 20 = -15{,}13$

$m_Q = f'(1) = 6 \cdot 1 - 18 \cdot 1 - 20 = -32$

$m_R = f'(3{,}75) = 6 \cdot (3{,}75)^3 - 18 \cdot (3{,}75) - 20 = -3{,}13$

Hallamos las ecuaciones de las rectas tangentes.

En el punto P (- 0,25; 79,41): $y - 79{,}41 = -15{,}13 \cdot (x + 0{,}25) \Rightarrow$ **$y = -15{,}13x + 75{,}63$**

Comprobamos que pasa por el punto C (5, 0): y (5) = - 15,13 · 5 + 75, 63 = 0

En el punto Q (1, 48): y – 48 = - 32 · (x - 1) $\Rightarrow$ **y = - 32x + 80**

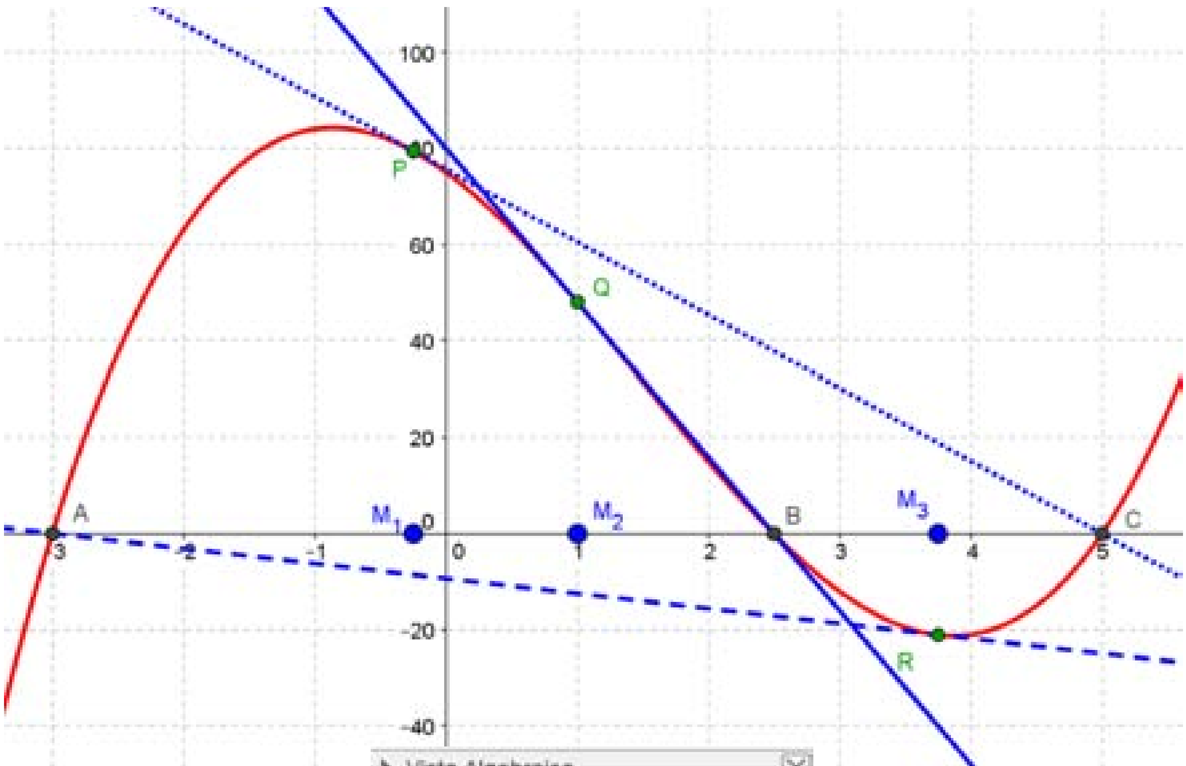
Comprobamos que pasa por el punto B (2,5; 0): y (2,5) = - 32 · 2,5 + 80 = 0

En el punto R (3,75; - 21, 09): y + 21,09 = - 3,13 · (x – 3,75) $\Rightarrow$ **y = - 3,13x – 9,37**

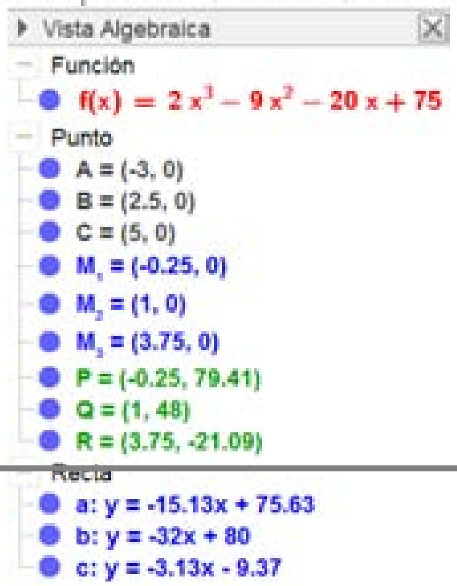
Comprobamos que pasa por el punto A (- 3, 0): y (- 3) = - 3,13 · (- 3) +- 9,35 = 0

Observamos que la recta tangente en los puntos de la gráfica cuya abscisa es la media aritmética de dos cualesquiera de las raíces pasa por el punto del eje OX cuya abscisa en la tercera raíz.

Todo lo anterior puede verse en la imagen que sigue: La recta tangente en P (en trazo punteado) pasa por el punto C. La tangente en Q (en trazo continuo) pasa por el punto B y la tangente en R (en trazo discontinuo) pasa por el punto A.



En la imagen adjunta, que se corresponde con la Ventana Algebraica, pueden verse la ecuación de la de la función (en rojo), los puntos con sus coordenadas (en negro, azul y verde) y las ecuaciones de las rectas tangentes (en color azul)



2. Para poder observar si ocurre lo mismo con otras funciones cúbicas similares explicamos la construcción realizada con GeoGebra en el apartado anterior, que debe servirnos para cualquier función cúbica que tenga tres raíces reales y distintas. Los pasos a seguir con GeoGebra:

1º Introducimos y representamos la función cúbica y = f (x).

2º Con la herramienta **Desplaza Vista Gráfica** ajustamos la ventana gráfica de forma que aparezca la gráfica de la función con sus puntos notables (máximo, mínimo y punto de inflexión), así como los cortes de la gráfica con el eje OX.

3º Usando la herramienta **Intersección** hallamos los puntos A, B y C, intersección de la gráfica con el eje OX, cuyas abscisas son las raíces de la función cúbica.

4º Utilizando la herramienta **Punto Medio o Centro** determinamos los puntos M_1, M_2, y M_3, sobre el eje OX, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las abscisas de los puntos A y B, A y C, B y C, respectivamente.

5º Dibujamos los puntos P, Q y R sobre la gráfica de y = f (x) tecleando en la ventana de entrada:

Para el punto P, tecleamos: $P = \left(x\left(M\_1\right), f\left(x\left(M\_1\right)\right)\right)$.

Para el punto Q, tecleamos: $Q = \left(x\left(M\_2\right), f\left(x\left(M\_2\right)\right)\right)$.

Para el punto R, tecleamos: $R = \left(x\left(M\_3\right), f\left(x\left(M\_3\right)\right)\right)$.

6º Finalmente, con la herramienta, **Tangentes**, dibujamos las rectas tangentes a la gráfica de y = f (x) en los puntos P, Q y R.

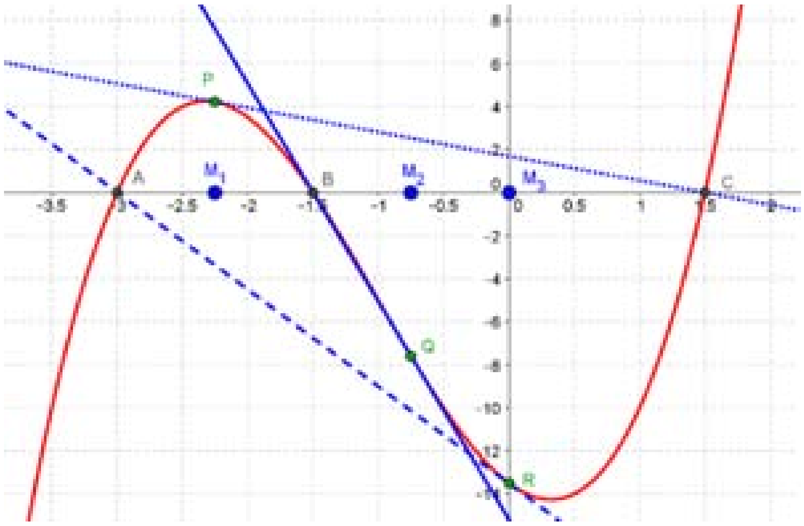
7º En las **Propiedades de los objetos** (función, puntos, rectas) ponemos el color, estilo… a nuestro gusto.

En la imagen puede verse los resultados obtenidos para la función f (x) = $2x^3 + 6x^2 – 4,5x – 13,5$.

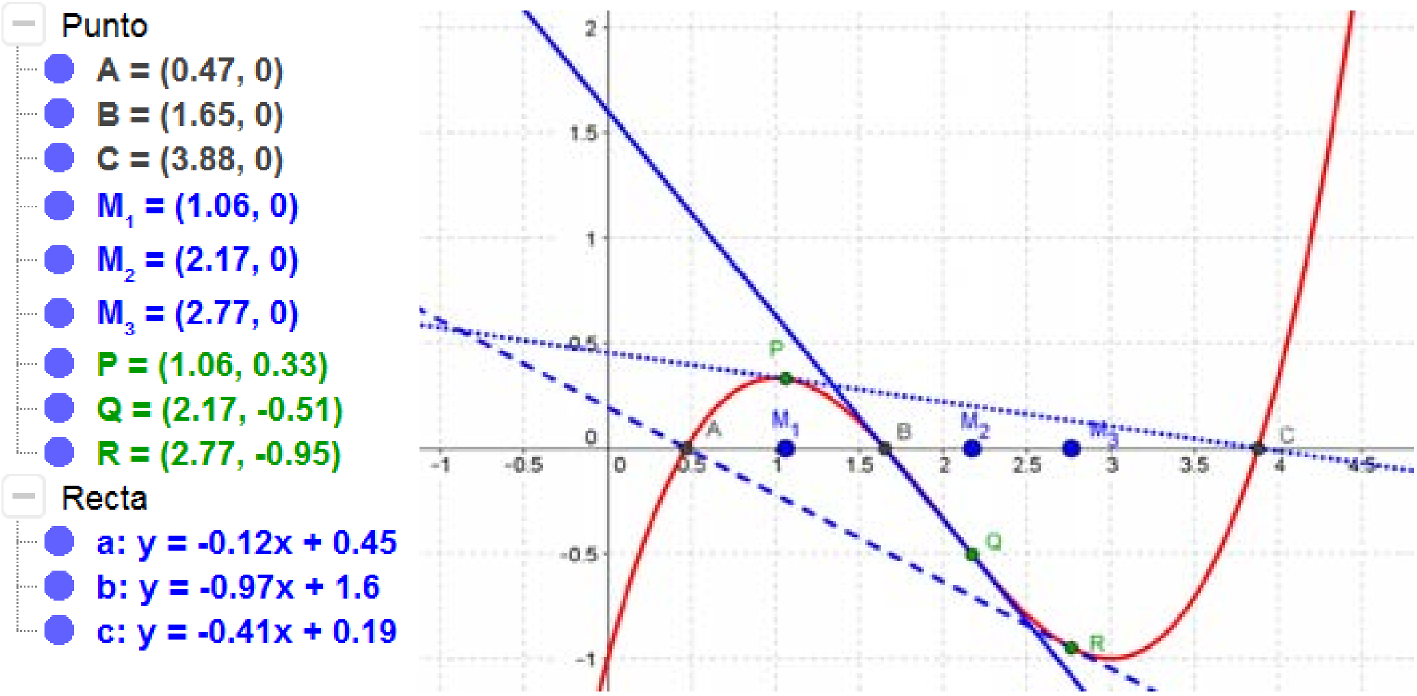
Los puntos son:

A (- 3, 0); B (- 1,5; 0); C (1,5; 0); M_1 (- 2,25; 0); M_2 (- 0,75; 0); M_3 (0, 0); P (- 2,25; 4,22); Q (- 0,75; - 7,59) y Q (0, - 13,5).

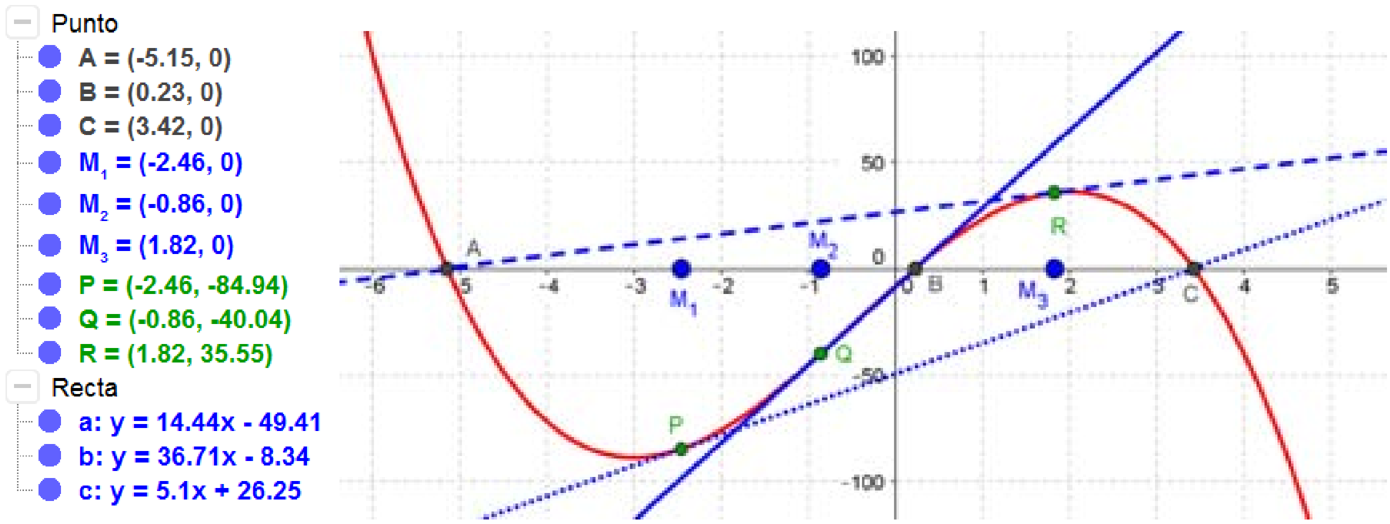
Las rectas tangentes son: En P: y = - 1,13x + 1,69. En Q: y = - 10,13x – 15,19. En R: y = - 4,5x – 13,5.



En las imágenes pueden verse los resultados obtenidos para f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.



Por último, mostramos lo que ocurre con la función f (x) = - 2x^3 – 3x^2 + 36x – 8.



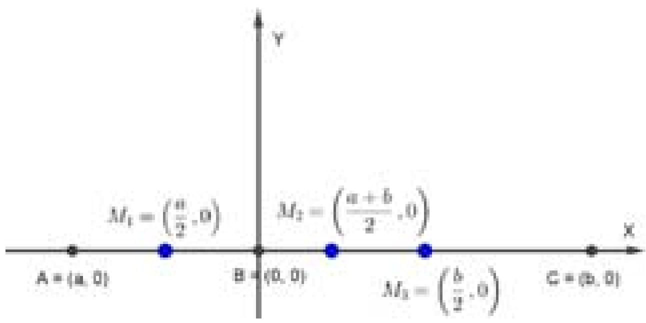
Intentamos probar que:

En las funciones cúbicas con tres raíces reales y distintas, las rectas tangentes en los puntos de la gráfica cuya abscisa es la media aritmética de dos cualesquiera de las raíces pasan por el punto del eje OX cuya abscisa en la tercera raíz.

Consideramos, sin pérdida de generalidad, una función cúbica con tres raíces reales y distintas, a, 0 y b, es decir, que la gráfica de la función cúbica corta al eje OX en los puntos A (a, 0), B (0, 0) y C (b, 0).

Los puntos del eje OX cuyas abscisas son las medias aritméticas de los puntos anteriores son:

$$M_1\left(\frac{a}{2}, 0\right); M_2\left(\frac{a+b}{2}, 0\right) \text{ y } M_3 = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$$



Todo esto puede verse en la imagen adjunta.

La expresión de la función cúbica es f (x) = (x – a) · x · (x – b), es decir, f (x) = x^3 – (a + b) x^2+ abx.

Hallamos las ordenadas de los puntos $P\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right); Q\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \text{ y } R\left(\frac{b}{2}, f\left(\frac{b}{2}\right)\right)$:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - (a+b)\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ab\frac{a}{2} = \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{4} - \frac{a^2b}{4} + \frac{a^2b}{2} = \ldots = \frac{2a^2b - a^3}{8}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - (a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab\frac{a+b}{2} = \ldots = -\frac{(a+b)\,(a-b)^2}{8}$$

$$f\left(\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{b}{2}\right)^3-(a+b)\left(\frac{b}{2}\right)^2+ab\frac{b}{2}=\frac{b^3}{8}-\frac{b^3}{4}-\frac{ab^2}{4}+\frac{ab^2}{2}=...=\frac{2ab^2-b^3}{8}$$

La derivada de la función f (x) = x^3 – (a + b) x^2+ abx es f ´ (x) = $3x^2$ – 2(a + b) x + ab.

Veamos que la recta tangente en el punto P coincide con la recta que pasa por los puntos $P\left(\frac{a}{2},\frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ y C (b, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{a}{2},\frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ es:

$$m_P=f\,'\left(\frac{a}{2}\right)=3\left(\frac{a}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{a}{2}\right)+ab=\frac{3a^2}{4}-a^2-ab+ab=-\frac{a^2}{4}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\left(\frac{a}{2},\frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ y C (b, 0) es:

$$m_{PC}=\frac{y_C-y_P}{x_C-x_P}=\frac{0-\frac{2a^2b-a^3}{8}}{b-\frac{a}{2}}=\frac{-\frac{2a^2b-a^3}{8}}{\frac{8b-4a}{8}}=...=-\frac{a^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto P, las rectas coinciden.
Veamos que la recta tangente en el punto Q coincide con la recta que pasa por los puntos $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ y B (0, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ es:

$$m_Q=f\,'\left(\frac{a+b}{2}\right)=3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)+ab=...=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ y B (0, 0) es:

$$m_{QBC}=\frac{y_B-y_Q}{x_B-x_Q}=\frac{0-\left(-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)}{0-\frac{a+b}{2}}=\frac{\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}}{\frac{4(a+b)}{8}}=...=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto Q, las rectas coinciden.

Por último, veamos que la recta tangente en el punto R coincide con la recta que pasa por los puntos $R\left(\frac{b}{2},\frac{2ab^2-b^3}{8}\right)$ y A (a, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $R\left(\frac{b}{2}, \frac{2ab^2 - b^3}{8}\right)$ es:

$$m_R = f\,'\left(\frac{b}{2}\right) = 3\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2(a+b)\left(\frac{b}{2}\right) + ab = \frac{3b^2}{4} - b^2 - ab + ab = -\frac{b^2}{4}.$$

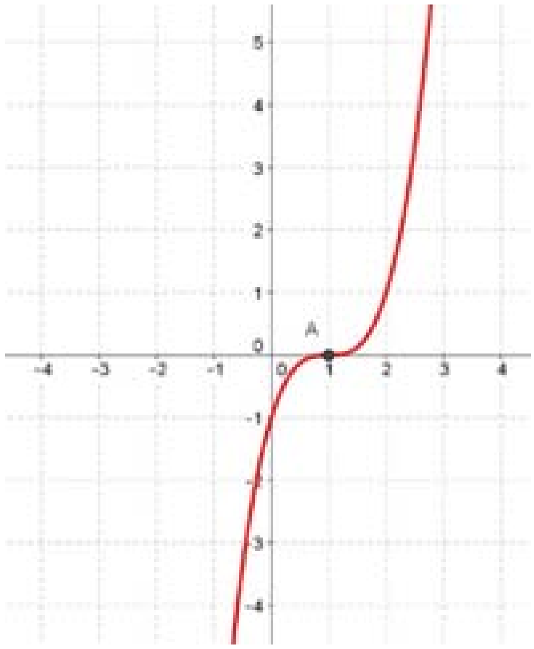
La pendiente de la recta que pasa por los puntos $R\left(\frac{b}{2}, \frac{2ab^2 - b^3}{8}\right)$ y A (a, 0) es:

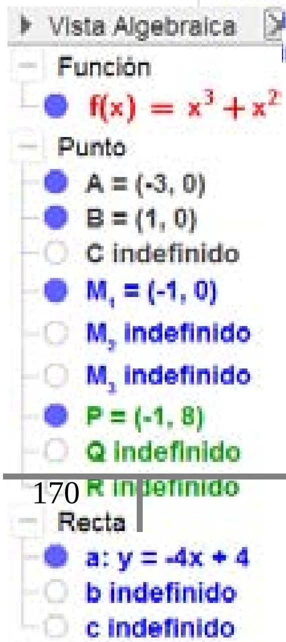
$$m_{RA} = \frac{y_R - y_A}{x_R - x_A} = \frac{\frac{2ab^2 - b^3}{8} - 0}{\frac{b}{2} - a} = \frac{\frac{2ab^2 - b^3}{8}}{\frac{4b - 8a}{8}} = \ldots = -\frac{b^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto R, las rectas coinciden. Con esto queda probado lo que pretendíamos.

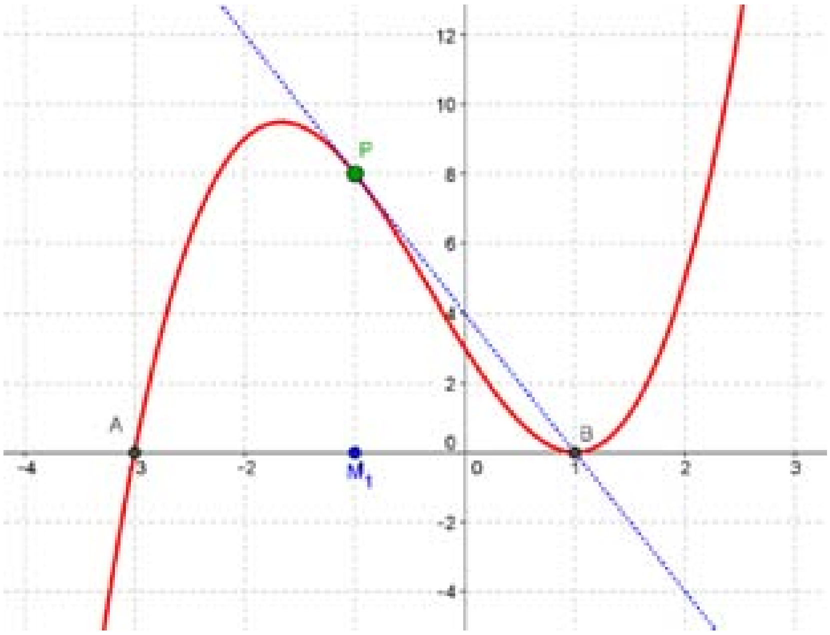
3. Investigamos las propiedades anteriores con funciones cúbicas que tengan: (a) una raíz triple, (b) dos raíces reales, una de ellas doble, o (c) una raíz real y dos raíces complejas.

(a) En el caso de una función cúbica con una raíz triple, por ejemplo: f (x) = $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ solo existe un punto de corte (los tres puntos, A, B y C coinciden en uno sólo) y, por tanto, el resto de elementos (puntos y rectas) no están definidos. Puede observarse en las imágenes que siguen.

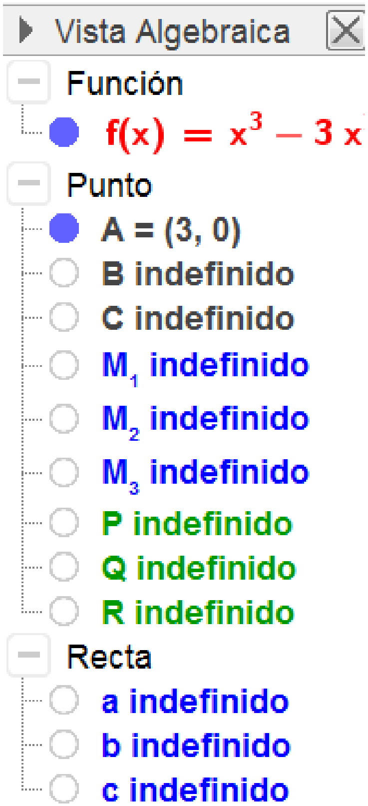


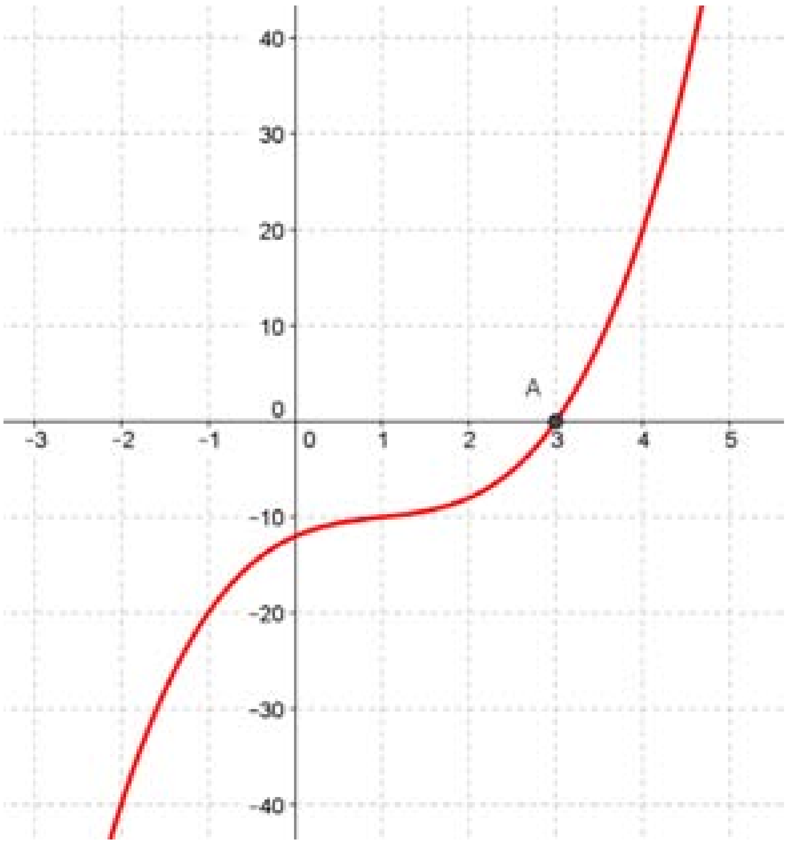


(b) En el caso de una función cúbica con dos raíces reales, una de ellas doble, por ejemplo: f (x) = $(x+3)\cdot(x-1)^2 = x^3 + x^2 - 5x + 3$, existen dos puntos de corte, A y B (el tercer punto C ha coincidido con uno de los anteriores), por tanto, existe uno de los puntos M_i con su correspondiente punto sobre la gráfica y su recta tangente que, puede observarse en la imagen que sigue pasa por el punto doble.



(c) En el caso de una función cúbica con una raíz real y dos raíces complejas, por ejemplo, las raíces 3, 2i y –2i, que dan lugar a la función: f (x) = (x – 3) · (x^2 + 4) = x^3 – 3x^2 + 4x – 12 solo existe un punto de corte y, por tanto, el resto de elementos (puntos y rectas) no están definidos. Puede observarse en las imágenes que siguen.





UNIDAD 7: Aplicaciones de las derivadas

CUESTIONES INICIALES-PÁG.174

1. Estudia la monotonía, crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) f (x) = - 8x + 2x^2 **b)** $g\ (x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

a) La función f (x) = - 8x + 2x^2 es decreciente en $\left(-\infty, 2\right)$ y creciente en $\left(2, +\infty\right)$.

b) La función $g\ (x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ es decreciente en R – {3}.

2. Halla dos números positivos cuyo producto sea 16 y su suma sea la menor posible.

Los números buscados son 4 y 4.

3. Un centro comercial cuyo horario de apertura es de 10 horas diarias estima que el número de clientes, N, en función del número de horas, t, que lleva abierto es:

N (t) = - 15t^2 + 180t, 0 ≤ t ≤ 10

a) ¿Cuántos clientes habrá a las 3 horas de apertura?

b) Halla la hora de máxima clientela. ¿Cuál es el número máximo de clientes?

c) Si queremos acudir al centro comercial cuando haya un número de clientes inferior a 300, ¿entre qué horas deberíamos ir?

a) A las 3 horas de apertura habrá N (3) = - 15 · 3^2 + 180 · 3 = 405 clientes.

b) La gráfica de N (t) = - 15t · (t – 12) es parte de una parábola, que corta al eje OX en (0, 0) y (12, 0) y tiene el vértice en el punto (6, 450).

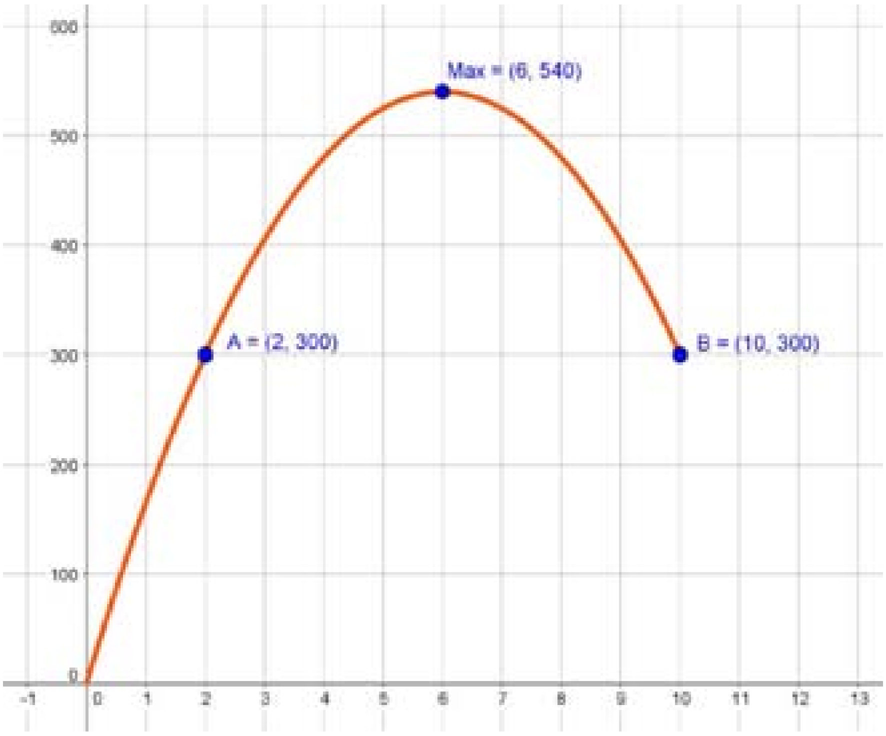
Por tanto, a las 6 horas de abrir el centro comercial se encuentra la máxima clientela. El número máximo de clientes es 540.

c) Veamos cuando N (t) = 300:

$$-15t^2 + 180t = 300 \ \Rightarrow \ t^2 - 12t + 20 = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} t = 10 \\ t = 2 \end{cases}$$

Deberíamos ir durante las 2 primeras horas.

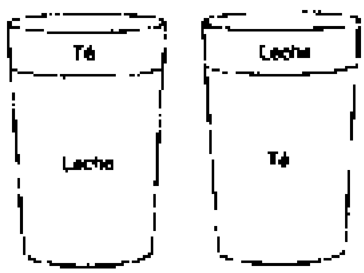
Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 187

1. Leche y té. Un par de amigos se juntan a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro, un vaso de de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té; después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?

Como comenzamos con dos vasos llenos, el uno de té y el otro de leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.



2. Juego para dos. Dos amigas dicen alternativamente, un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a este el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora y para la segunda.

Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1ª jugadora (G) ganará siempre y cuando deje a la 2ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada. Para ello, simulamos una partida.

1ª jugada: G dice 2
P dice lo que sea de 1 a 10

2ª jugada: G, el número necesario para sumar 12 o 23
P, el número que sea de1 a 10

3ª jugada: G, el número necesario para sumar 23 o 34
P, el número que sea de 1 a 10

…

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12, 23, 34, 45, 56, 78 u 89.

Penúltima jugada: G dice el número necesario para sumar 89
P, el número que sea de 1 a 10

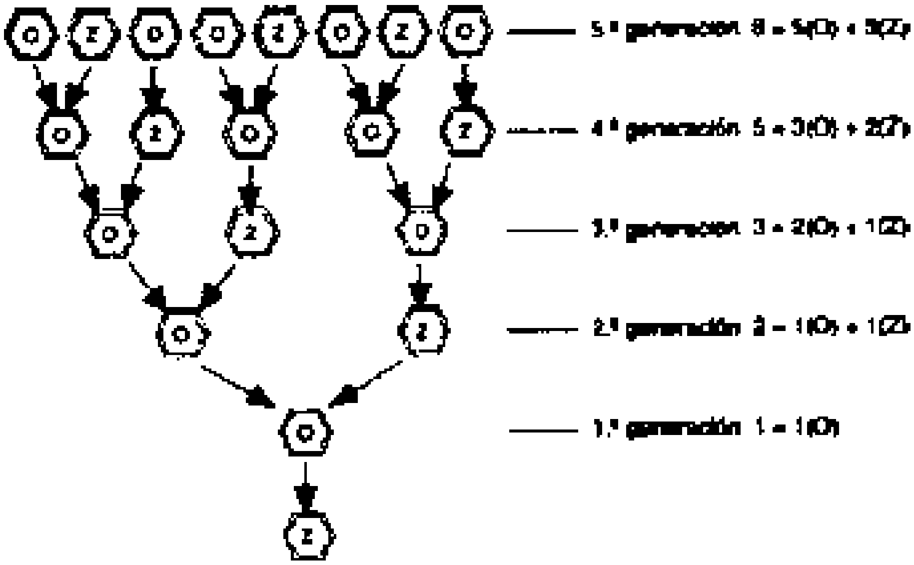
Última jugada: G ice un número de forma que obtiene100

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2º jugador, el primer jugador debe decir un número de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deja l 2º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.

La estrategia ganadora para el 2º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al primer jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al primer jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganará la partida.

3. La sucesión de Fibonacci y las abejas. Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tiene madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tiene madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano de la décima generación anterior a él?, y de estos, ¿cuántos son machos y cuántas son hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17 711 antecesores?

En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la secuencia: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… que es a sucesión de Fibonacci.

● En la décima generación anterior a él, un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 55 son hembras. Puede verse en la tabla.

Generación	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:

● En la vigésima generación anterior a él tiene 10 946 antecesores, de los cuales 4181 son machos y 6765 hembras.

● En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17 711 antecesores.

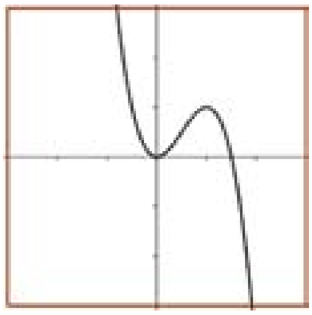
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 189

1. Para las funciones que siguen, dibuja sus gráficas y determina el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$.

a) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

Procedemos, en cada uno de los apartados, como se indica en el epígrafe DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

a) Para la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ seguimos los pasos:

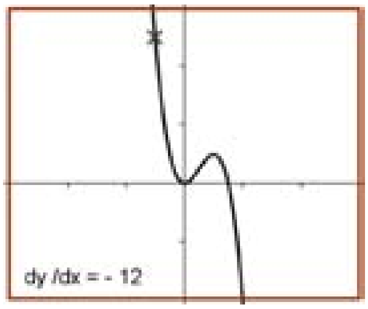


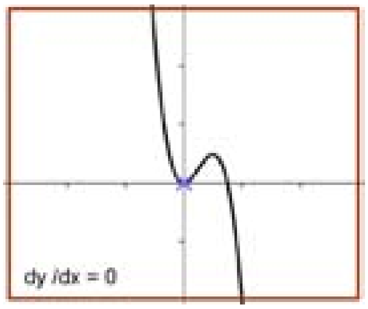
- En la tecla Y =, introducimos su expresión, tecleando – 2* X ^3 + 3 * X ^2. Pulsando GRAPH aparece su representación gráfica.

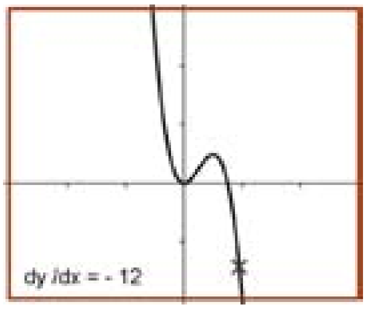
- Pulsando la tecla GRAPH aparecerá en pantalla la gráfica de la función.

- En el menú *CALCULATE*, que activamos pulsando la tecla CALC (se activa con 2nd TRACE), elegimos 6 : dy / dx. Volvemos a la pantalla de la representación gráfica e introducimos x = - 1, obteniendo como valor de la derivada en el punto anterior dy /dx = - 12.

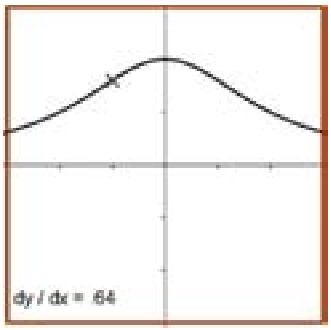
- Procediendo de manera análoga para los otros puntos, obtenemos: dy /dx = 0 y dy / dx = - 12. Todo ello puede verse en los gráficos que siguen.

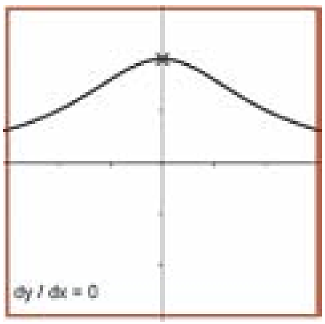


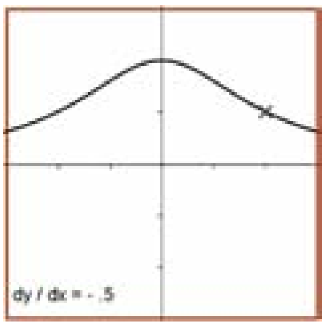




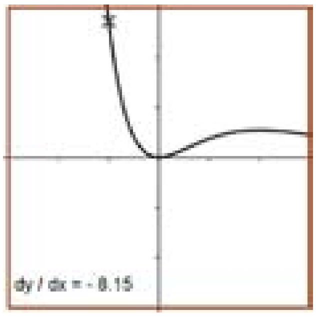
b) Para la función $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ obtenemos:

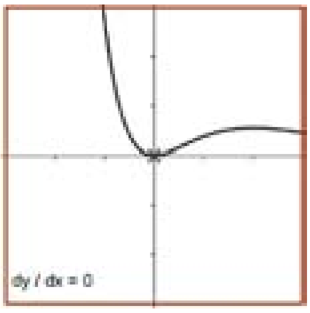


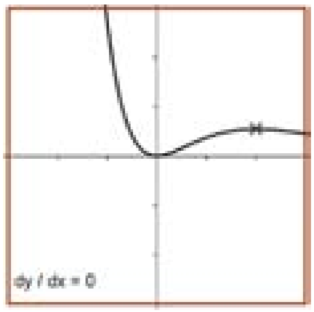




c) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ obtenemos:





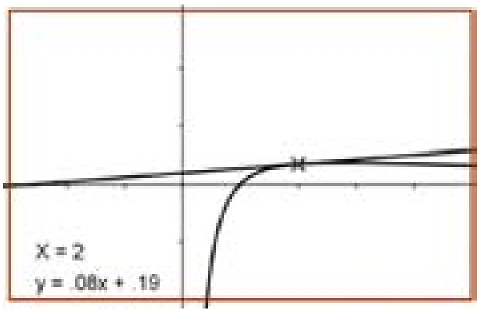


2. Representa la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y dibuja la recta tangente en los puntos de abscisa $x_1 = 2$, $x_2 = e$ y $x_3 = 4$

Seguimos los pasos que se describen en el epígrafe RECTA TANGENTE A UNA GRÁFICA EN UN PUNTO:

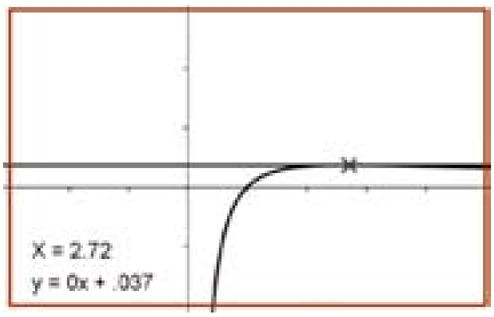
- En la tecla **Y =** introducimos la función del enunciado, tecleando la secuencia ln(x) / x. Realizamos la representación gráfica pulsando la tecla **GRAPH**.

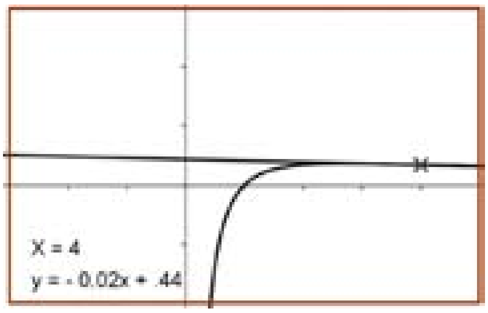
- Para dibujar la tangente en el punto de abscisa $x_1 = 2$, en el menú de **DRAW** (se activa con **2nd PRGM**) pulsamos la opción **5: Tangent (**, y en la pantalla que aparece introducimos la abscisa del punto pulsando X 2.



- Al pulsar Enter aparecerá la representación que vemos en el dibujo. En él aparece la gráfica de la función, la gráfica de la tangente, el punto de abscisa x = 2 resaltado y la ecuación de la recta tangente, y = 0,08x + 0,19.

- Para trazar la tangente en los puntos de abscisas $x_2 = e$ y $x_3 = 4$ se procede de igual forma. Antes de trazar las nuevas tangentes podemos borrar las tangentes trazadas pulsando **1: ClrDraw** del menú **DRAW**. Obtenemos los dibujos que aparecen a continuación.





3. Determina los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

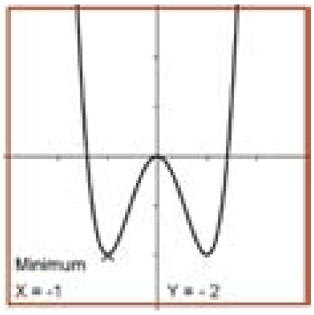
Procedemos como se indica en el epígrafe ESTUDIO DE LOS EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN.

a) Para $f(x) = 2x^4 - 4x^2$, seguimos los pasos:

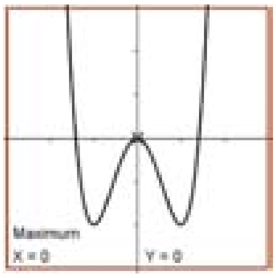
- Introducimos su expresión en **Y =**, tecleando la secuencia 2* X ^4 - 4 * X ^2. Pulsando **GRAPH** aparece su representación gráfica.

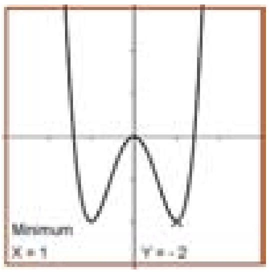
- En el menú **CALCULATE** asociado a **CALC** (que activamos en **2nd TRACE**) pulsamos **3: minimun** para determinar los mínimos.

- Procedemos de la siguiente manera: aparece en la pantalla el cursor parpadeante y la pregunta *Left Bound?* Movemos el cursor con las teclas ► ◄ y nos situamos, por ejemplo, en el punto X = -1,49, Y = -0,97 y pulsamos **ENTER**, apareciendo otra pantalla como la anterior con la pregunta *Right Bound?* Moviendo el cursor nos situamos, por ejemplo, en el punto X = -0,64, Y = - 1,3 y pulsamos **ENTER** y en la pantalla aparece la pregunta *Guess?* y las coordenadas del punto anterior. Finalmente pulsando **ENTER**, aparece la pantalla de la figura con el punto mínimo X = - 1, Y = - 2 resaltado en la gráfica.

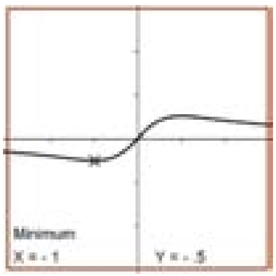


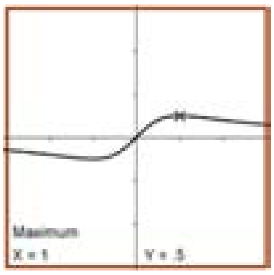
- De forma análoga encontramos el máximo en el punto (0,0) y otro mínimo en el punto (1, - 2).



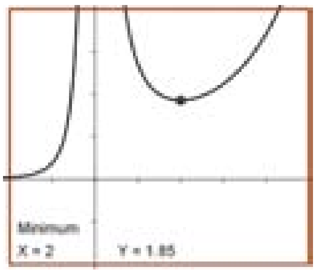


b) Para la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ obtenemos:





c) Para la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ obtenemos:



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 192

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) f (x) = – 3x + 5 **c) f (x) = $x^3 + 3x^2 - 5$** **e) f (x) = e^{2x}**

b) f (x) = $x^2 - 6x$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

a) La función f (x) = – 3x + 5 es estrictamente decreciente para cualquier número real.

b) La función f (x) = $x^2 - 6x$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 3)$ y estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.

c) La función f (x) = $x^3 + 3x^2 - 5$ es estrictamente decreciente en $(-2, 0)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

d) La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$ y estrictamente creciente en $(2, +\infty)$.

e) La función f (x) = e^{2x} es estrictamente creciente en todo R.

f) La función $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ es estrictamente decreciente en R – {3}.

2. Estudia la monotonía de las siguientes funciones definidas a trozos:

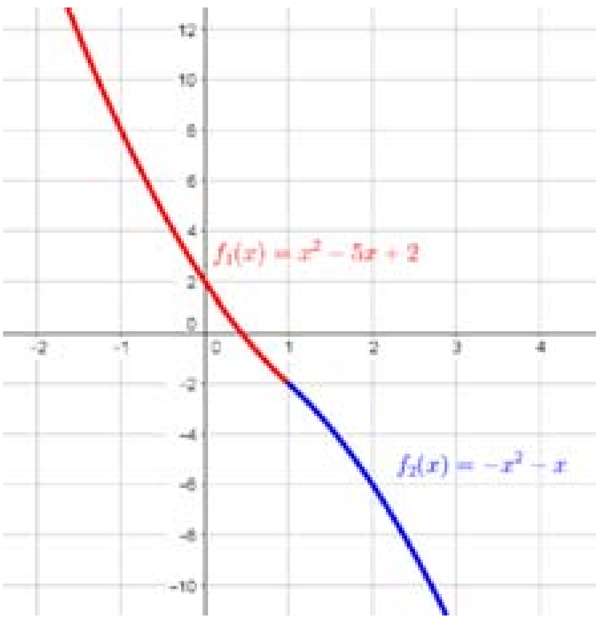
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & si\ x \le 1 \\ -x^2 - x & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & si\ x \le 2 \\ \ln(x-1) & si\ x > 2 \end{cases}$

a) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & si\ x \le 1 \\ -x^2 - x & si\ x > 1 \end{cases}$ es decreciente en todo R.

Su función derivada es:

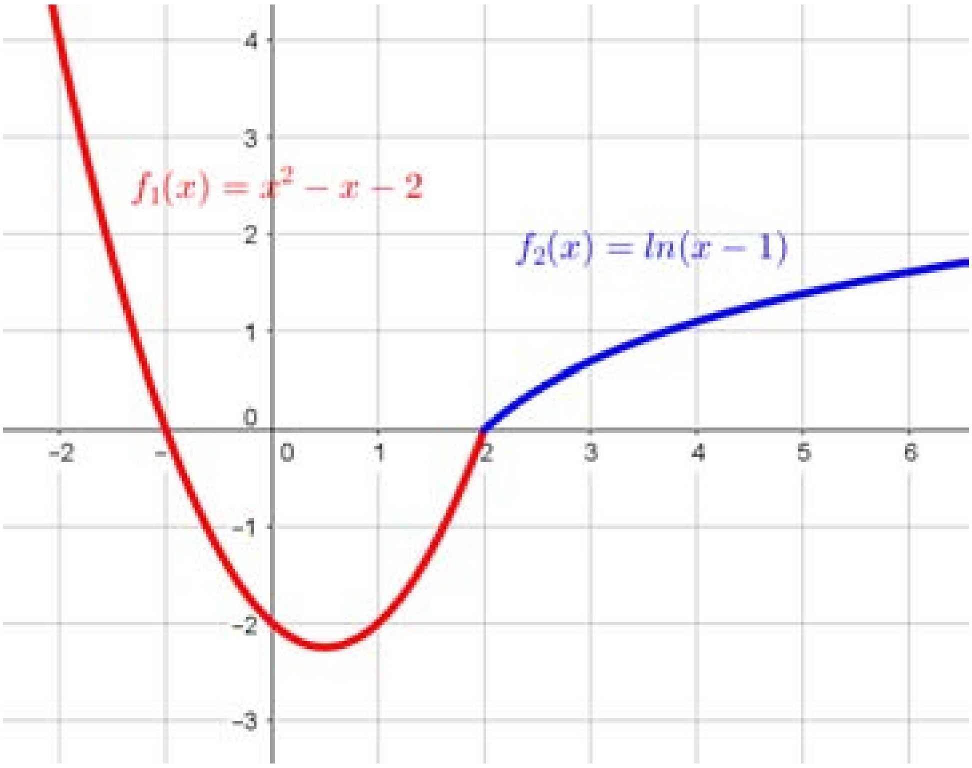
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & si\ x \le 1 \\ -2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

que es negativa para cualquier número real.



b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & si\ x\le 2 \\ \ln(x-1) & si\ x>2 \end{cases}$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Su función derivada es $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x>2 \end{cases}$.



3. Una cadena de televisión decide emitir un nuevo programa en la franja horaria de las 17:00 horas a las 21:00 horas. El porcentaje P de audiencia de la primera emisión en función del tiempo t, medido en horas viene dado por la función:

$$P(t)=\frac{1}{5}\left(-t^3+49t^2-760t+3690\right),\ \ 17\le t\le 21$$

Los directivos de la cadena acuerdan que el programa seguirá emitiéndose si en algún momento se consigue un porcentaje de audiencia superior al 20%.

a) Encuentra en qué intervalos de tiempo la audiencia del programa aumentó y en cuales disminuyó.

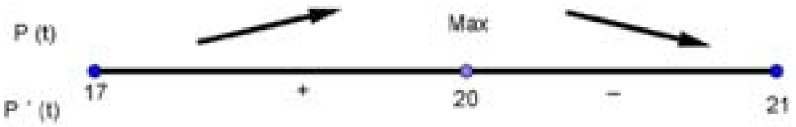
b) En vista de los resultados, ¿seguirá emitiéndose el programa?

a) Para estudiar el crecimiento utilizamos la derivada primera:

$$P'(t)=\frac{1}{5}\left(-3t^2+98t-760\right)=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} t=20 \\ t=\dfrac{38}{3}=12{,}67 \end{cases}$$

El segundo resultado no es válido, no pertenece al intervalo de definición.

Estudiamos el signo de la primera derivada como puede verse en el esquema que sigue.



La audiencia aumenta de las 17 horas a las 20 horas y disminuye de las 20 horas a las 21 horas.

b) Calculamos el porcentaje a las 20 horas:

$$P\,(20) = \frac{1}{5}\left(-\,20^3 + 49 \cdot 20^2 - 760 \cdot 20 + 3690\right) = 18$$

El porcentaje máximo de audiencia se alcanza a las 20 horas y es del 18%, como no llega al 20% no se seguirá emitiendo el programa.

4. **Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:**

a) $f\,(x) = -\,(x-2)^2 + 5$ **c)** $f\,(x) = -\,2x^3 + 15x^2 - 36\,x + 12$ **e)** $f\,(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

b) $f\,(x) = x^2 \cdot \ln x$ **d)** $f\,(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$ **f)** $f\,(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$

a) La función $f\,(x) = -\,(x-2)^2 + 5$ tiene un máximo relativo en el punto (2, 5).

b) La función $f\,(x) = x^2 \cdot \ln x$ tiene un mínimo relativo en el punto $\left(e^{-1/2}, \dfrac{-e^{-1}}{2}\right)$.

c) La función $f\,(x) = -\,2x^3 + 15x^2 - 36\,x + 12$ tiene un máximo relativo en el punto (3, - 15) y un mínimo relativo en el punto (2, - 16).

d) La función $f\,(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$ tiene un mínimo relativo en el punto (0, 3).

e) La función $f\,(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto (0, 0).

f) La función $f\,(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

5. Halla a y b para que la función f (x) = - 2x^2 + ax – b tenga un máximo en (2, 2).

La derivada de f (x) = - 2x^2 + ax – b es f ´ (x) = - 4x + a.

Las condiciones del enunciado son:
- Alcanza un máximo en x = 2: f ´ (2) = 0 $\Rightarrow$ - 8 + a = 0 $\Rightarrow$ a = 8

- Pasa por (2, 2): f (2) = 2 $\Rightarrow$ - 8 + 2a – b = 2 $\Rightarrow$ 2a – b = 10

Resolviendo el sistema que sigue, obtenemos:

$$\begin{cases} a = 8 \\ 2a - b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$$

6. Determina el valor de a para que la función $f\,(x) = x \cdot \ln \frac{x}{a}$, a > 0 tenga un mínimo relativo en x = 1.

Para que la función f (x) tenga un mínimo en x = 1, se debe verificar que f ´ (1) = 0. La derivada de $f\,(x) = x \cdot \ln \frac{x}{a}$ es $f\,'(x) = \ln \frac{x}{a} + 1$

Imponemos la condición f ´ (1) = 0:
$$f\,'(1) = \ln \frac{1}{a} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{1}{a} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow a = e$$

Con la derivada segunda comprobamos que se trata de un mínimo: $f\,''(x) = \frac{1}{x}$ y $f\,''(1) = 1 > 0$.

7. La función f (x) = x^3 + mx^2 + n tiene un valor mínimo relativo igual a 7 en el punto de abscisa x = 3. Determina los valores de los parámetros m y n. ¿Tiene algún valor máximo relativo? ¿Cuánto vale?

La derivada de f (x) = x^3 + mx^2 + n es f ´ (x) = 3x^2 + 2mx. Se cumplirá f (3) = 7 y f ´ (3) = 0.

Operando:
$f\,(3) = 7 \quad \Rightarrow \quad 27 + 9m + n = 7 \quad \Rightarrow \quad 9m + n = -20$
$f\,'(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27 + 6m = 0 \quad \Rightarrow \quad 6m = -27$

Resolviendo el sistema que sigue, obtenemos:

$$\begin{cases} 9m + n = -20 \\ 6m \qquad = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{9}{2} \\ n = \dfrac{41}{2} \end{cases}$$

La función es $f\,(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{41}{2}$.

Veamos si tiene algún máximo relativo:

$$f\,'(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \quad (mínimo) \end{cases}$$

La derivada segunda es f ´´ (x) = 6x – 9 y f ´´ (0) = - 9 < 0. Por tanto, en el punto $\left(0, \dfrac{41}{2}\right)$ la función tiene un máximo relativo.

8. Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$C(x) = 0{,}2x^2 - 50x + 2500$

Si cada bolso se vende a 90 euros, se pide:
a) Determina la función que expresa los beneficios (ingresos – costes) en función de x, número de unidades producidas.

b) ¿Cuántas unidades deben venderse para que el beneficio sean máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

a) La función que da los costes de producción es C (x) = $0{,}2x^2 - 50x + 2500$.

La función que expresa los ingresos por las ventas de x bolsos es I (x) = 90x.

La función beneficio, B (x) = I (x) – C (x), es: B (x) = 90x – ($0{,}2x^2$ – 50x + 2500), es decir:

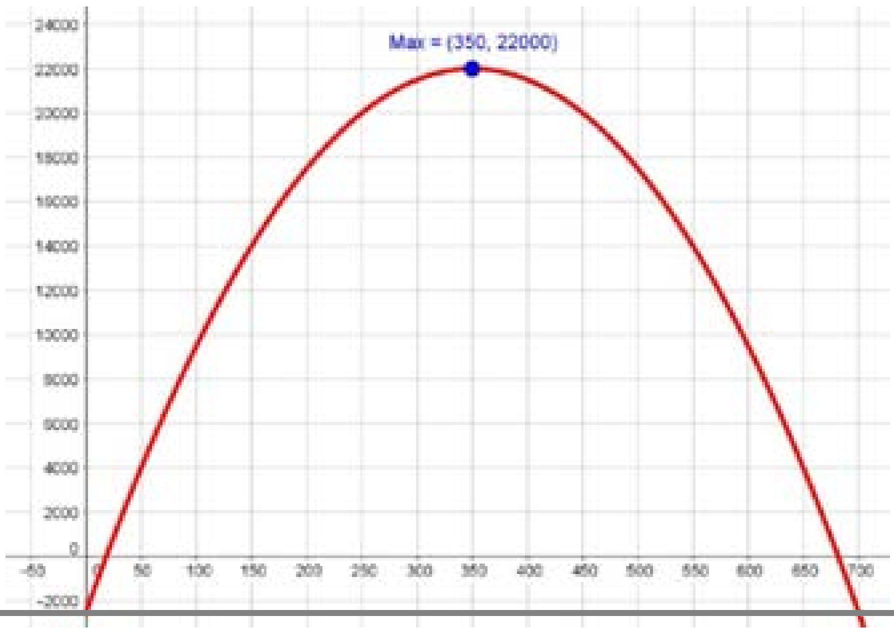
$$B(x) = -0{,}2x^2 + 140x - 2500$$

b) Para obtener el beneficio máximo, igualamos a cero la derivada:

$B\,'(x) = -0{,}4x + 140 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 350$ unidades.

Como B ´´ (x) = - 0,4 < 0, el valor obtenido corresponde a un máximo.

El beneficio máximo es B (350) = - 0,2 · $(350)^2$ + 140 · 350 – 2500 = 22 000 euros.



9. En una almazara (factoría donde se obtiene aceite) el coste medio por litro, en euros, que supone la fabricación de x litros de una determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C\ (x) = 0{,}002x^2 - 5x + 3127$$

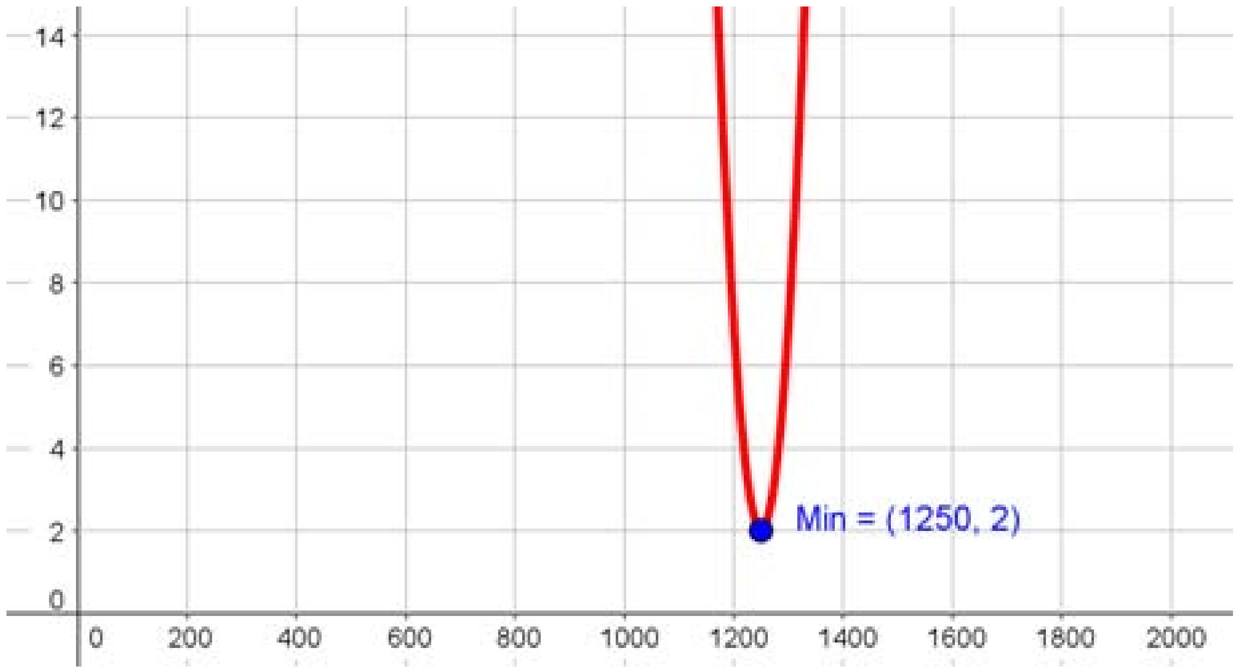
Determina el número de litros que han de producirse para minimizar dicho coste medio por litro y el valor mínimo del citado coste medio.

Para obtener el mínimo coste medio por litro derivamos e igualamos a cero:

$C\,'\,(x) = 0{,}004x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1250$

Con la derivada segunda comprobamos que se trata de un mínimo: $C\,''\,(x) = 0{,}004 > 0$.

Para minimizar el coste medio por litro han de producirse 1250 litros y el valor mínimo del coste medio por litro es de $C\ (1250) = 0{,}002 \cdot 1250^2 - 5 \cdot 1250 + 3127 = 2$ euros.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 193

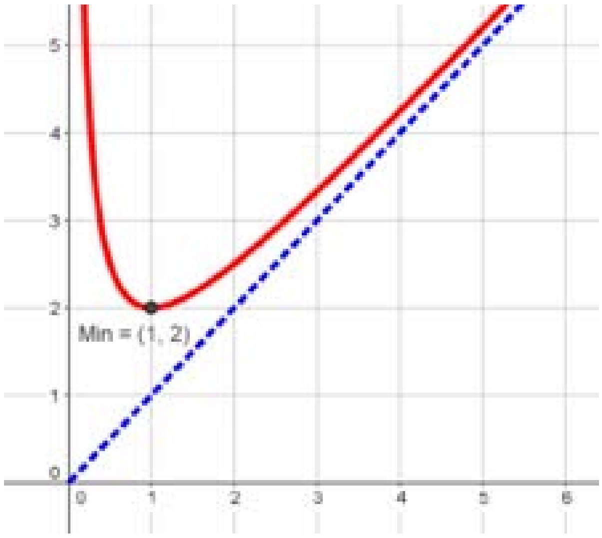
10. ¿Cuál es el número positivo que sumado con su recíproco da una suma mínima?

Llamamos x al número buscado y 1/x a su recíproco. La función a optimizar es $f\ (x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Obtenemos las dos primeras derivadas: $f\,'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ y $f\,''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

Los valores que anulan la primera derivada son:

$$f\,'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$



Como $f\,''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2 > 0$, para x = 1 la función tiene un mínimo relativo

Por tanto, el número positivo que sumado con su recíproco da una suma mínima es 1; y el valor de la citada suma mínima es 2.

El valor mínimo y otras características de la función $f\,(x) = x + \dfrac{1}{x}$, con x > 0, pueden verse en la gráfica.

11. Descompón el número 60 en dos sumandos tales que el triple del cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese mínimo?

Sean x y 60 – x los números que tenemos que buscar.

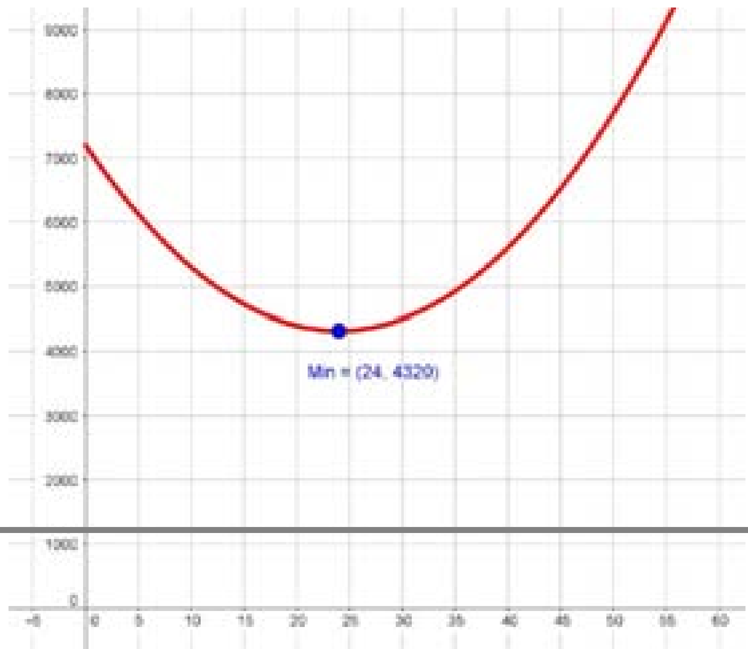
La función a optimizar es $S(x) = 3x^2 + 2(60 - x)^2$, es decir, $S(x) = 5x^2 - 240x + 7200$.

Anulamos la primera derivada: $S\,'(x) = 10x - 240 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 24$.

La segunda derivada es $S\,''(x) = 10 > 0$, por tanto, el valor obtenido pertenece a un mínimo.

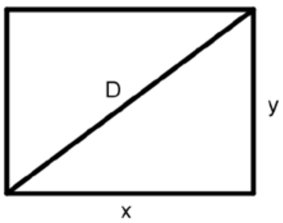
Los números buscados son 24 y 36.

El valor del mínimo es $S(24) = 5 \cdot 24^2 - 240 \cdot 24 + 7200 = 4320$ o $3 \cdot 24^2 + 3 \cdot 36^2 = 4320$.



12. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 metros, ¿cuál es el que tiene diagonal menor?

Sea el rectángulo de lados x e y, cuya diagonal designamos por D.



La función a minimizar es $D\,(x,\,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La condición que relaciona a las variables x e y es 2x + 2y = 12, es decir, y = 6 – x.

Sustituimos la relación anterior en la función y obtenemos:

$$D\,(x) = \sqrt{x^2 + (6-x)^2} \quad \Rightarrow \quad D\,(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

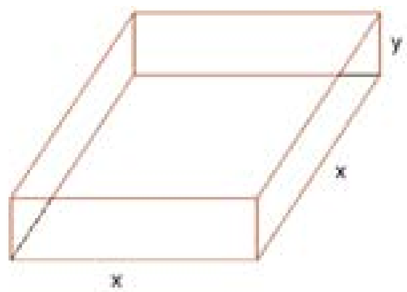
Para obtener el mínimo derivamos e igualamos a cero:

$$D\,'\,(x) = \frac{4x - 12}{2\sqrt{2x^2 - 12x + 36}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Si un lado del rectángulo mide 3 metros el otro lado medirá y = 6 – 3 = 3 metros. Por tanto, el rectángulo buscado es un cuadrado.

13. Un fabricante de recipientes quiere construir una caja rectangular sin tapa y de base cuadrada, con 108 decímetros cuadrados de material. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo?

Sea x la medida de los lados de la base cuadrada e y la altura de la caja rectangular.



La función a maximizar es, el volumen de la caja, V (x, y) = $x^2 \cdot y$.

La condición que liga a las variables (la superficie de las caras laterales y de la base) es $x^2 + 4xy = 108$.

Despejamos y de la condición anterior, $y = \dfrac{108 - x^2}{4x}$, y sustituimos en la función volumen:

$$V\,(x) = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} \quad \Rightarrow \quad V\,(x) = 27x - \frac{1}{4}x^3$$

Para obtener el máximo derivamos e igualamos a cero:

$$V\,'\,(x) = 27 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\,6 \ (\textit{carece de sentido}) \\ x = 6 \end{cases}$$

Con la derivada segunda comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

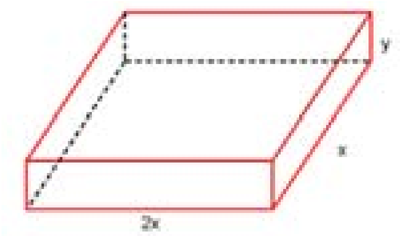
$$V\,''\,(x) = -\frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad V\,'\,(6) = -\,9 < 0$$

Las dimensiones de la caja serán x = 6 dm e $y = \frac{108 - 36}{24} = 3\ dm$.

La capacidad máxima de la caja es $6^2 \cdot 3 = 108$ dm^3.

14. El mismo fabricante quiere diseñar un contenedor rectangular con tapa, que tenga máximo volumen y que sea doble de largo que de anch0. Para ello dispone de 30 m^2 de chapa. ¿Qué medidas de ancho, largo y alto debe tener el contenedor?

Sean x y 2x las medidas de los lados de la base cuadrada e y la altura del contenedor.



La función a maximizar es, el volumen de la caja:
$V(x, y) = (2x) \cdot x \cdot y = 2x^2 \cdot y$.

La condición que liga a las variables (la superficie de las caras laterales, la base y la cara superior) es:

$$2 \cdot 2x \cdot x + 2 \cdot 2x \cdot y + 2 \cdot x \cdot y = 30, \text{ es decir, } 4x^2 + 6xy = 30.$$

Despejamos y de la condición anterior, $y = \frac{30 - 4x^2}{6x}$, y sustituimos en la función volumen:

$$V(x) = 2x^2 \cdot \frac{30 - 4x^2}{6x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = 10x - \frac{4}{3}x^3$$

Para obtener el máximo derivamos e igualamos a cero:

$$V'(x) = 10 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Con la derivada segunda comprobamos que, efectivamente, s etrata de un máximo:

$$V''(x) = -8x \quad \Rightarrow \quad V'\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) < 0$$

El contenedor tiene que tener de ancho $\sqrt{\frac{5}{2}}$ m, $2\sqrt{\frac{5}{2}}$ m de largo y de alto $y = \frac{30 - 4 \cdot \frac{5}{2}}{6\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$ m.

15. El rendimiento de una máquina, a lo largo de las 7 horas que permanece en funcionamiento cada día, viene dado por la función $f(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x$, donde $x \in (0, 7)$ indica el número de horas transcurridas desde que la máquina se pone en marcha.

Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento. Calcula el rendimiento de la máquina en esos dos momentos del día.

Hallamos las dos primeras derivadas de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 21x + 30 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 21$$

Los valores que anulan la primera derivada son:

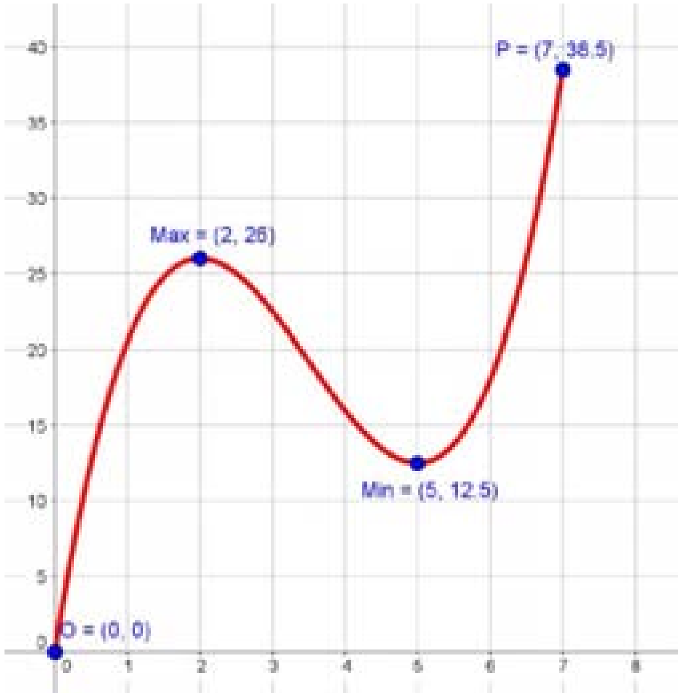
$$3x^2 - 21x + 30 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 7x + 10) = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Para x = 2, la segunda derivada es negativa f ´´ (2) = 6 · 2 – 21 = - 9 < 0. Cuando han transcurrido 2 horas el rendimiento es máximo.

Para x = 5, la segunda derivada es positiva f ´´ (5) = 6 · 5 – 21 = 9 > 0. Cuando han transcurrido 5 horas el rendimiento es mínimo.

El rendimiento máximo es f (2) = $2^3 - 10{,}5 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 = 26$. El rendimiento mínimo es f (5) = $5^3 - 10{,}5 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 = 12{,}5$.

En el dibujo de la función en el intervalo [0, 7] podemos ver que el rendimiento mínimo (absoluto) se alcanza cuando se arranca la máquina y el rendimiento máximo (absoluto) cuando concluye su jornada de trabajo.



16. Los beneficios en miles de euros obtenidos en un gimnasio inaugurado hace 5 años viene dados por la función f (x) = $2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$, donde x ∈ [0, 5] es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando el gimnasio desde su apertura.

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y cuánto vale ese beneficio máximo?

b) El cuarto año de funcionamiento se produce una renovación general de las instalaciones del gimnasio. Explica razonadamente, en términos de aumento de beneficio, si dicha renovación tuvo éxito.

a) Las dos primeras derivadas de la función son:

f ´ (x) = $6x^2 - 30x + 24$ f ´´ (x) = 12x – 30

Los valores que anulan la primera derivada son:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Para x = 4, la segunda derivada es $f''(4) = 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0$ y en el punto (4, 10) la función tiene un mínimo.

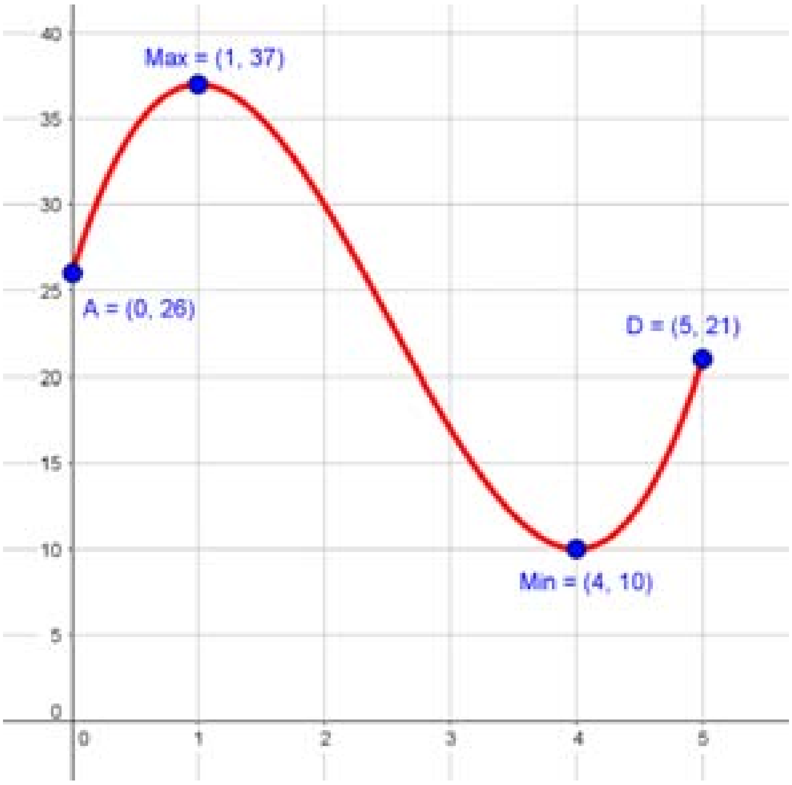
Para x = 1, la segunda derivada es $f''(1) = 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0$ y en el punto (1, 37) la función tiene un máximo.

Por tanto, el máximo se alcanza para x = 1, es decir, al cumplirse un año desde la apertura. El beneficio máximo alcanzado es de 37 000 euros.

b) Como puede verse en la gráfica de la función, en el cuarto año se produce el beneficio mínimo que es de 10 000 euros, año en el que se hace una renovación general de las instalaciones. La renovación tuvo éxito ya que en el quinto año obtuvo unos beneficios de 21 000 euros.

La renovación de las instalaciones supuso un aumento del beneficio de 21 000 – 10 000 = 11 000 euros.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



17. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 80$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

d) $f(x) = (x^2 - 14) \cdot e^x$

e) $f(x) = \ln(x + 4)$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

a) La función f (x) = $3x^2 - 2x^3$ es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) La función f (x) = $x^4 - 24x^2 + 80$ es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-2, 2)$. Tiene puntos de inflexión en (- 2, 0) y (2, 0).

c) La función $f(x) = \frac{2}{x+3}$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-3, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

d) d) La función f (x) = $(x^2 - 14) \cdot e^x$ es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-6, 2)$. Tiene puntos de inflexión en $\left(-6, 22 \cdot e^{-6}\right)$ y $\left(2, -10 \cdot e^2\right)$

e) La función f (x) = ln (x + 4) es cóncava hacia las y negativas en $(-4, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

f) La función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ es cóncava hacia las y positivas en todo R y carece de puntos de inflexión.

18. Dada la función f (x) = $x^3 - kx^2 + x - 1$; halla k para que tenga un punto de inflexión en x = 2/3.

Las derivadas de la función f (x) = $x^3 - kx^2 + x - 1$ son:

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx + 1 \text{ y } f''(x) = 6x - 2k$$

Se cumplirá:

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot \frac{2}{3} - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

19. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva f (x) = $4x^3 - 12x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

Las derivadas de de la función f (x) = $4x^3 - 12x^2 - 10$ son:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x \text{ y } f''(x) = 24x - 24$$

Anulamos la segunda derivada: 24x – 24 = 0, entonces x = 1.

Las coordenadas del punto de tangencia (que coincide con el de inflexión) es (1, f (1)) = (1, - 18).

La pendiente de la recta tangente es f ´ (1) = - 12.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - (-18) = -12 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -12x - 6 \quad \Rightarrow \quad 12x + y = -6$$

20. Calcula los coeficientes de f (x) = $ax^2 + be^{2x} + c$, si la función tiene un punto de inflexión en x = 0 con tangente x – y = 1.

Las derivadas de de la función f (x) = ax^2 + be^{2x} + c son:

$$f\,'(x) = 2ax + 2be^{2x} \text{ y } f\,''(x) = 2a + 4be^{2x}$$

Las condiciones del enunciado se traducen en f (0) = - 1, f ´ (0) = 1 y f ´´ (0) = 0.

Imponiendo las condiciones anteriores, operamos y obtenemos:

$$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

21. Las ganancias producidas por una máquina embotelladora de agua, que ha durado 6 años, se estima por la función f (x) = ax^3 + bx^2, 0 ≤ x ≤ 6 [f (x) representa la ganancia (en miles de euros) a los x años de funcionamiento, a y b son constantes].

a) Determina el valor de a y b, si se sabe que la función f (x) tiene un punto de inflexión en el punto (2, 32).

b) Si a = - 2 y b = 12, calcula el año en el que la máquina ha producido la mayor ganancia y el valor de dicha ganancia. Para estos valores de a y b representa la función f (x) en [0, 6].

a) Las derivadas de la función f (x) = ax^3 + bx^2 es f ´ (x) = 3ax^2 + 2bx y f ´´ (x) = 6ax + 2b.

Se cumplirá:

$$f\,(2) = 32 \;\Rightarrow\; 8a + 4b = 32 \;\Rightarrow\; 2a + b = 8$$
$$f\,''(2) = 0 \;\Rightarrow\; 12a + 2b = 0 \;\Rightarrow\; 6a + b = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

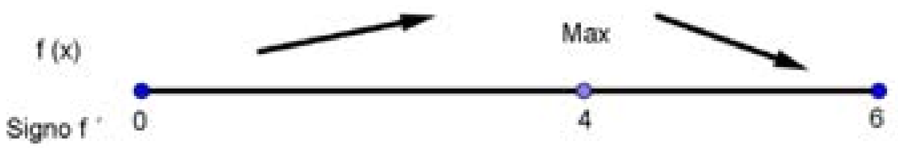
$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 12 \end{cases}$$

b) La función es f (x) = - 2x^3 + 12x^2, 0 ≤ x ≤ 6.

Para determinar los extremos relativos igualamos a cero la primera derivada:

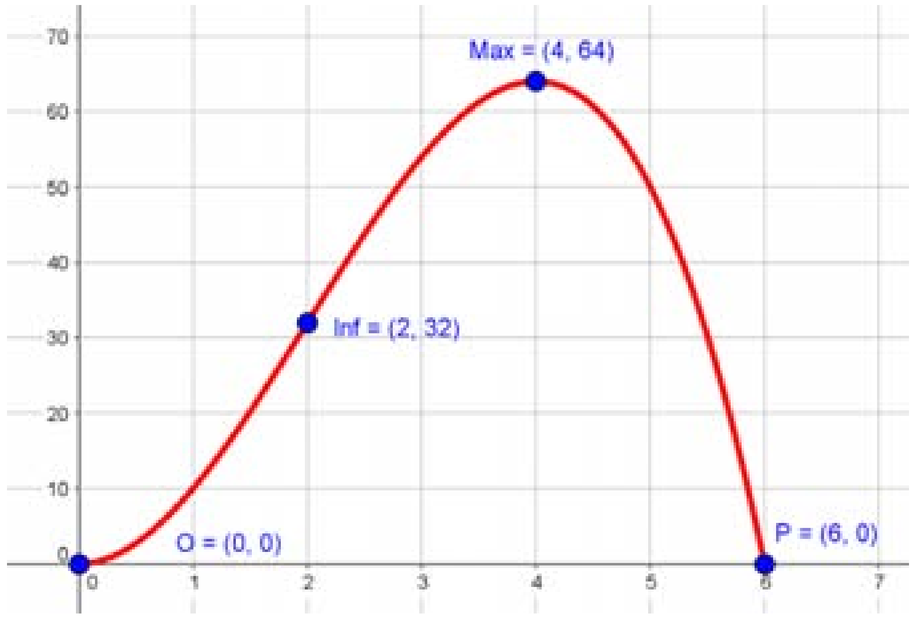
$$f\,'(x) = -6x^2 + 24x = -6x(x-4) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El esquema que sigue aparece el estudio del signo de f ´ (x):



El punto (4, 64) es un máximo relativo y el máximo absoluto en [0, 6] ya que f (0) = 0 y f (6) = 0.

La máquina ha producido la mayor ganancia el cuarto año, y esta ascendió a 64 000 euros.



22. Halla los coeficientes a, b, c y d de la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es 3x + y = 3 y que la función tiene un extremo relativo en x = 0.

22. Las derivadas de la función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ son:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{y} \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Las condiciones del enunciado se traducen en f (1) = 0, f ´´ (1) = 0, f ´ (1) = - 3 y f ´ (0) = 0.

Imponiendo las condiciones anteriores, operamos y obtenemos:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 194

1. Según los datos facilitados por el Instituto Nacional de Estadística, el número de nacimientos en una determinada zona geográfica, durante los últimos 25 años, se justa a la función siguiente:

$$N(t) = t^3 - 36t^2 + 240t + 8000, \; 1 \le t \le 25$$

donde N es el número de nacimientos y t es el año objeto de estudio. Se pide:

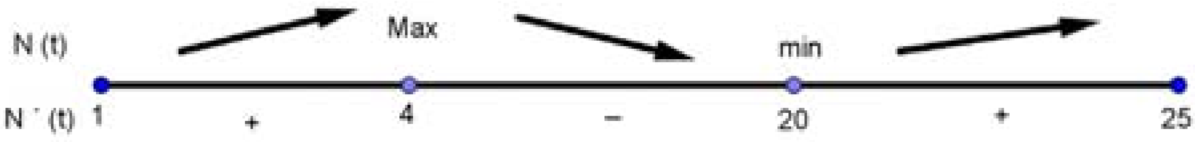
a) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de nacimientos en los 25 años.

b) ¿En qué años se obtienen el número máximo y el número mínimo de nacimientos? ¿Cuáles son dichos valores máximo y mínimo?

a) Para estudiar el crecimiento, utilizamos la primera derivada:

$$N\,'(t) = 3t^2 - 72t + 240 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 20 \end{cases}$$

El signo de la primera derivada puede verse en el esquema que sigue.



El número de nacimientos creció entre los años 1º y 4º y entre los años 20º y 25º. Decreció entre los años 4º y 20º.

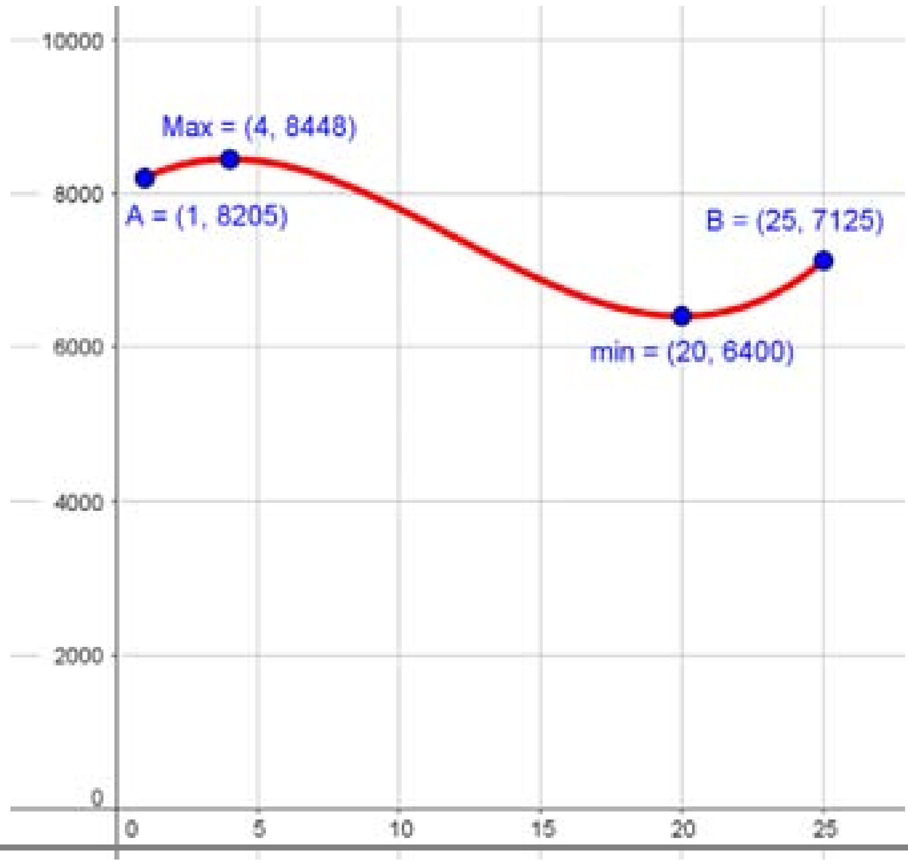
b) Hallamos los valores de la función en los extremos relativos, t = 4 y t = 20 y en los extremos del intervalo [1, 25], dominio de definición de la función. Obtenemos:

N (1) = 8205; N (4) = 8448; N (20) = 6400 y N (25) = 7125.

El número máximo de nacimientos ascendió a 8448 y se obtuvo en el 4º año.

El número mínimo de nacimientos fue 6400 y se obtuvo el año 20º.

Todo lo anterior puede observarse en la gráfica.



2. Sea y = f (x) una función polinómica de grado 3, con un máximo en (0, 0) y un mínimo en (2, - 4). Determina la expresión de la función y haz una gráfica aproximada de ella.

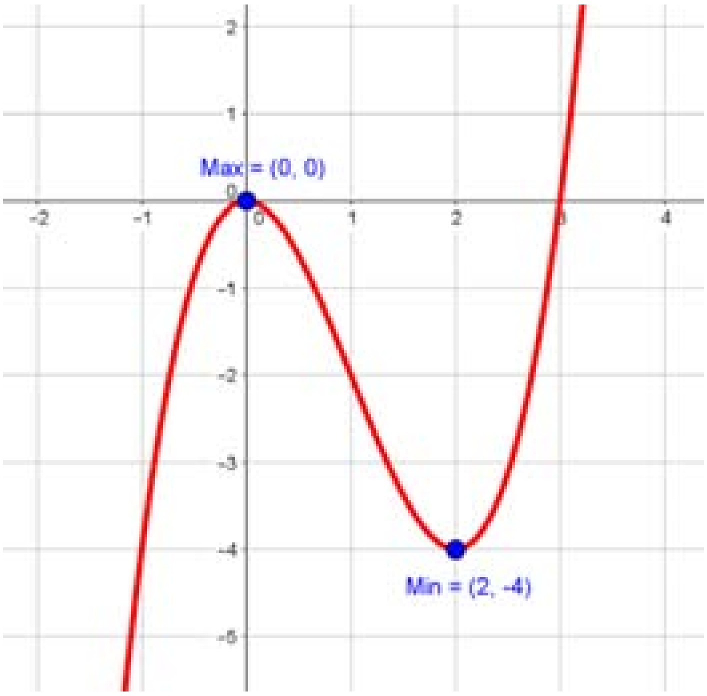
Sea f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ la función buscada. Su derivada será f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$.

Las condiciones del enunciado son f (0) = 0, f (2) = - 4, f ´ (0) = 0 y f ´ (2) = 0.

Resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

La función es f (x) = $x^3 - 3x^2$ y su gráfica puede verse en la imagen.



3. Estudia la monotonía y la curvatura de las funciones:

a) f (x) = $x \cdot (5 - x)^2$ **b) f (x) = $x^2 \cdot e^{-x}$**

a) Para estudiar la monotonía de la función f (x) = $x \cdot (5 - x)^2 = x^3 - 10x^2 + 25x$ utilizamos la primera derivada f ´ (x) = $3x^2 - 20x + 25$.

La primera derivada f ´ (x) = $3x^2 - 20x + 25$ se anula para x = 5 y x = 5/3. Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (5, +\infty)$.

- La función y = f (x) es decreciente en $\left(\frac{5}{3}, 5\right)$

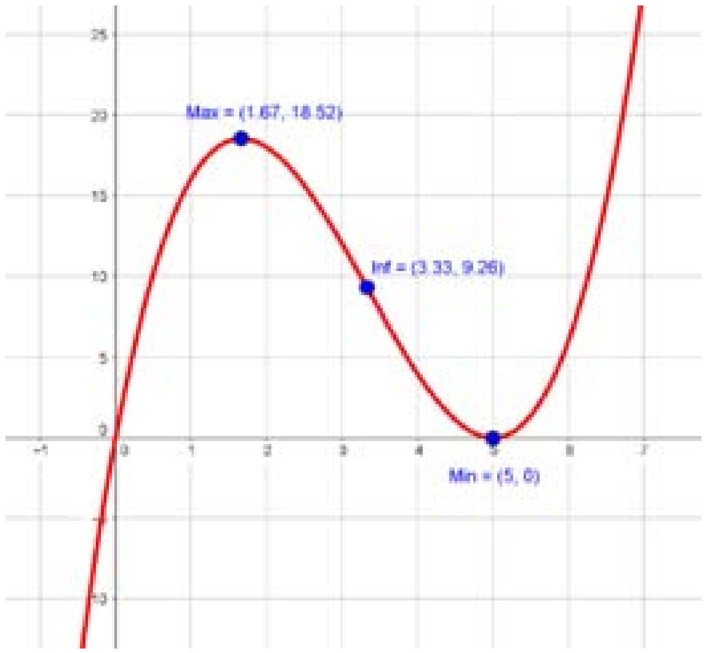
Para estudiar la monotonía de la función f (x) = x · (5 – x)^2 = x^3 – 10x^2 + 25x utilizamos la segunda deivada f ´´ (x) = 6x - 20.

La segunda derivada f ´´ (x) = 6x – 20 se anula para 10/3. Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$.

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y positivas en $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$

Todo lo anterior puede verse en la gráfica de la función.



b) Para estudiar la monotonía de la función f (x) = x^2 · e^{-x} utilizamos la primera derivada f ´ (x) = (2x - x^2) · e^{-x}

La primera derivada f ´ (x) = (2x - x^2) · e^{-x} se anula para x = 0 y x = 2. Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es creciente en $(0, 2)$.

- La función y = f (x) es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Para estudiar la concavidad de la función f (x) = x^2 · e^{-x} utilizamos la segunda derivada f ´´ (x) = (x^2 – 4x + 2) · e^{-x}

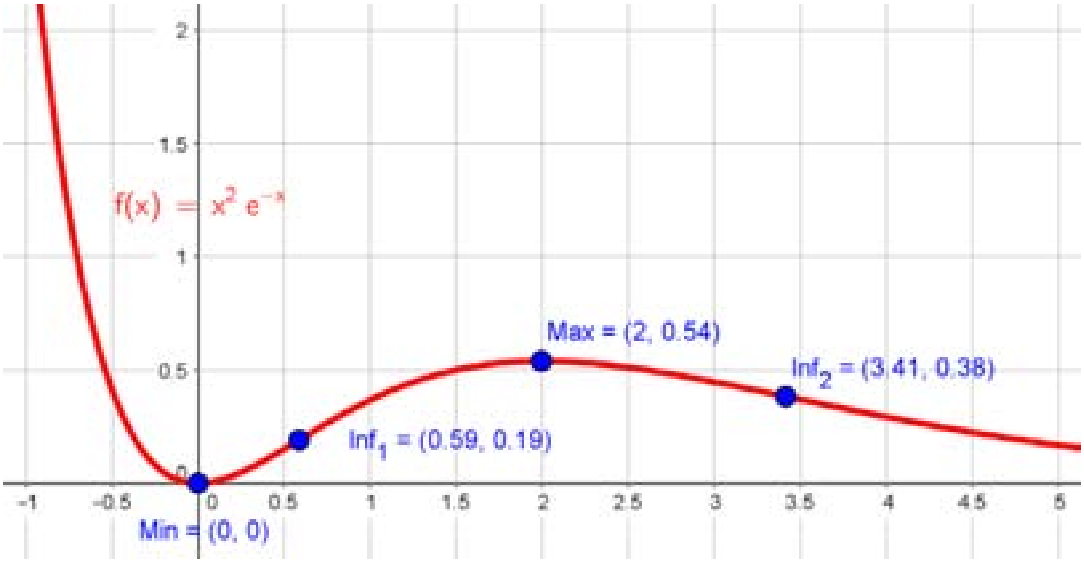
La segunda derivada f ´´ (x) = (x^2 – 4x + 2) · e^{-x} se anula para $x = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ y $x = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}14$.

Estudiamos su signo y obtenemos:

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y negativas en $\left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)$.

- La función y = f (x) es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica de la función.



4. Sean x e y dos números reales tales que x + y = 10. ¿Cuál es el mayor valor posible del producto (x + 1) · (y – 1)?

Sea P (x, y) = (x + 1) · (y – 1) la función a maximizar.

De la condición x + y = 10 despejamos y = 10 – x y sustituimos en la expresión anterior, obteniendo:

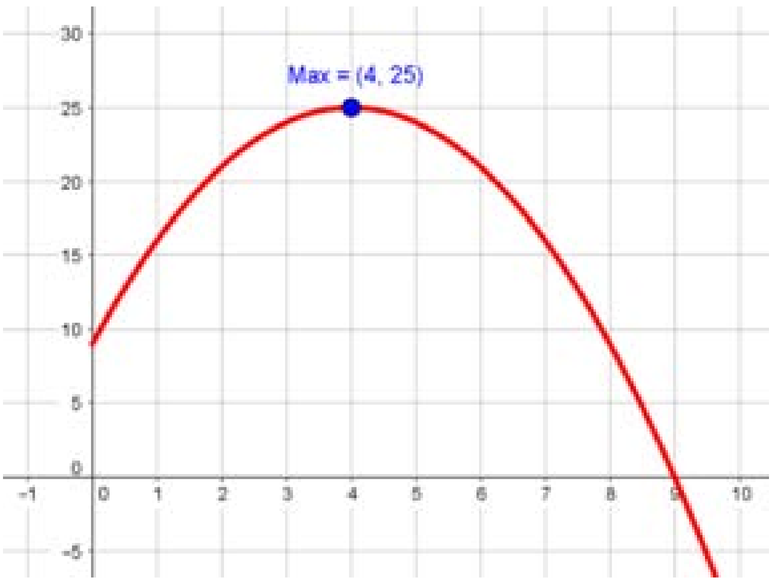
$$P(x) = (x + 1) \cdot (10 - x - 1) \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x + 1) \cdot (9 - x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = -x^2 + 8x + 9$$

Para obtener el máximo, igualamos a cero la primera derivada:

$$P'(x) = -2x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

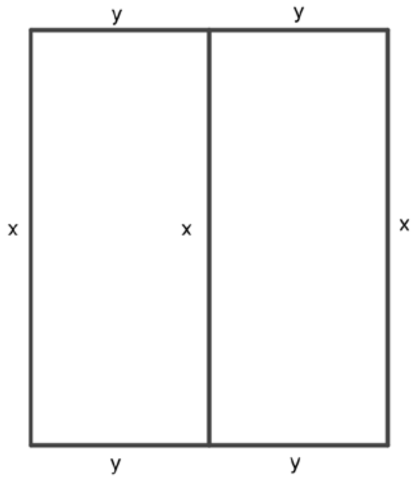
Con la derivada segunda comprobamos que es un máximo: $P''(x) = -2 < 0$.

Los números buscados son 4 y 6, y el máximo valor para el producto es 25.



5. Se quieren vallar dos campos de deporte rectangulares iguales y un lado común con 600 m de valla (se trata de vallar el contorno de ambos y el lado de separación). Halla las dimensiones si los cercados encierran una superficie máxima.

Sean x e y las dimensiones de los cercados, como puede verse en el dibujo.



La función a maximizar es A (x, y) = 2xy.

La relación que liga a las variables x e y es 3x + 4y = 600, es decir, $y = \dfrac{600 - 3x}{4}$

Sustituyendo la expresión anterior, obtenemos:

$$A(x) = 2x \cdot \frac{600 - 3x}{4} \quad \Rightarrow \quad A(x) = 300x - \frac{3}{2}x^2$$

Para obtener el máximo igualamos a cero la primera derivada:

$$A'(x) = 300 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 100$$

Podemos comprobar con la segunda derivada, $A''(x) = -3 < 0$, que se trata de un máximo.

Si x = 100, entonces $y = \dfrac{600 - 3 \cdot 100}{4} = 75$.

Las dimensiones de los cercados serán de x = 100 metros e y = 75 metros.

6. Se desea construir un depósito con forma de prisma rectangular de base cuadrada y con una capacidad de 360 m^3. Los costes por m^2 son los siguientes: 40 euros para el fondo, 30 euros para las paredes laterales y 60 euros para el techo del depósito. Calcula las dimensiones del depósito para que el coste sea el menor posible.

Llamamos x cm a la medida del lado de la base cuadrada de la caja e y cm a la medida de la altura de la caja.

La superficie lateral de la caja es 4xy cm^2 y la superficie de la base y el techo es x^2 cm^2.

La función coste, en euros, que tenemos que minimizar es:

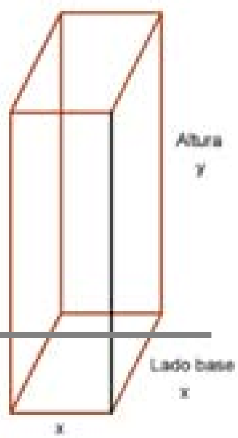
$$C(x, y) = 40x^2 + 4 \cdot 30xy + 60x^2$$

El volumen de la caja es el producto del área de la base por la altura, es decir, x^{2}y cm^3.

Como la capacidad es 360 cm^3, podemos escribir:

$$x^2 y = 360 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{360}{x^2}$$

Sustituyendo en la función coste, obtenemos:



$$C(x) = 100x^2 + \frac{43200}{x}$$

Hallamos las dos primeras derivadas de la función anterior para obtener:

$$C\,'(x) = 200x - \frac{43200}{x^2} \qquad \text{y} \qquad C\,''(x) = 200 + \frac{86400}{x^3}$$

Resolvemos la ecuación C ´ (x) = 0 y obtenemos:

$$200x - \frac{43200}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 200x^3 - 43200 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Comprobamos en la segunda derivada que para x = 6 se obtiene un mínimo:

$$C\,''(6) = 200 + \frac{86400}{6^3} > 0$$

Si el lado de la base mide x = 6 cm, la altura medirá y = $\frac{360}{36} = 10$ cm.

En resumen, las dimensiones del depósito son 6 cm de lado de la base y 10 cm de altura.

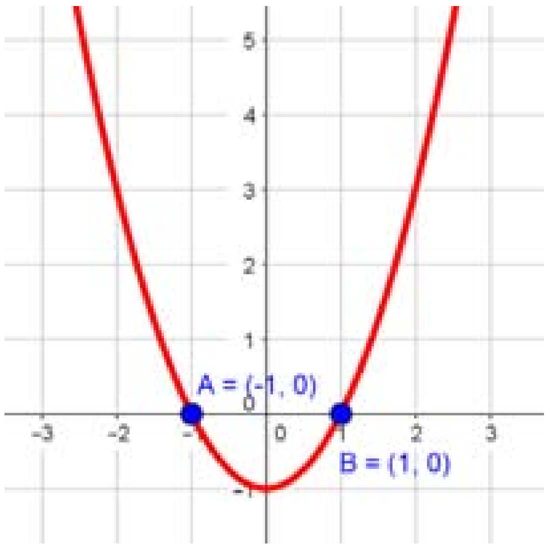
El coste mínimo asciende a $C(6) = 100 \cdot 36 + \frac{4300}{6}$ = 10 800 euros.

7. Sea una función f(x) de la que se conoce su derivada f ´ (x) = $x^2 - 1$.

a) Representa gráficamente f ´ (x).

b) Deduce de la gráfica los intervalos de crecimiento de f (x).

c) Halla la abscisa de los puntos máximos y mínimos de f (x).



a) La gráfica de la función f ´ (x) = $x^2 - 1$ es la parábola del dibujo.

b) La función f (x) es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ al ser f ´ (x) > 0.

La función f (x) es decreciente en el intervalo (- 1, 1) al ser f ´ (x) < 0.

c) La abscisa de los puntos máximos y mínimos son x = - 1 y x = 1; puntos en los cuales f ´ (x) = x^2 - 1 se anula.

8. El saldo de una cuenta bancaria en un periodo de 5 años viene dado por la función:

$$\mathbf{f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84,\ 0 \le t \le 5}$$

siendo t el tiempo en años.

a) Calcula los saldos inicial y final.
b) ¿En qué momento el saldo de la cuenta es máximo? ¿Y cuándo es mínimo?

c) Analiza si en algún momento el saldo es negativo y determina todos los periodos donde se observa un crecimiento del saldo.

a) El saldo inicial es f (0) = $-12 \cdot 0^3 + 90 \cdot 0^2 - 144 \cdot 0 + 84 = 84$ euros.

El saldo final es f (5) = $-12 \cdot 5^3 + 90 \cdot 5^2 - 144 \cdot 5 + 84 = 114$ euros.

b) Para determinar los máximos y los mínimos analizamos las dos primeras derivadas.

La primera derivada es $f'(t) = -36t^2 + 180t - 144$ y se anula para t = 1 y t = 4. La segunda derivada es $f''(t) = -72t + 180$.

Por tanto:

- Si t = 1, $f''(1) = 108 > 0$ y existe un mínimo en el punto (1, 18).

- Si t = 4, $f''(4) = -108 < 0$ y existe un máximo en el punto (4, 180).

c) Estudiamos la monotonía de la función analizando el signo de la primera derivada:

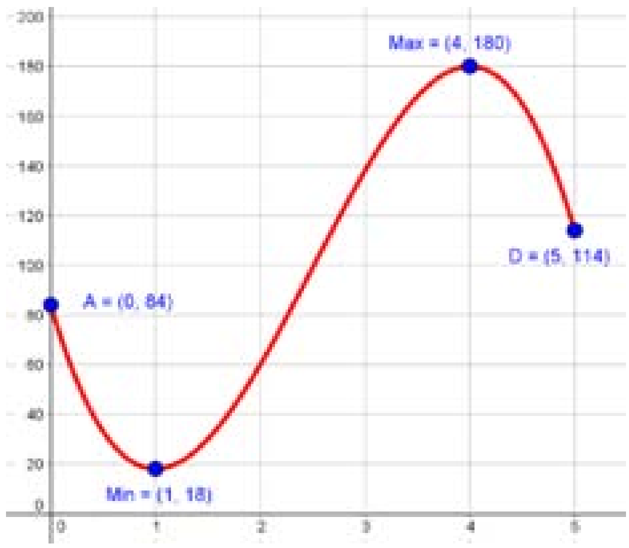
$$f'(t) = -36t^2 + 180t - 144 = -36(t-1)(t-4)$$

En el esquema que sigue aparece el signo de la primera derivada y la monotonía de la función:

c) Hallamos los valores de la función en las abscisas enteras y obtenemos:

t	0	1	2	3	4	5
f (t)	84	18	60	138	180	114

Observamos que la función nunca toma valores negativos. Esto puede verse en la gráfica del dibujo:



9. Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes N (t) que acude un día a un supermercado, en función del número de horas t que lleva abierto, es N (t) = $at^2 + bt$, $0 \leq t \leq 8$, siendo a y b números reales.

Sabiendo que el máximo número de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcula a y b.

El máximo está en el punto (4, 160). Se cumplirá N (4) = 160 y N ´ (4) = 0.

Imponiendo las condiciones llegamos a las relaciones:

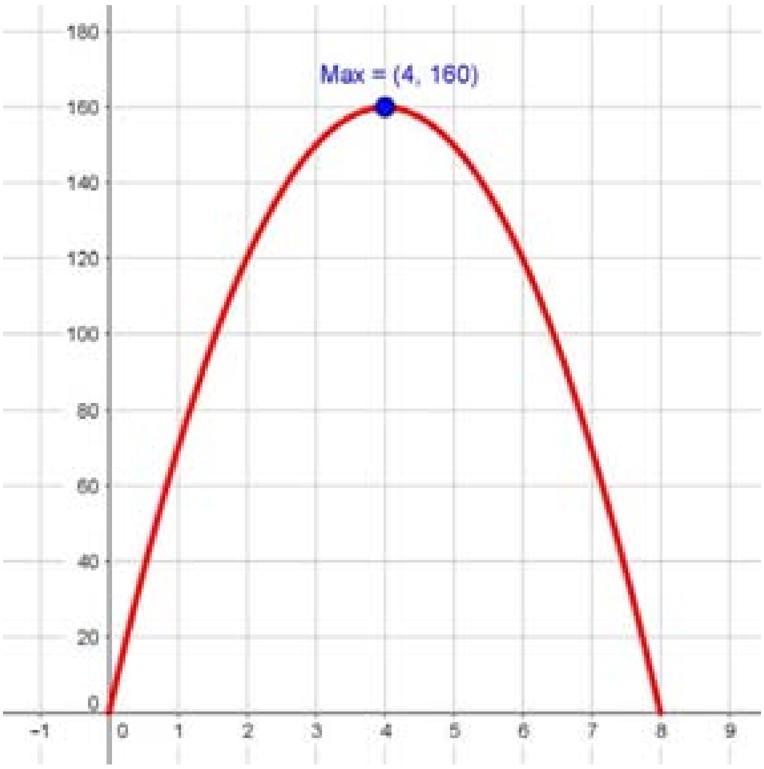
N (4) = 160 $\Rightarrow$ 16a + 4b = 160 $\Rightarrow$ 4a + b = 40

N ´ (4) = 0 $\Rightarrow$ 8a + b = 0

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 4a + b = 40 \\ 8a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 80 \end{cases}$$

La función es N (t) = - $10t^2 + 80t$.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 195

PUNTOS DE INFLEXIÓN

1. Utilizando medios tecnológicos (calculadora gráfica o programa informático) obtén la gráfica de la función f (x) = $4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.

a) Determina los puntos singulares: máximo, mínimo y punto de inflexión. ¿La recta determinada por los extremos relativos, pasa por el punto de inflexión?

b) Si llamamos M al máximo, P al mínimo e I al punto de inflexión, halla la razón de las longitudes de los segmentos MI e IP.

c) ¿Ocurre lo mismo para cualquier función cúbica con tres puntos singulares? ¿Podrías probarlo?

2. Dibuja la gráfica de la función f (x) = $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22$.

a) Halla las coordenadas de los puntos de inflexión, llamándolos B y C. Determina los puntos A y D, donde la recta determinada por B y C corta de nuevo a la gráfica anterior.

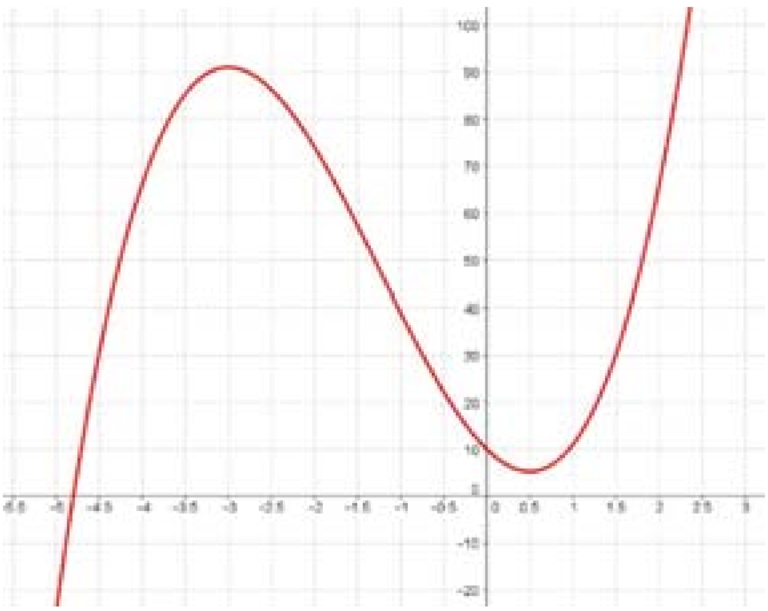
b) Calcula la longitud de los segmentos AB, BC y CD, y determina el valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$.

c) Elige otras funciones de cuarto grado cuya gráfica tenga la misma forma que la gráfica anterior y estudia las mismas razones.

d) Los resultados que has obtenido, ¿se mantienen para cualquier función de cuarto grado con dos puntos de inflexión? ¿Podrías probarlo?

La parte gráfica de estas actividades está resuelta con el programa GeoGebra.

1. La gráfica de la función puede verse en la imagen, después de ajustar adecuadamente la Vista gráfica.



a) Para determinar los puntos singulares hallamos las derivadas de la función f (x) = $4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ y obtenemos:

$f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$ $\qquad$ $f''(x) = 24x + 30$ $\qquad$ $f'''(x) = 24$

Los valores que anulan la primera derivada son x = - 3 y x = 0,5. El valor que anula la segunda derivada es x = - 1,25.

Los puntos singulares de la función son:

Máximo: M (- 3, 91), $\qquad$ Mínimo: P (0,5; 5,25) $\qquad$ Punto de inflexión: I (-1,25; 48,125)

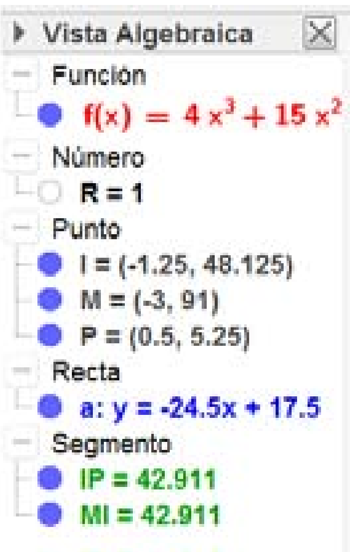
La recta determinada por los extremos relativos, M (- 3, 19) y P (0,5; 5,25), tiene por ecuación:

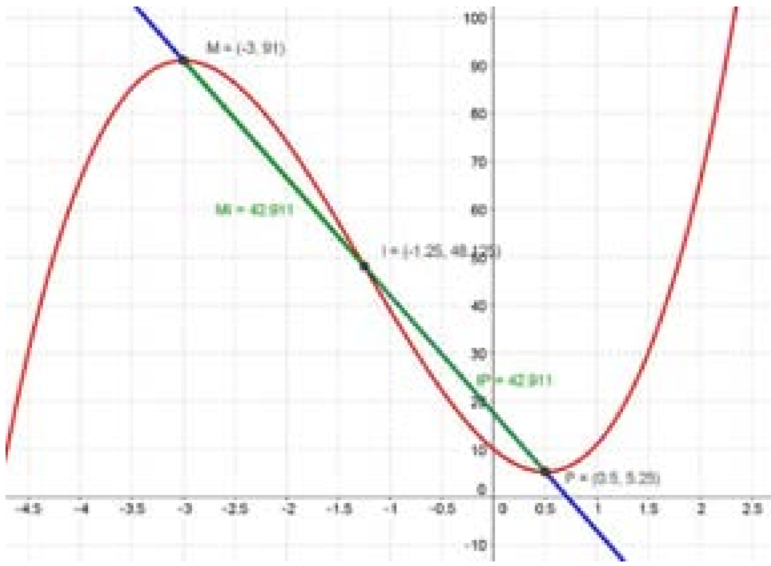
$$y = -24{,}5x + 17{,}5.$$

Comprobamos que la recta citada pasa por el punto de inflexión I (-1,25; 48,125):

$$y(-1{,}25) = -24{,}5 \cdot (-1{,}25) + 17{,}5 = 48{,}125$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.





b) Siendo los puntos: M (- 3, 91), P (0,5; 5,25) e I (-1,25; 48,125), los segmentos MI e IP miden:

$$MI = \sqrt{(-3 + 1{,}25)^2 + (91 - 48{,}125)^2} = \sqrt{3{,}0625 + 1838{,}266} = 42{,}911$$

$$IP = \sqrt{(0{,}5 + 1{,}25)^2 + (5{,}25 - 48{,}125)^2} = \sqrt{3{,}0625 + 1838{,}266} = 42{,}911$$

Como los segmentos tienen la misma longitud, el valor de la razón pedida es 1.

c) Probamos con la función f (x) = $x^3 + 6x^2 - 36x + 29$.

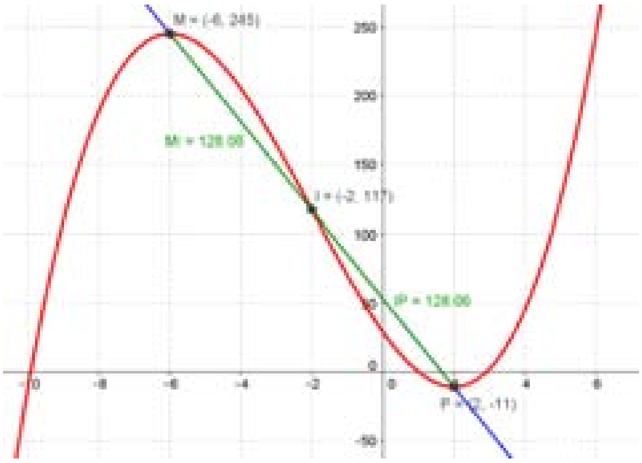
En la imagen puede verse que, en este caso, los puntos son:

Máximo: M (- 6, 245), $\qquad$ Mínimo: P (2, - 11) Punto de inflexión: I (- 2, 117)

Las longitudes de los segmentos MI e IP son:

$$MI = \sqrt{(-6+2)^2 + (245-117)^2} = \sqrt{16 + 16384} = 128{,}06$$

$$IP = \sqrt{(2+2)^2 + (-11-117)^2} = \sqrt{16 + 16384} = 128{,}06$$



Vamos a probar que los resultados obtenidos en las dos funciones anteriores son válidos para cualquier función cúbica con tres puntos singulares, es decir, el punto de inflexión (I) es el punto medio del segmento cuyos extremos son el máximo (M) y el mínimo relativo (P), por tanto, los tres puntos están alineados y los segmentos MI e IP tienen la misma longitud.

Sea la función cúbica f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$.

Anulamos la primera derivada f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$ y obtenemos las abscisas del máximo (x_M) y del mínimo (x_P):

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = \begin{cases} x_P = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \\ x_M = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \end{cases}$$

Anulamos la segunda derivada f ´´ (x) = $6ax + 2b$ y obtenemos la abscisa del punto de inflexión (x_I):

$$x_I = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Comprobamos que la media aritmética de las abscisas del máximo (x_M) y del mínimo (x_P) coincide con la abscisa del punto de inflexión (x_I).

Teniendo en cuenta la relación de Cardano, correspondiente a la ecuación $3ax^2$ $2bx + c = 0$, obtenemos:

$$\frac{x_M + x_P}{2} = \frac{-\frac{2b}{3a}}{2} = -\frac{b}{3a} = x_I$$

También puede comprobarse que la media aritmética de las ordenadas del máximo [y_M = f (x_M)] y del mínimo [y_P = f (x_P)] coincide con la ordenada del punto de inflexión [y_I = f (x_I)].

Las ordenadas del máximo (M) y del mínimo (P) son:

$$f\ (x_m) = a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right) + d$$

$$f\ (x_P) = a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\right) + d$$

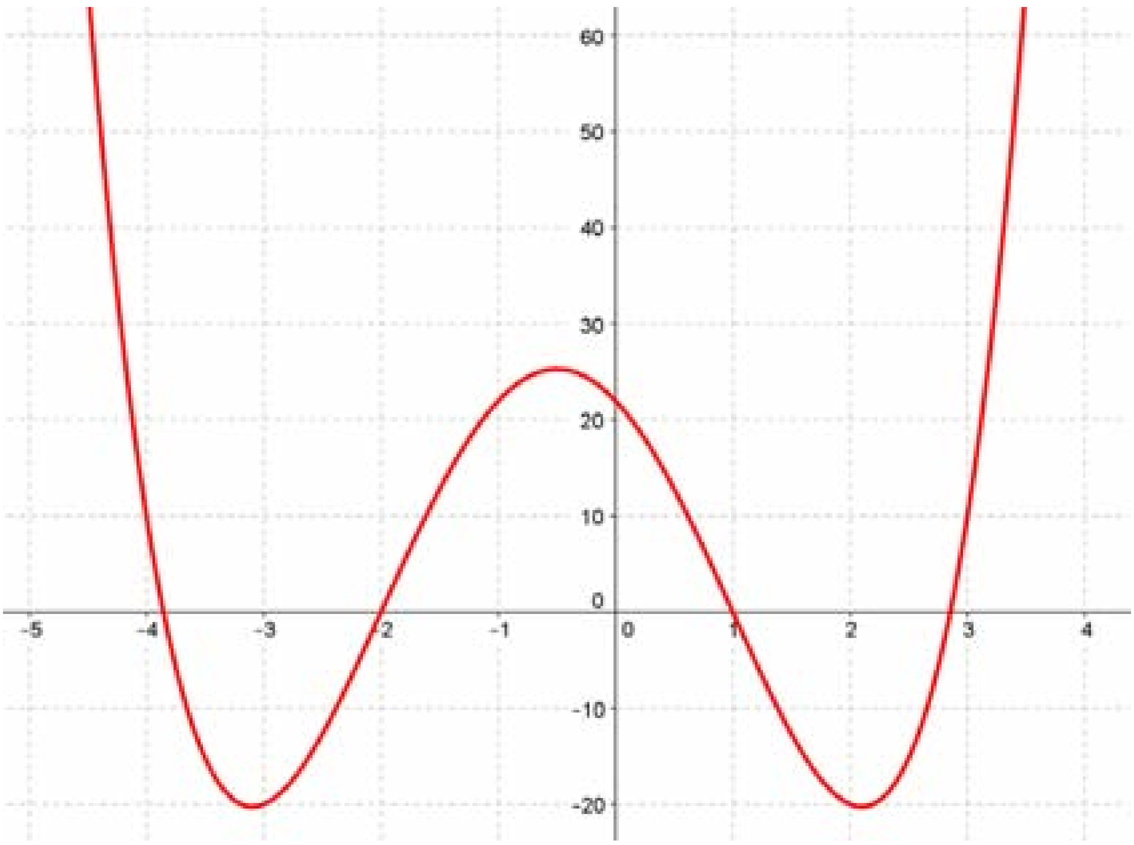
Operando y simplificando obtenemos que la media aritmética de las ordenadas del máximo (M) y del mínimo (P) son:

$$\frac{f\ (x_M) + f\ (x_P)}{2} = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

La ordenada del punto de inflexión es:

$$f\ (x_I) = f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \ldots = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

2. Ajustando la Ventana gráfica obtenemos la gráfica de la función f (x) = $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22$ que puede verse en el dibujo.



a) Para hallar los puntos de inflexión de la función f (x) obtenemos las derivadas:

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 13$ $\qquad f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$ $\qquad f'''(x) = 24x + 12$

Anulamos la segunda derivada y obtenemos:

$$12\,(x^2 + x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_B = -2 \\ x_C = 1 \end{cases}$$

Los puntos de inflexión son:

$x_B = -2;$ $\quad y_B = f(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 - 13 \cdot (-2) + 22 = 0$ $\quad \Rightarrow B(-2, 0)$

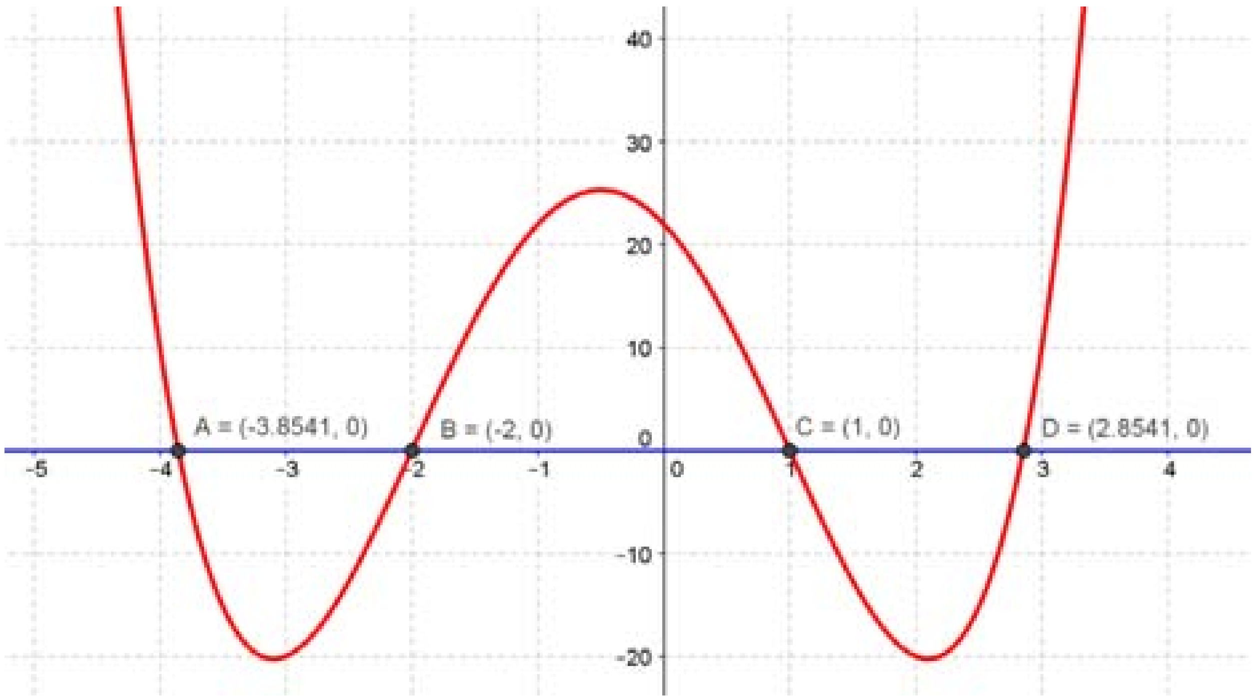
$x_B = 1;$ $\quad y_B = f(1) = (1)^4 + 2 \cdot (1)^3 - 12 \cdot (1)^2 - 13 \cdot (1) + 22 = 0$ $\quad \Rightarrow C(1, 0)$

La recta determinada por B y C es y = 0 y los puntos A y D, donde la recta anterior corta a la gráfica son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 13x + 22 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos los puntos: A (- 3,8541; 0) y D (2,8541; 0).

Los puntos anteriores pueden verse en la gráfica que sigue.



b) Calculamos la longitud de los segmentos AB, BC y CD:

AB = (- 2) – (- 3,8541) = 1,8541   BC = 1 – (- 2) = 3   CD = 2,8541 – 1 = 1,8541

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ *y* $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1,8541}{1,8541} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{3}{1,8541} = 1,6180$$

c) Para la función f (x) = $x^4 - 6x^2 - 6x + 1$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (- 1, 1) y C (1, - 9).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = - 5x – 4.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 2,2361; 7,1803) y D (2,2361; - 15,1803).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{\left(-1-(-2,2361)\right)^2 + \left(1-7,1803\right)^2} = 6,3027$$

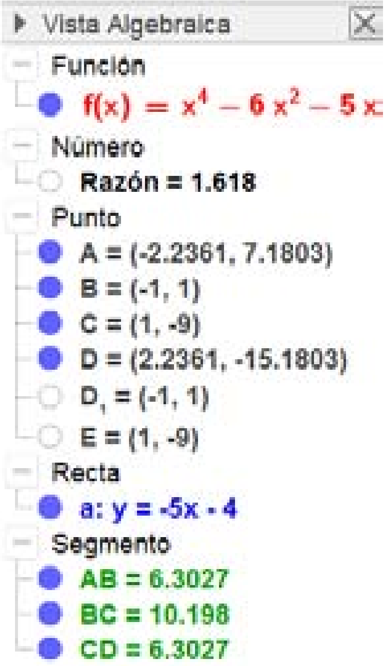
$$BC = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + \left(-9-1\right)^2} = 10,1980$$

$$CD = \sqrt{\left(2,2361-1\right)^2 + \left(-15,1803+9\right)^2} = 6,3027$$

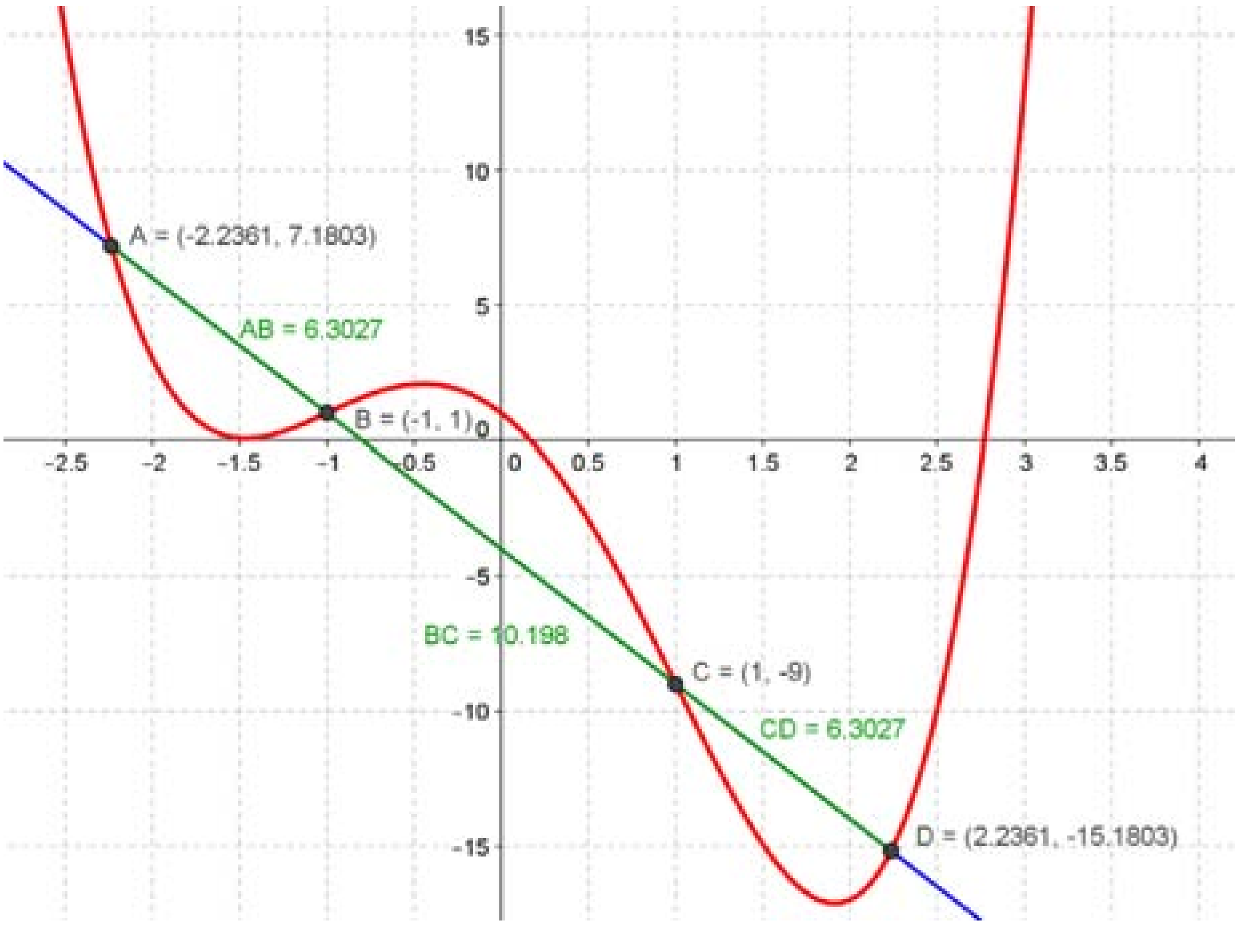
El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ *y* $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6,3027}{6,3027} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{10,1980}{6,3027} = 1,6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Vista Algebraica
Función
f(x) = x^4 − 6 x^2 − 5 x
Número
Razón = 1.618
Punto
A = (-2.2361, 7.1803)
B = (-1, 1)
C = (1, -9)
D = (2.2361, -15.1803)
D1 = (-1, 1)
E = (1, -9)
Recta
a: y = -5x - 4
Segmento
AB = 6.3027
BC = 10.198
CD = 6.3027



A = (-2.2361, 7.1803)
AB = 6.3027
B = (-1, 1)
BC = 10.198
C = (1, -9)
CD = 6.3027
D = (2.2361, -15.1803)

Para la función f (x) = $x^4 - 6x^2 + 5x$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (- 1, - 10) y C (1, 0).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = 5x – 5.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 2,2361; - 16,1803) y D (2,2361; 6,1803).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(-1-(-2{,}2361))^2 + (-10-(-16{,}1803))^2} = 6{,}3027$$

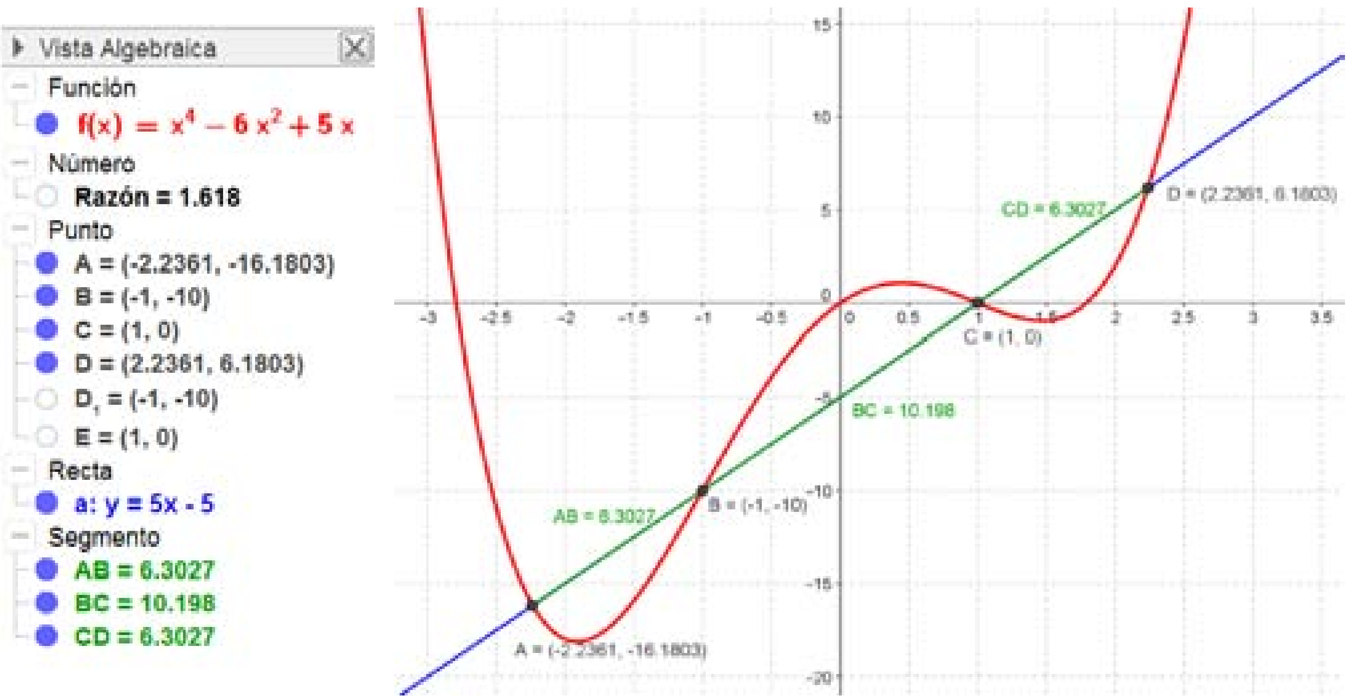
$$BC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-(-10))^2} = 10{,}1980$$

$$CD = \sqrt{(2{,}2361-1)^2 + (6{,}1803-0+9)^2} = 6{,}3027$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6{,}3027}{6{,}3027} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{10{,}1980}{6{,}3027} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Para la función f (x) = $x^4 - 8\,x^3 + 18x^2 - 12x + 24$, obtenemos:

Puntos de inflexión: B (1, 23) y C (3, 15).

La ecuación de la recta determinada por los puntos de inflexión es y = - 4x + 27.

Los puntos A y D que la recta anterior corta a la gráfica son: A (- 0,2361; 27,9443) y D (4,2361; 10,0557).

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{(1-(-0{,}2361))^2 + (23-27{,}9443)^2} = 5{,}0964$$

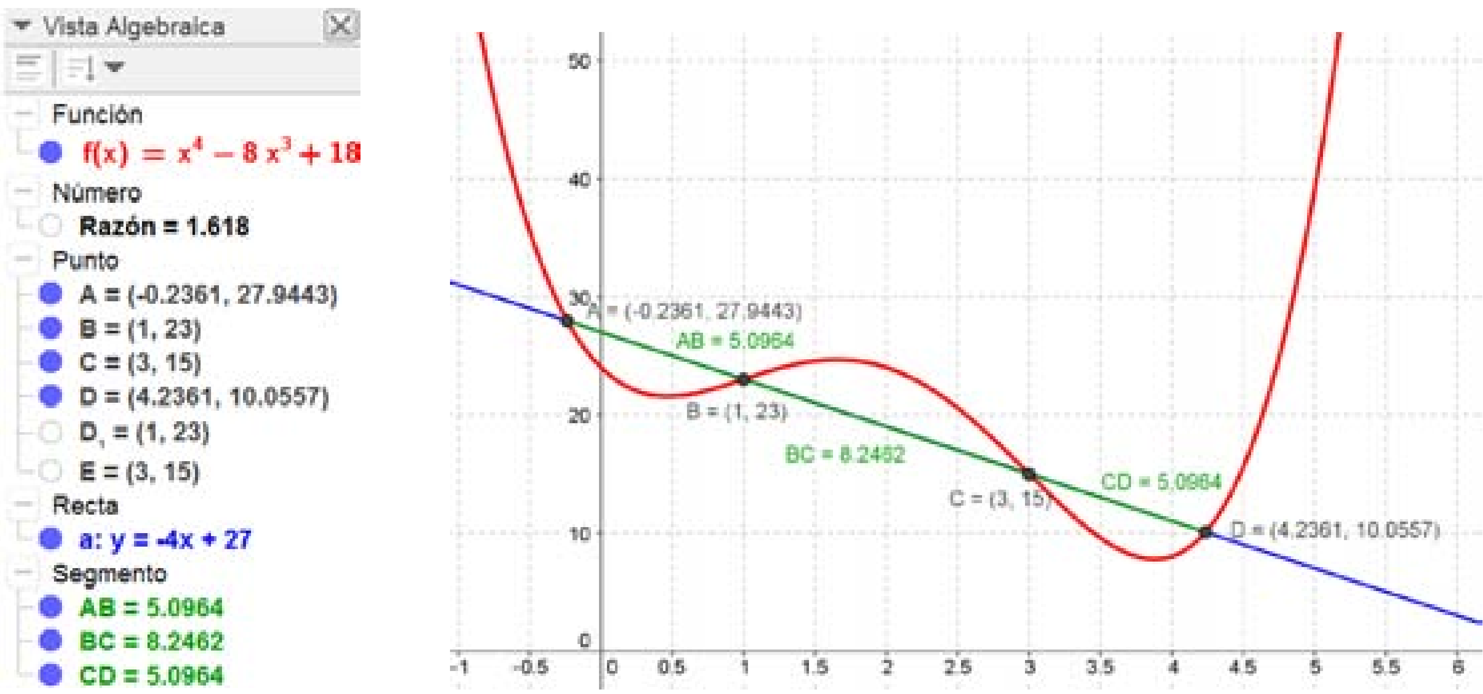
$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (15-23)^2} = 8{,}2462$$

$$CD = \sqrt{(4{,}2361-3)^2 + (10{,}0557-15)^2} = 5{,}0964$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5{,}0964}{5{,}0964} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{8{,}2462}{5{,}0964} = 1{,}6180$$

Todo lo anterior puede verse en las imágenes que siguen.



Vamos a probar que las razones anteriores se mantienen para cualquier función polinómica de cuarto grado cuya gráfica tenga la misma forma que las estudiadas con anterioridad.

Para simplificar los cálculos hacemos que la recta que une los cuatro puntos de corte con la gráfica, ABCD, sea el eje OX (y = 0). Tomamos los puntos de inflexión B (0, 0) y C (a, 0), con a > 0. El valor de las razones anteriores se mantendrá, sólo cambiará el valor de los segmentos AB, BC y CD.

Sea y = f (x) la función buscada, con B (0, 0) y C (a, 0) los puntos de inflexión, entonces:

$$f''(x)\ x \cdot (x - a) = x^2 - ax$$

Integrando, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + b$$

$f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{ax^3}{6} + bx + c$, con b y c constantes reales.

Calculamos las constantes b y c haciendo que los puntos B (0, 0) y C (a, 0) pertenezcan a la gráfica de la función y = f (x), obtenemos:

$$b = \frac{a^3}{12} \text{ y } c = 0.$$

La función es: $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{ax^3}{6} + \dfrac{a^3x}{12}$, es decir, $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2a}{12}x^3 + \dfrac{a^3}{12}x$

Hallamos los puntos de corte de de y = f (x) con la recta ABCD (y = 0):

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2a}{12}x^3 + \dfrac{a^3}{12}x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2a}{12}x^3 + \dfrac{a^3}{12}x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La factorización del polinomio $\dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2a}{12}x^3 + \dfrac{a^3}{12}x$ es:

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{2a}{12}x^3 + \frac{a^3}{12}x = \frac{1}{12}x \cdot (x - a)\,(x^2 - ax - a^2)$$

Las soluciones del sistema son:

$$A: \begin{cases} x = \dfrac{a - a\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad C: \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \quad D: \begin{cases} x = \dfrac{a + a\sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

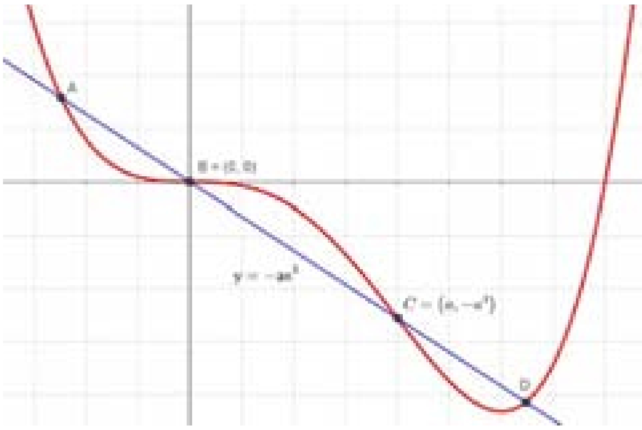
$$AB = \left| \frac{a - a\sqrt{5}}{2} \right| \qquad BC = a \qquad CD = \left| \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \right|$$

El valor de las razones: $\dfrac{AB}{CD}$ y $\dfrac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{a}{\left|\frac{-a + a\sqrt{5}}{2}\right|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180$$

d) Consideramos una función polinómica de grado 4 que no tenga la forma de las anteriores, por ejemplo, la función que tiene como raíces a 0 (triple) y a 2a, con a positivo. Esta función es:

$f(x) = x^3 \cdot (x - 2a)$, es decir, $f(x) = x^4 - 2ax^3$



Hallamos sus puntos de inflexión:

$f'(x) = 4x^3 - 6ax^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12ax = 12x(x - a)$

Los puntos de inflexión son B (0, 0) y C (a, - a^4)

La ecuación de la recta determinada por los puntos B y C es $y = -a^3x$.

Hallamos los puntos A y D resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 - 2ax^3 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 2ax^3 + a^3x = 0 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (x-a) \cdot (x^2 - ax - a^2) = 0 \\ y = -a^3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 0, \quad x_C = a, \quad x_A = \dfrac{a - a\sqrt{5}}{2}, \quad x_D = \dfrac{a + a\sqrt{5}}{2} \\ y = -a^3x \end{cases}$$

Los puntos de intersección de la recta y la función son:

$$A\left(\frac{a - a\sqrt{5}}{2}, \frac{-a^4 + a^4\sqrt{5}}{2}\right), \quad B\,(0, 0) \qquad C\,(a, -a^4) \qquad D\left(\frac{a + a\sqrt{5}}{2}, \frac{-a^4 - a^4\sqrt{5}}{2}\right)$$

Las longitudes de los segmentos AB, BC y CD son:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{a - a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a^4 + a^4\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + a^8 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \sqrt{a^2 + a^8}$$

$$BC = \sqrt{a^2 + (-a^4)^2} = \sqrt{a^2 + a^8}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{a - a\sqrt{5}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{-a^4 + a^4\sqrt{5}}{2} + a^4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-a + a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^4 - a^4\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + a^8 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \sqrt{a^2 + a^8}$$

El valor de las razones: $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{CD}$ es:

$$\frac{AB}{CD} = 1 \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{a^2 + a^8}}{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\sqrt{a^2 + a^8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180$$

Concluimos que en todas las funciones polinómicas de grado 4 con dos puntos de inflexión, de los tres segmentos que se forman al cortar la gráfica con la recta que pasa por los dos puntos de inflexión, dos son iguales y la razón del tercero con los anteriores es el número áureo:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180.$$

UNIDAD 8: Representación gráfica de funciones

CUESTIONES INICIALES-PÁG.196

1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas y ramas parabólicas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia de puntos de inflexión:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x+6}{x-4}$

a) Las características de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ son:

● Dominio: Dom f = R

● Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: P\left(2+\sqrt{2}, 0\right) \text{ y } Q\left(2-\sqrt{2}, 0\right) \\ OY: R\left(0, 2\right) \end{cases}$

● No es simétrica respecto del eje OY ni respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, ya que se cumple:

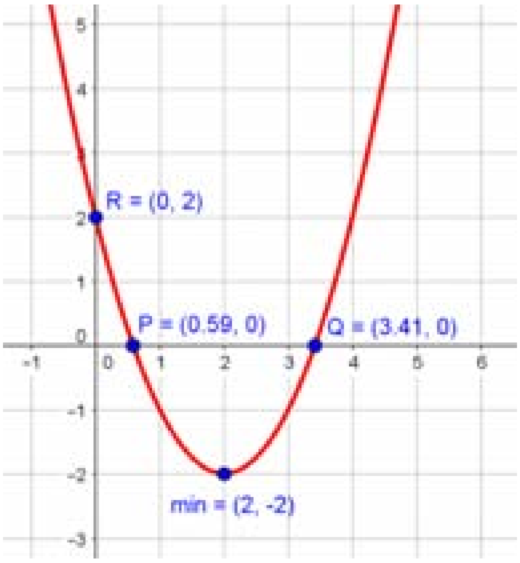
$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$ y estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

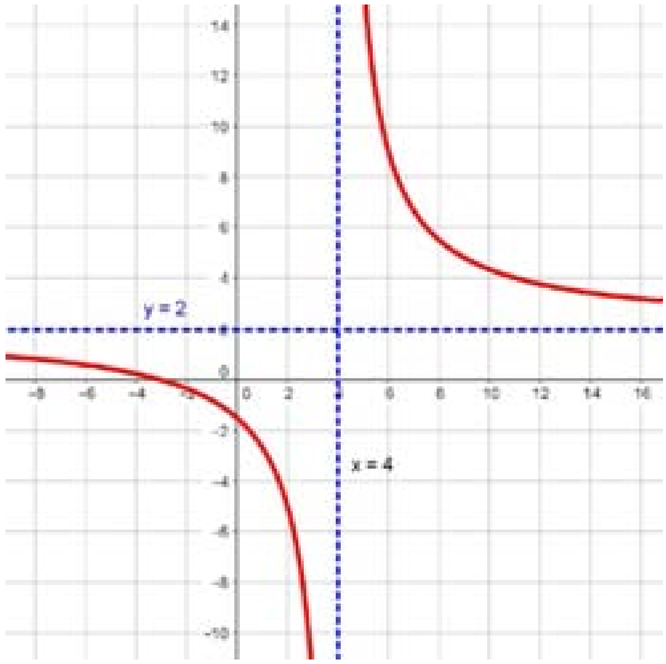
● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, - 2).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en todo R.

● Puntos de inflexión: no tiene.



b) Las características de la función $f\ (x) = \dfrac{2x+6}{x-4}$ son:



● Dominio: Dom f = R – {4}

● Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX : P\left(-3,\, 0\right) \\ OY : Q\left(0,\, -\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$

● No es simétrica respecto del eje OY ni respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas x = 4 e y = 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

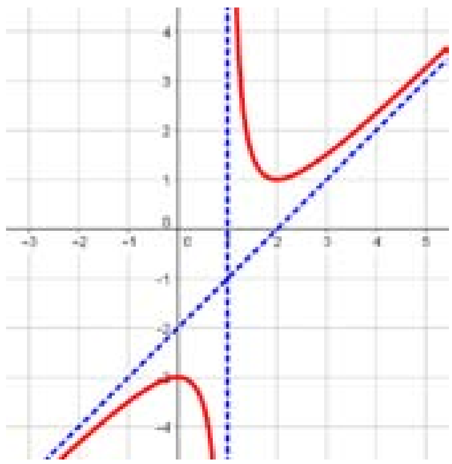
● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {4}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty,\ 4\right)$ y hacia las y positivas en $\left(4, +\infty\right)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

2. Estudia las características (dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, monotonía, extremos relativos y curvatura) de la función $f\ (x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$, representada en la gráfica.



Las características de $f\ (x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ son:

● Dominio: Dom f = R - {1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, - 3)

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 1 e y = x - 2.

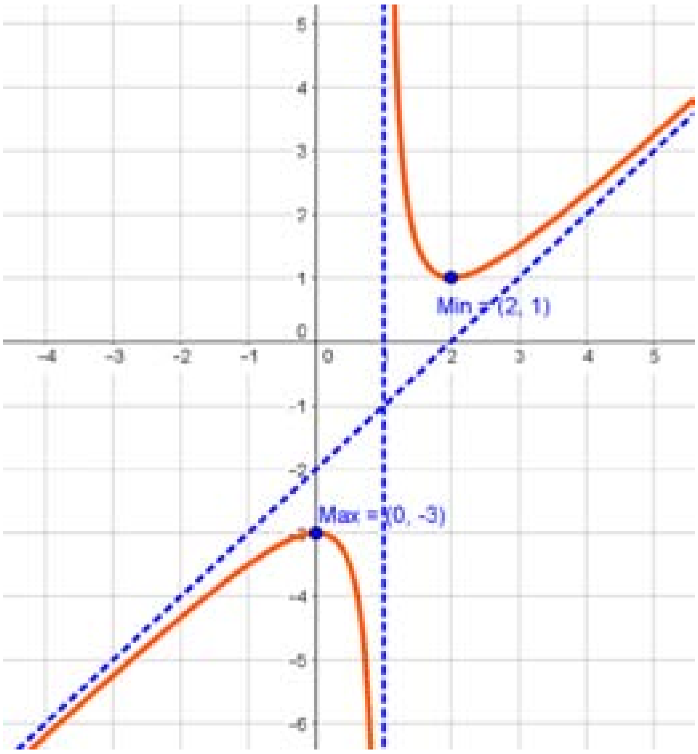
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(2; +\infty\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(0, 1\right) \cup \left(1{,}2\right)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0, - 3) y un mínimo relativo en (2, 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 213

1. Primos gemelos. Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que 7 – 5 = 2. Encuentra cuatro pares de primos gemelos.

Esta es una conjetura que está sin demostrar.

Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. Número primos generados. El polinomio $n^2 - n + 41$, cuya indeterminada n es entera, genera números primos cuando n va desde – 40 hasta 40. Este polinomio, ¿genera primos para cualquier entero n?

En efecto, el polinomio $n^2 - n + 41$ genera número primos para valores de n comprendidos entre – 40 y 40.

Por ejemplo: si n = 25, entonces $25^2 - 25 + 41 = 641$, que es un número primo.

Para cualquier valor de n no genera números primos, pues, por ejemplo, para n = 41, $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto.

3. Número mágico. Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y el cociente obtenido, por 11, y el último cociente, por 13. ¿Qué se observa?

Tomamos un número de tres cifras cualquiera, 739, y le aplicamos lo que dice el problema y obtenemos:

$$\frac{739739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 729.$$

Observamos que obtenemos el número de partida. Veamos que esto se cumple con cualquier número y para ello partimos de un número cualquiera xyz.

$$xyzxyz = 100\,000x + 10\,000y + 1\,000z + 100x + 10y + z = 1001 \cdot (100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot xyz$$

Por tanto, al dividir xyzxyz por 7, por 11 y por 13, obtenemos el número de partida xyz.

4. Conjetura de Collatz o (3n + 1). Compruébala para los valores de n: 7, 12, 17 y 30.

Indicamos con $f^2(x) = f(f(x))$ y así sucesivamente por cuestiones de escritura.

Para n = 7:
$f(7) = 22$; $f^2(7) = 11$; $f^3(7) = 34$; $f^4(7) = 17$; $f^5(7) = 52$; $f^6(7) = 26$; $f^7(7) = 13$; $f^8(7) = 40$; $f^9(7) = 20$; $f^{10}(7) = 10$; $f^{11}(7) = 5$; $f^{12}(7) = 16$; $f^{13}(7) = 8$; $f^{14}(7) = 4$; $f^{15}(7) = 2$; $f^{16}(7) = 1$…

Para n = 12:
$f(12) = 6$; $f^2(12) = 3$; $f^3(12) = 10$; $f^4(12) = 5$; $f^5(12) = 16$; $f^6(16) = 8$; $f^7(12) = 4$; $f^8(12) = 2$; $f^9(12) = 1$…

Para n = 17:
$f(17) = 52$; $f^2(17) = 26$; $f^3(17) = 13$; $f^4(17) = 40$; $f^5(17) = 20$; $f^6(17) = 10$; $f^7(17) = 5$; $f^8(17) = 16$; $f^9(17) = 8$; $f^{10}(17) = 4$; $f^{11}(17) = 2$; $f^{12}(17) = 1$…

Para n = 30:
$f(30) = 15$; $f^2(30) = 46$; $f^3(30) = 23$; $f^4(30) = 70$; $f^5(30) = 35$; $f^6(30) = 106$; $f^7(30) = 53$; $f^8(30) = 160$; $f^9(30) = 80$; $f^{10}(30) = 40$; $f^{11}(30) = 20$; $f^{12}(30) = 10$; $f^{13}(30) = 5$; $f^{14}(30) = 16$; $f^{15}(30) = 8$; $f^{16}(30) = 4$; $f^{17}(30) = 4$; $f^{17}(30) = 2$; $f^{18}(30) = 1$…

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 215

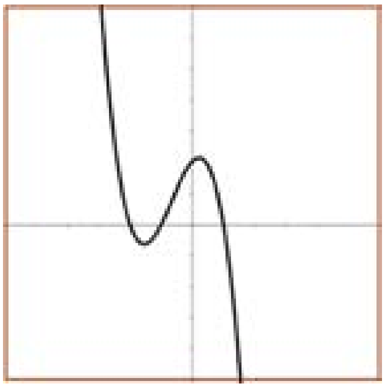
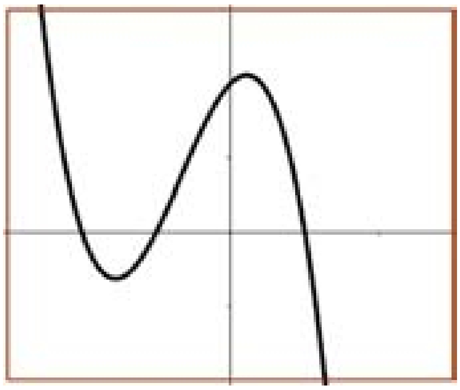
1. Representa gráficamente las funciones que siguen, explorando sus gráficas y modificando su aspecto.

a) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

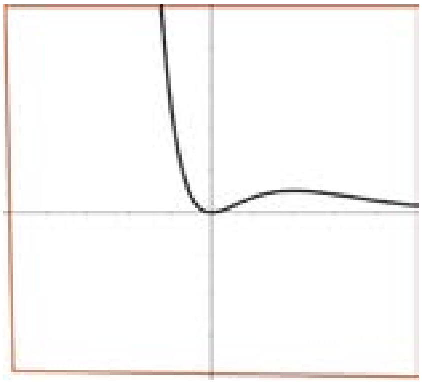
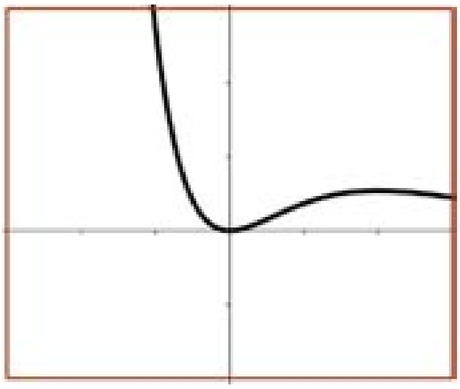
Seguimos los pasos descritos en el epígrafe OPCIONES PARA UNA GRÁFICA:

- Editamos la función en la tecla **Y=**.
- Pulsamos **GRAPH** y visualizamos la gráfica.
- Activando la tecla **WINDOW** podemos mejorar el aspecto de la gráfica.
- Pulsando de nuevo **GRAPH** obtenemos una nueva imagen de la gráfica.
- Activando **TRACE** nos movemos con el cursor por la gráfica y en la pantalla aparece la posición del cursor así como sus coordenadas.
- Con la tecla **ZOOM** modificamos el aspecto de la gráfica.

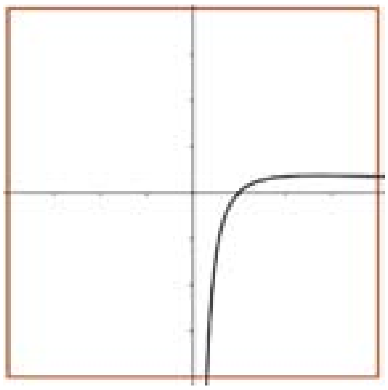
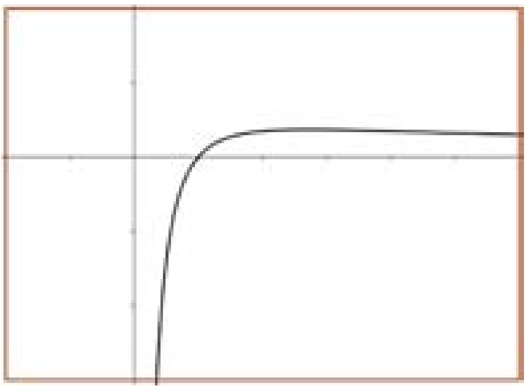
a) Para la función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ podemos obtener imágenes como las que siguen.

b) La gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ puede presentar los siguientes aspectos:

c) La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ presenta el siguiente aspecto:

2. Para las funciones de la actividad anterior visualiza simultáneamente su gráfica y su tabla de valores.

Procedemos como se explica en el epígrafe GRÁFICA Y TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN:

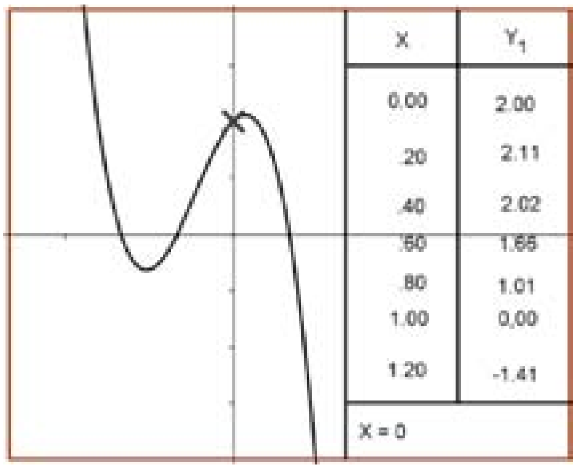
- Pulsamos la tecla **Y =** y en Y_1 introducimos la expresión de la función.

- En el menú de la tecla **MODE** elegimos **FLOT 2**, para obtener resultados con dos cifras decimales y en la línea COMPL (Full) HORIZ G-T elegimos la opción **G-T** (gráfico-tabla) que muestra la pantalla dividida verticalmente.

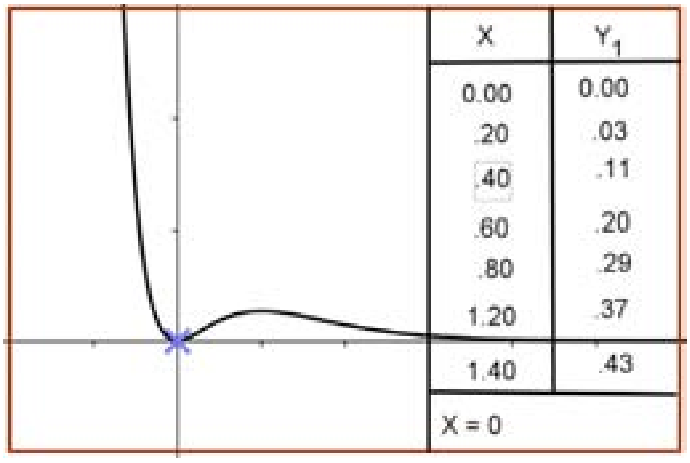
- Pulsando **GRAPH** visualizamos la gráfica de la función y parte de su tabla de valores. Con las teclas **WINDOWS** y **ZOOM** podemos modificar el aspecto de la gráfica.

- Con la tecla **TRACE** nos movemos sobre la gráfica y la posición del cursor queda reflejada en la tabla y en la pantalla gráfica, como puede verse en las imágenes.

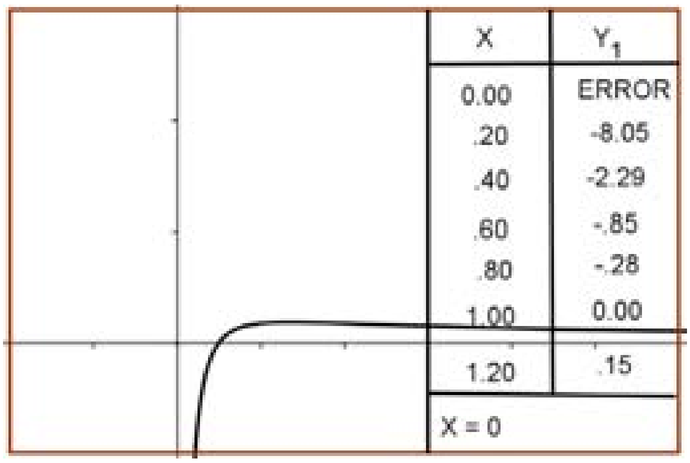
a) Para la función f (x) = - x^3 - $2x^2$ + x + 2 obtenemos:



b) Para la función f(x) = $x^2 \cdot e^{-x}$ obtenemos:

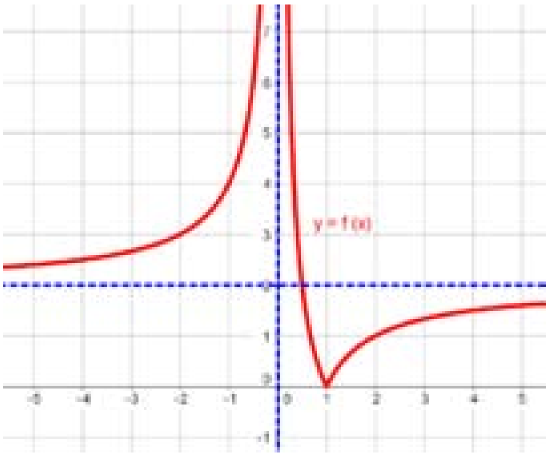


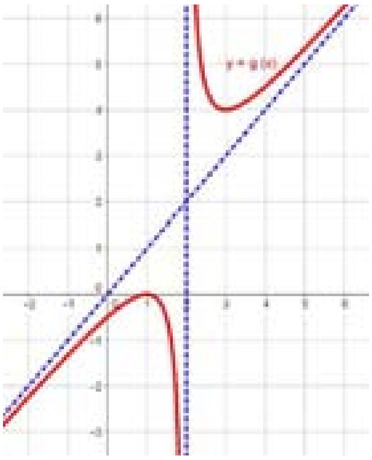
c) Para la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ obtenemos:

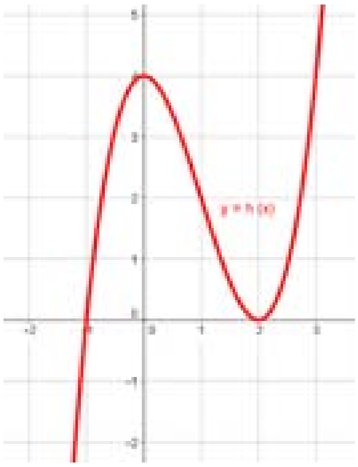


ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 218

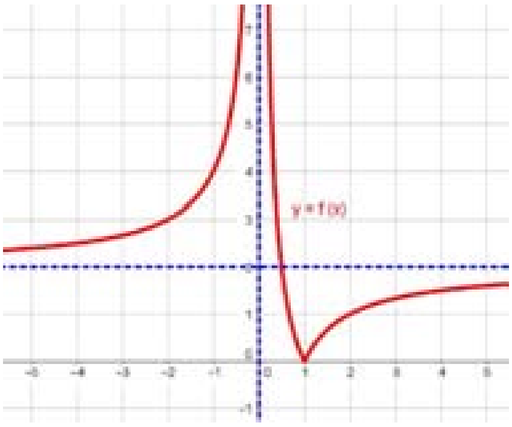
1. Describe las siguientes funciones indicando sus dominios, recorridos, puntos de corte con los ejes, asíntotas, ramas infinitas, intervalos de monotonía y curvatura y sus puntos singulares.







a) Las características de la gráfica de f (x) son:



● Dominio: Dom f = R - {0}.

● Recorrido: Im f = $\left[0, +\infty\right)$.

● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 0 e y = 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

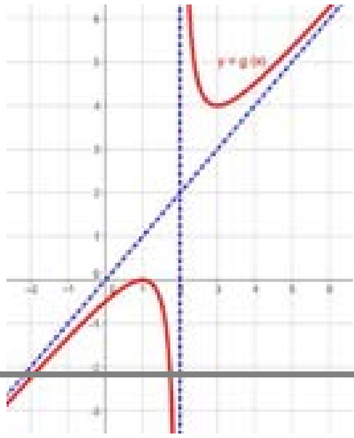
● Monotonía: es estrictamente creciente en $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(1, +\infty\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(0, 1\right)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (1, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(1, +\infty\right)$ y cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, 1\right)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de la gráfica de g (x) son:



● Dominio: Dom f = R - {2}.

● Recorrido: Im f = $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(4, +\infty\right)$.

● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 2 e y = x.

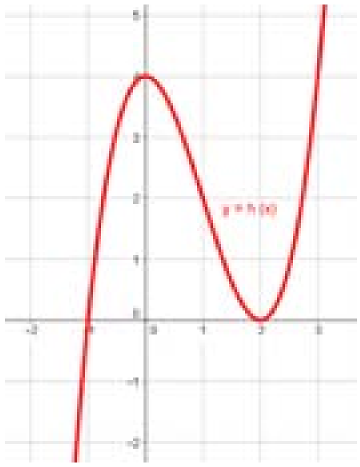
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(1, 2) \cup (2,3)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1, 0) y un mínimo relativo en (3, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$

● Puntos de inflexión: no tiene.



c) Las características de la gráfica de h (x) son:

● Dominio: Dom f = R.

● Recorrido: Im f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (- 1, 0); (2, 0) y (0, 4).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, una a menos infinito y otra a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, 0) y un máximo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (1, 2) es de inflexión.

2. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$

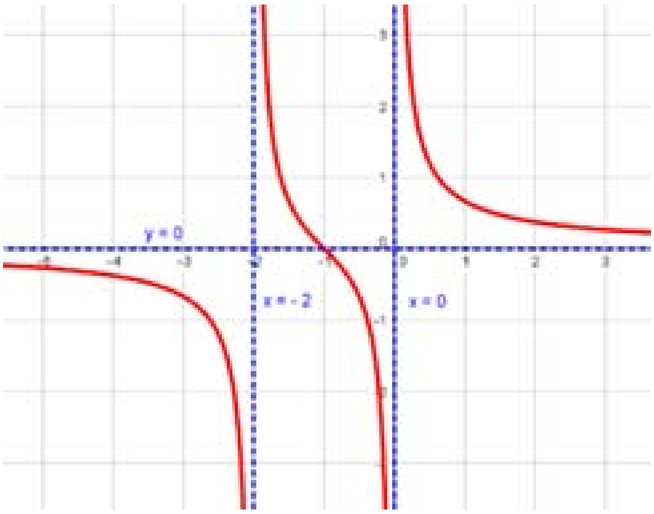
a) Las asíntotas verticales son las rectas:

● x = - 2, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = +\infty$

- x = 0, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = +\infty$

La asíntota horizontal es y = 0 al cumplirse $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = 0$.

Asíntotas oblicuas no tiene ya que $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^3+2x^2} = 0$



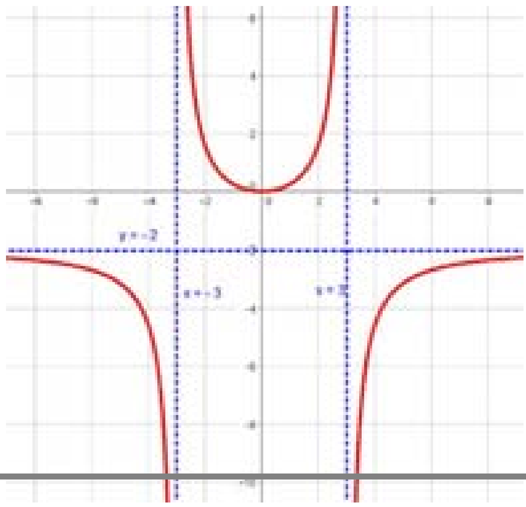
b) Las asíntotas verticales son las rectas:

- x = - 3, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = +\infty$

- x = 3, al cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = +\infty$

La asíntota horizontal es y = - 2 al cumplirse $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -2$.

Asíntotas oblicuas no tiene ya que $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{9x-x^3} = 0$



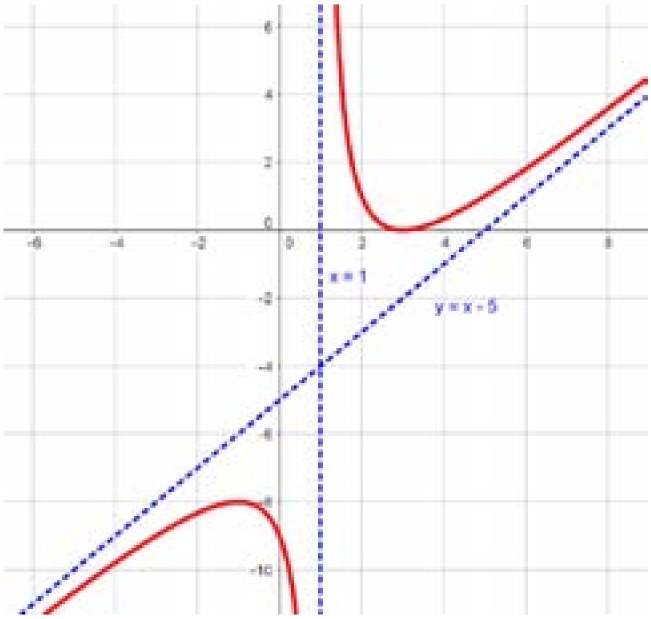
c) La asíntota vertical es: x = 1, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-3)^2}{x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-3)^2}{x-1} = +\infty$$

Asíntotas horizontales no tiene ya que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x-1} = \infty$.

La asíntota oblicua es la recta y = x – 5, al cumplirse:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 - x} = 1 \text{ y } n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{(x-3)^2}{x-1} - x \right] = -5$$



3. La evolución del número de bacterias en un cultivo de laboratorio como función del tiempo sigue la expresión N (t) = - t^2 + bt – c, 0 ≤ t ≤ 30, donde N (t) denota el número de bacterias y t el tiempo en horas. Se sabe que el número máximo de bacterias se alcanza a las 10 horas y que a las 30 horas no hay ninguna bacteria.

a) Determina las constantes b y c.

b) Representa gráficamente el número de bacterias en función del tiempo.

a) Como el máximo se alcanza a las 10 horas, N ´ (10) = 0:

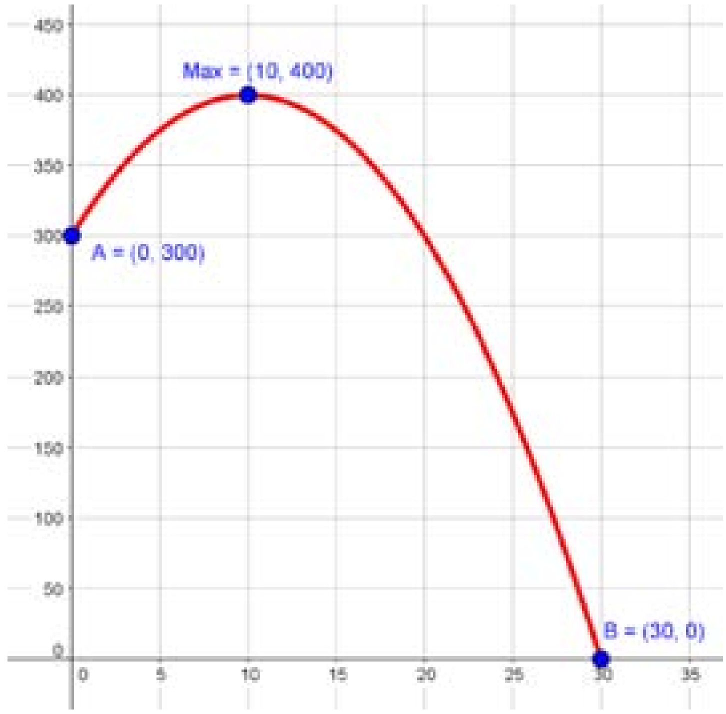
$$N'(t) = -2t + b = 0 \quad \Rightarrow \quad -20 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 20$$

A las 30 horas no hay bacterias, es decir, N (30) = 0:

$$N(30) = -30^2 + 20 \cdot 30 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -300$$

b) La función N (t) = - t^2 + 20t + 300 es una parábola de vértice el punto (10, 400) y con puntos de corte en los ejes coordenados en (0, 300) y (30, 0).

En el dibujo puede verse su gráfica.



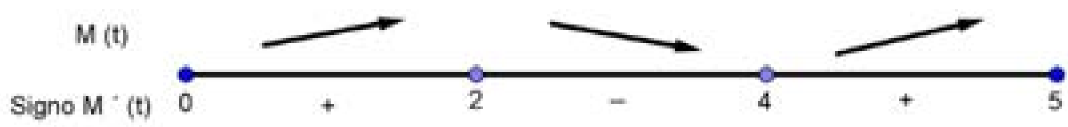
4. La cantidad de madera (en metros cúbicos) que se extrae de una explotación forestal durante un período de cinco días viene dada por la función M (t) = $t^3 - 9t^2 + 24t$, $0 \le t \le 5$, siendo t el tiempo transcurrido en días.

a) Estudia en qué períodos se ha registrado un aumento y en los que se ha registrado una disminución de la cantidad de la cantidad de madera extraída

b) ¿En que día o días se ha extraído la máxima cantidad de madera?, ¿y la mínima? Calcula la cantidad máxima y mínima de metros cúbicos de madera extraída.

c) Representa gráficamente la función M (t), calculando, si los hay, los puntos de inflexión.

a) El estudio del signo de la primera derivada M ´ (t) = $3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$ aparece en el esquema que sigue.



Se ha registrado un aumento de la cantidad de madera extraída en los dos primeros días y en el 5º día.

Se ha registrado una disminución en los días 3º y 4º.

b) Una función continua definida en un intervalo cerrado alcanza los extremos absolutos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo:

$M(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $M(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 16$

M (2) = $2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$ M (3) = $3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 = 18$

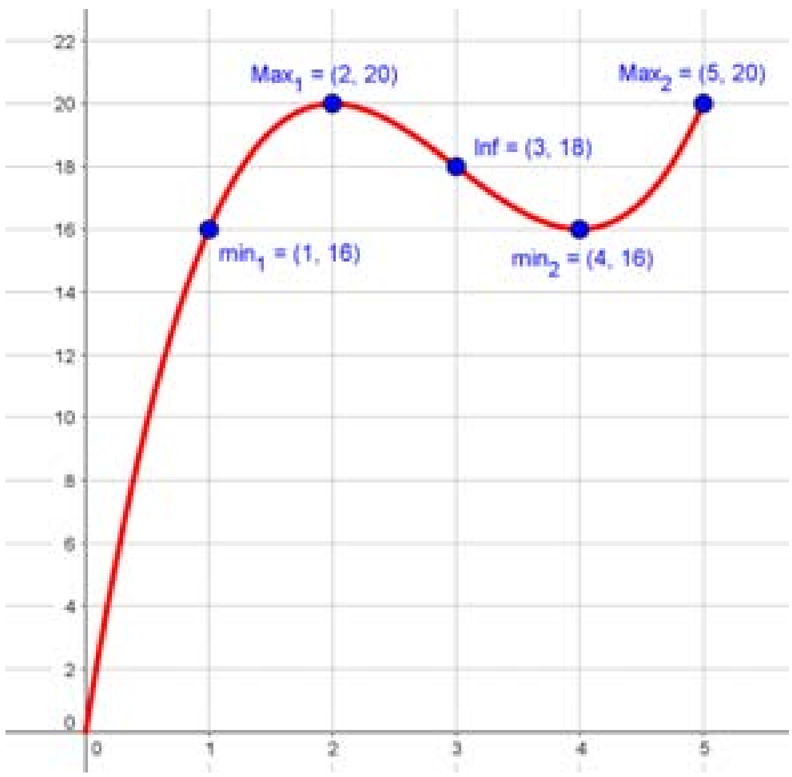
M (4) = $4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 16$ M (5) = $5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 = 20$

La máxima cantidad de madera se extrajo en los días segundo y quinto, y fueron 20 m^3.

La mínima cantidad de madera se extrajo en el primer día y en el cuarto día, y fueron 16 m^3.
c) Estudiamos el signo de la segunda derivada M ´´ (t) = 6t – 18 = 6(t – 3):

El punto (3, 18) es de inflexión.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x - 2| + x$

b) $f(x) = |9 - x^2|$

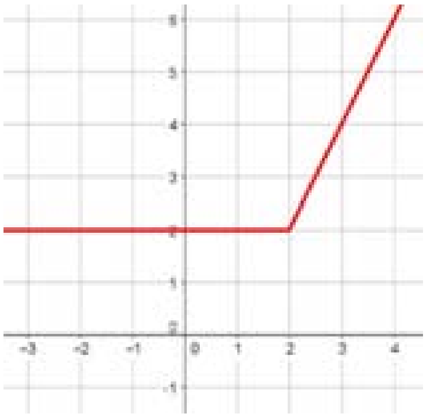
c) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

f) $f(x) = x^4 - x^3$

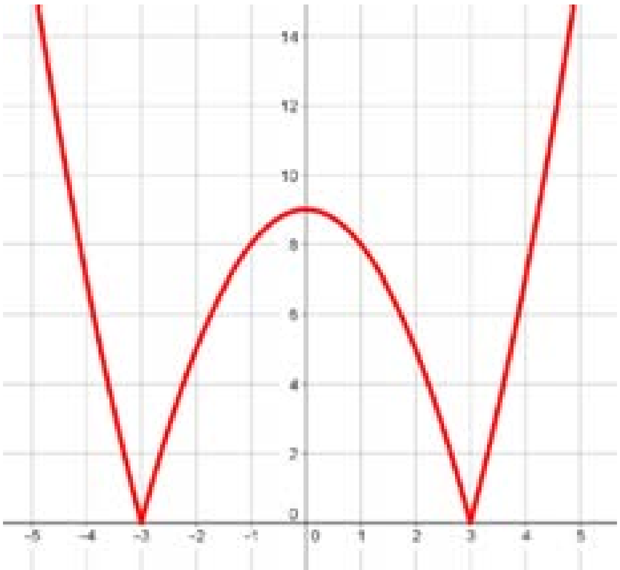
a) La función f (x) = |x - 2| + x puede expresarse en la forma: $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \le 2 \\ 2x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



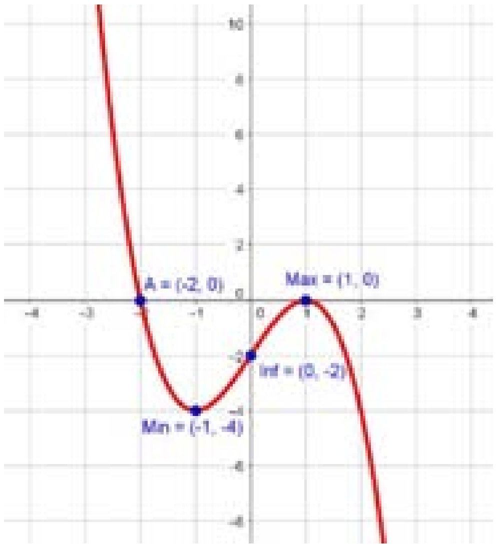
b) La función f (x) = |9 – x²| puede expresarse en la forma:

$$f\ (x) = \begin{cases} x^2 - 9 & si\ x \in (-\infty, -3) \cup (\ 3, +\infty) \\ -x^2 + 9 & si\ x \in (-3,\ 3) \end{cases}$$

y su gráfica puede verse en el dibujo.



c) Las características de f (x) = - x^3 + 3x - 2 son:



● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2,0)\ y\ (1,0) \\ OY: (0,-2) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

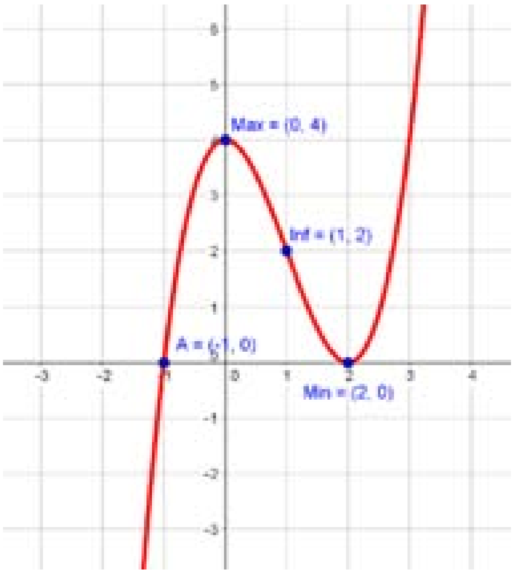
$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x - 2) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x - 2) = -\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-1, 1)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 1, - 4) y un máximo relativo en (1, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, - 2) es de inflexión.



d) Las características de f (x) = x^3 - $3x^2$ + 4 son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY: (0, 4) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

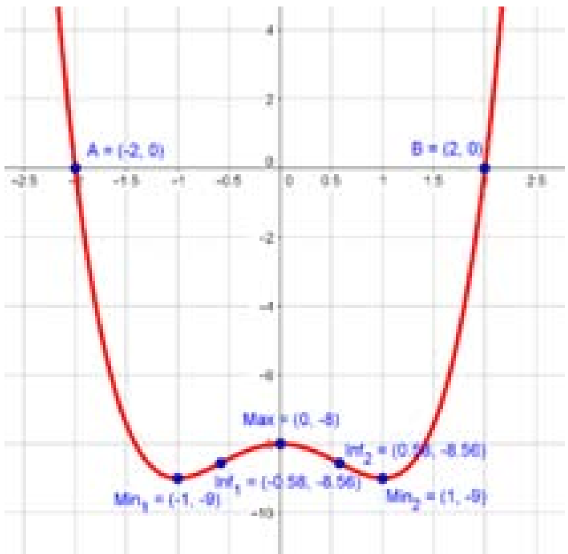
$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ estrictamente decreciente en $(0, 2)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, 0) y un máximo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (1, 2) es de inflexión.



e) Las características de f (x) = x^4 - $2x^2$ - 8 son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY: (0, -8) \end{cases}$$

● Simetría: es simétrica respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2x^2 - 8) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ estrictamente creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene dos mínimos relativos en (- 1, - 9) y (1, - 9) y un máximo relativo en (0, - 8).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-0{,}58; 0{,}58)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -0{,}58) \cup (0{,}58; +\infty)$.

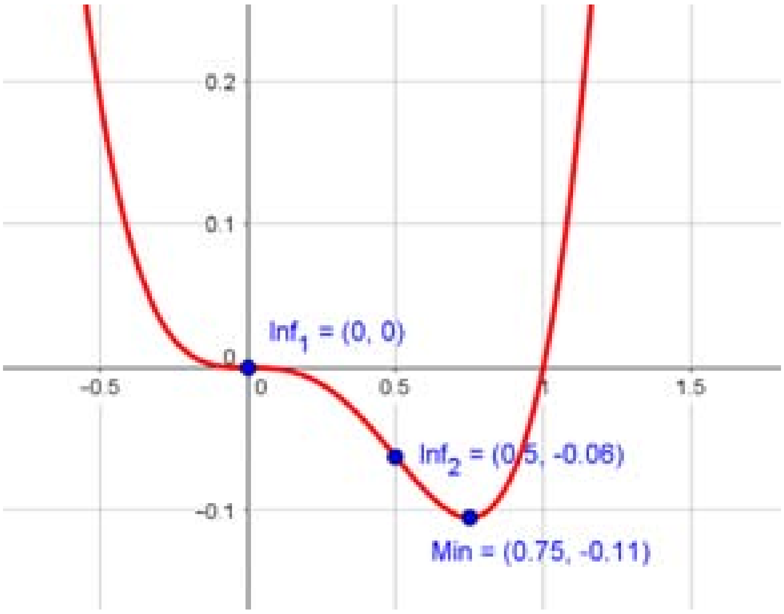
● Puntos de inflexión: los puntos (- 0,58; - 8,56) y (0,58; 8,56) son de inflexión.

f) Las características de f (x) = $x^4 - x^3$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \ y \ (1, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$



● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to \mp\infty} (x^4 - x^3) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0{,}75)$ estrictamente creciente en $(0{,}75; +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0,75; - 0,11).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0) \cup (0{,}5; +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, 0{,}5)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (0, 0) y (0,5; - 0,06) son de inflexión.

6. Sea la función f (x) = $2x^3 + bx^2 + cx – 5$. Halla los valores de b y c para que f (x) tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 2. Representa la función que se obtiene.

Calculamos b y c haciendo uso de la primera derivada f ´ (x) = $6x^2 + 2bx + c$:

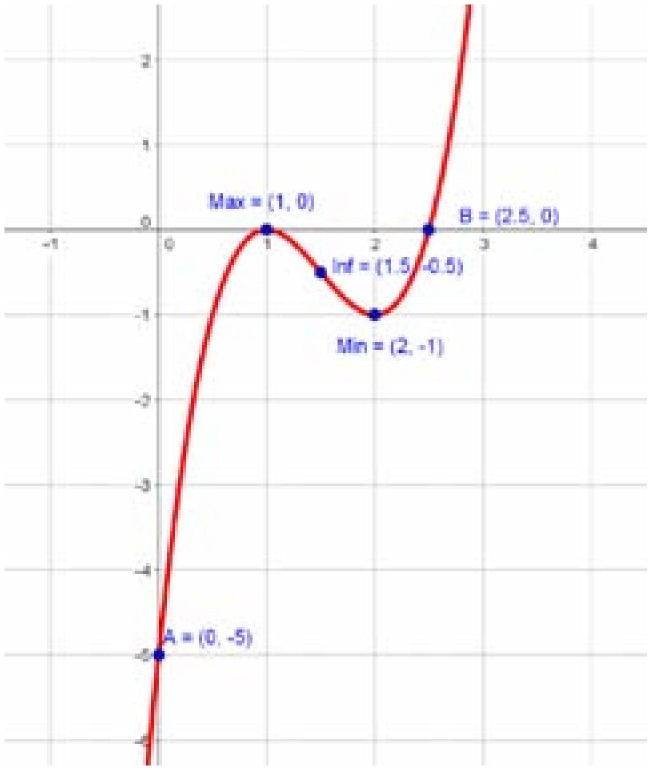
$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b + c = -6$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 4b + c = -24$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 2b + c = -6 \\ 4b + c = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -9 \\ c = 12 \end{cases}$$

La función es f (x) = $2x^3 – 9x^2 + 12x – 5$ y en la imagen podemos ver su gráfica.



Los puntos especiales son.

Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: (1,0) y (2,5,0) \\ OY: (0,-5) \end{cases}$

Máximo: (1, 0).

Mínimo: (2, - 1).

Punto de Inflexión: (1,5; - 0,5).

7. La gráfica de la función f (x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de inflexión en x = 1 y un máximo en (0, 4).

a) Halla los coeficientes a, b y c.

b) Encuentra los máximos y mínimos relativos y representa la función.

a) Las derivadas de la función f (x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad y \quad f''(x) = 6x + 2a$$

Si tiene un máximo en el punto (0, 4) se cumplirá:

$f(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$

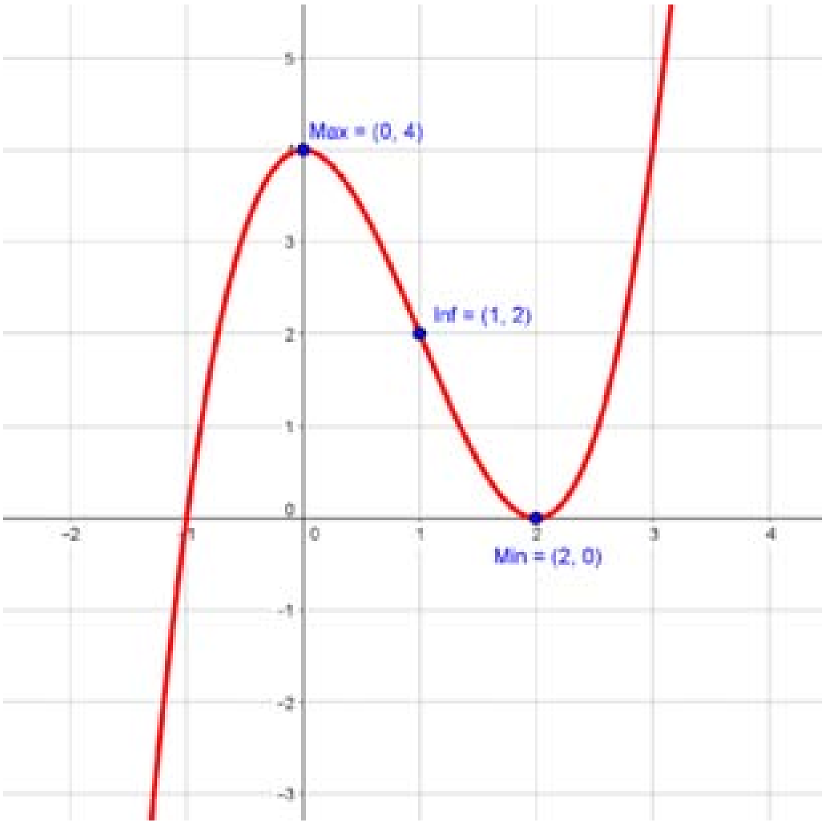
$f'(0) = 0 \Rightarrow \quad b = 0$

Si tiene un punto de inflexión en x = 1 se cumplirá f ´´ (1) = 0 $\Rightarrow$ 6 + 2ª = 0 $\Rightarrow$ a = - 3

Por tanto, la función es f (x) = $x^3 – 3x^2 + 4$

b) El máximo relativo es el punto (0, 4), el mínimo relativo el punto (2, 0) y el punto de inflexión está en (1, 2).

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 219

8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ **g)** $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-4}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

a) Las características de $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 1}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2, 0) \\ OY: (0, 2) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

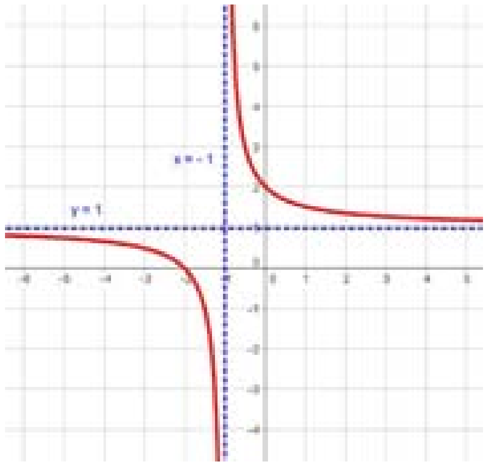
● Asíntotas: las rectas x = - 1 e y = 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {- 1}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1, +\infty)$.



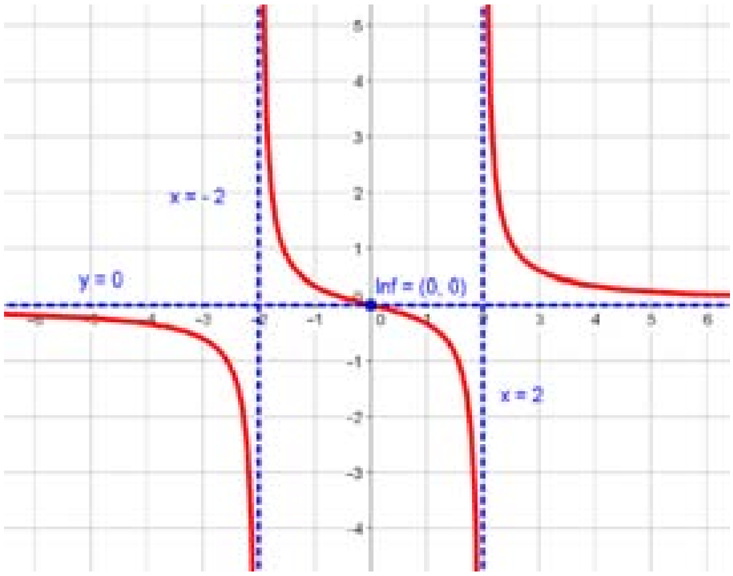
● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 2, 2}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$



● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas x = -2, x = 2 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {- 2, 2}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

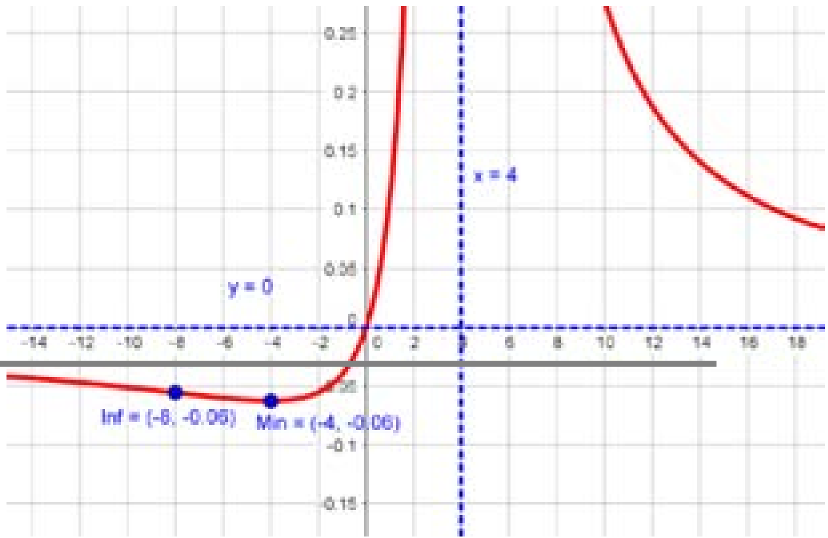
● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.

c) Las características de $f(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {4}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$



● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 4 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

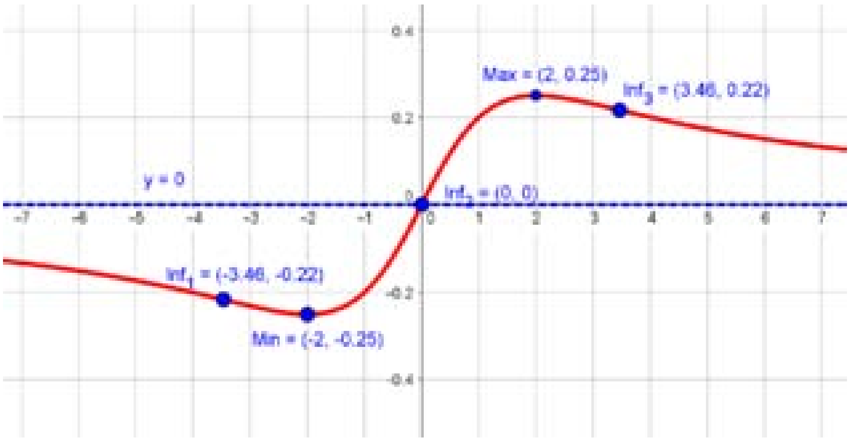
● Monotonía: es estrictamente creciente en $\left(-4, 4\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-\infty, -4\right) \cup \left(4, +\infty\right)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 4, - 0,06).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty, -8\right)$ y cóncava hacia las y positivas en $\left(-2, 4\right) \cup \left(4, +\infty\right)$.

● Puntos de inflexión: el punto (- 8, - 0,06) es de inflexión.

d) Las características de $f\,(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ son:



● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

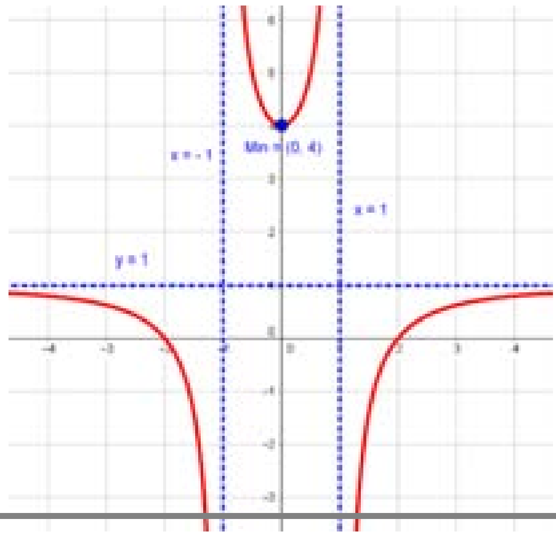
$$\begin{cases} OX: \left(0, 0\right) \\ OY: \left(0, 0\right) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del origen de coordenadas

● Asíntotas: la recta y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, -2\right) \cup \left(2, +\infty\right)$ y estrictamente creciente en $\left(-2, 2\right)$.



● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 2, - 0,25) y un máximo relativo en (2, 0,25).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty, -3{,}46\right) \cup (0, 3{,}46)$ y cóncava hacia las y positivas en $\left(-3{,}46, 0\right) \cup \left(3{,}46, +\infty\right)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 3,46; - 0,22); (0, 0) y (3,46; 0,22) son de inflexión.

e) Las características de $f\ (x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 1, 1}.
● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2,\ 0)\ y\ (2,\ 0) \\ OY: (0,\ 4) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del eje de ordenadas

● Asíntotas: las rectas x = - 1, x = 1 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

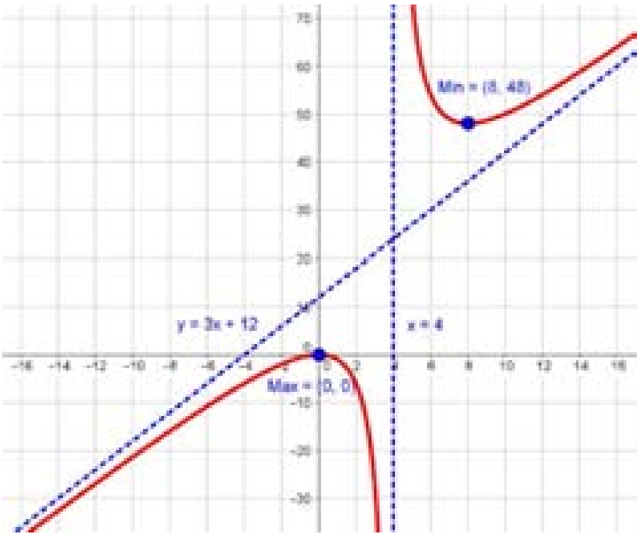
● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1, 1)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

f) Las características de $f\ (x) = \dfrac{3x^2}{x - 4}$ son:



● Dominio: Dom f = R – {4}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0,\ 0) \\ OY: (0,\ 0) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 4 e y = 3x + 12.

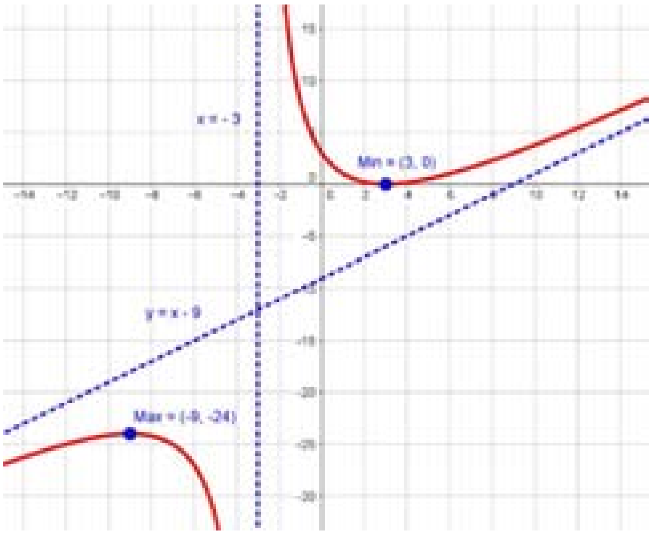
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 4) \cup (4, 8)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (8, 48) y un máximo relativo en (0, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 4)$ y cóncava hacia las y positivas en $(4, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



g) Las características de $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 3}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (3, 0) \\ OY: (0, 3) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = - 3 e y = x - 9.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-9, -3) \cup (-3, 3)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -9) \cup (3, +\infty)$.

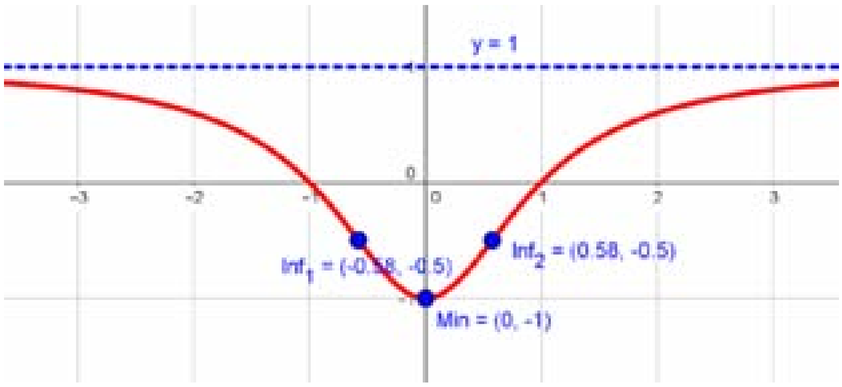
● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (3, 0) y un máximo relativo en (- 9, - 24).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-3, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

h) Las características de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ son:

● Dominio: Dom f = R.



● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1, 0) \text{ y } (1, 0) \\ OY: (0, -1) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: la recta y = 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0, - 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -0{,}58) \cup (0{,}58; +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-0{,}58; 0{,}58)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 0,58; - 0,50) y (0,58; - 0,50) son de inflexión.

9. Un modelo teórico asociado a los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, propone la siguiente función de coste:

$$C\ (x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$$

donde C (x) es el coste total, en euros, de almacenamiento y transporte (durante tres meses) de x toneladas de material.

a) ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?

b) ¿Cuáles son las asíntotas de esta función? Representa dicha función para x ≥ 0.

9. a) Para determinar el coste mínimo anulamos la primera derivada:

$$C\,'\ (x) = 100\left(9 - \frac{144}{x^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; 9x^2 - 144 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 16 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -4 \text{ (sin } \textit{sentido}) \\ x = 4 \end{cases}$$

Comprobamos que es un mínimo ya que $C\,''\ (4) = \dfrac{28\ 800}{4^3} > 0$

La cantidad de materiales que hace el coste mínimo es x = 4 toneladas. El valor del coste mínimo es:

$$C\ (4) = 100\left(100 + 9 \cdot 4 + \frac{144}{4}\right) = 17\ 200\ \textit{euros}$$

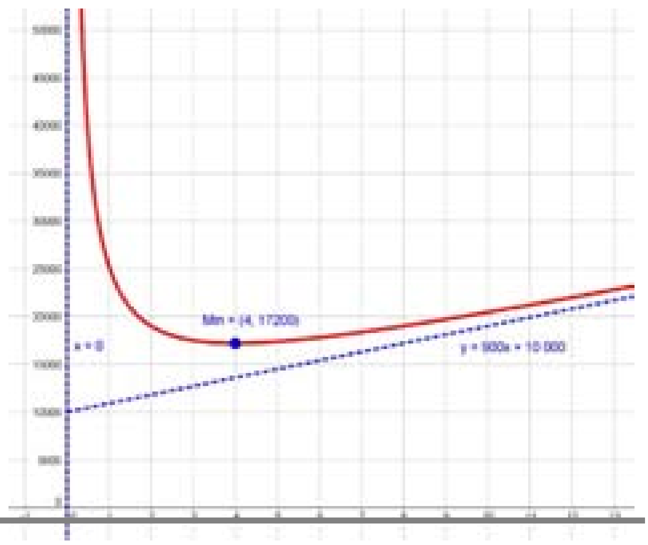
b) Las asíntotas de esta función son las rectas x = 0 e y = 900x + 10 000, ya que se cumple:

$$\lim_{x \to 0^+} C\ (x) = \lim_{x \to 0^+} 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{C\ (x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 100\left(\frac{100}{x} + 9 + \frac{144}{x^2}\right) = 100 \cdot 9 = 900$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left[C\ (x) - 900x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(10\ 000 + 900x + \frac{144}{x} - 900x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(10\ 000 + \frac{144}{x}\right) = 10\ 000$$

c) La representación gráfica pedida puede verse en la imagen que sigue.

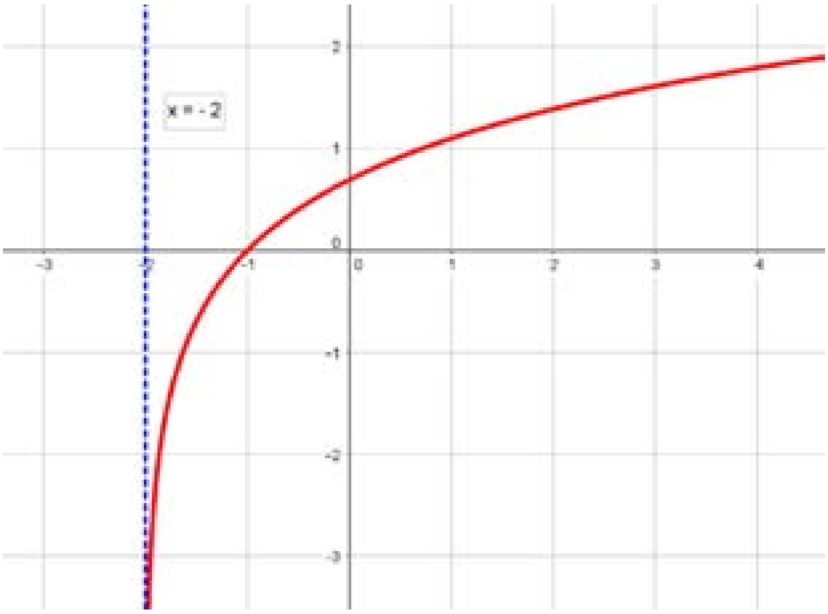


10. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) f (x) = ln (x + 2) **b)** $f\,(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ **c)** $f\,(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

a) Las características de f (x) = ln (x + 2) son:

● Dominio: Dom f = $(-2, +\infty)$.



● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1, 0) \\ OY: (0,\ \ln 2) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: la recta x = - 2.

● Ramas parabólicas: tiene una al cumplirse:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln (x + 2) = +\infty$$

.

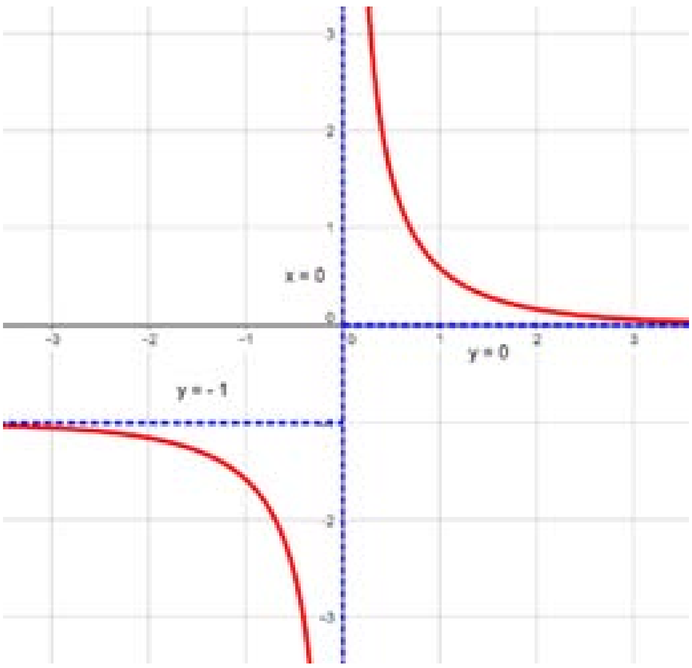
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de $f\,(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ son:



● Dominio: Dom f = R – {0}.

● Cortes con los ejes: no tiene.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas y = - 1, y = 0 y x = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

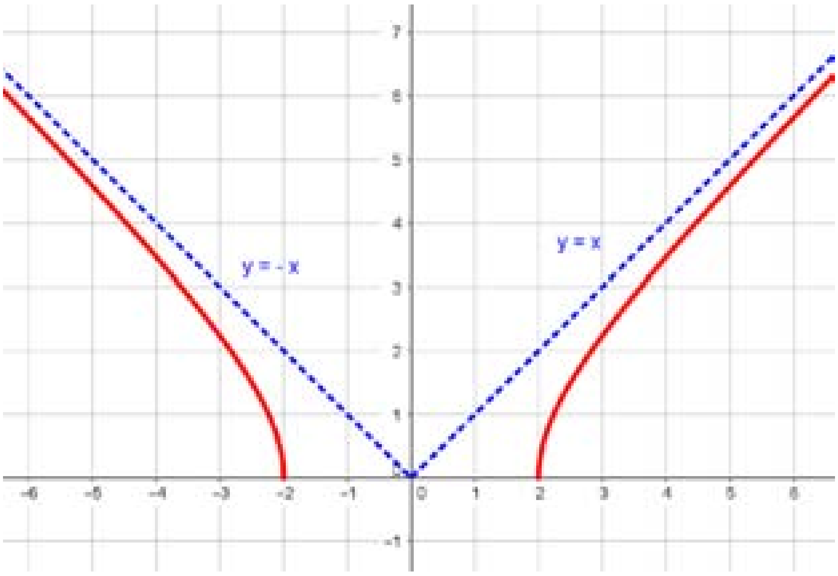
● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {0}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

c) Las características de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ son:



● Dominio: Dom f = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

● Puntos de corte con los ejes:
$$\begin{cases} OX: (-2, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY: \end{cases}$$

● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: las rectas y = - x e y = x.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$ y monótona decreciente en $(-\infty, -2)$.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

● Puntos de inflexión: no tiene.

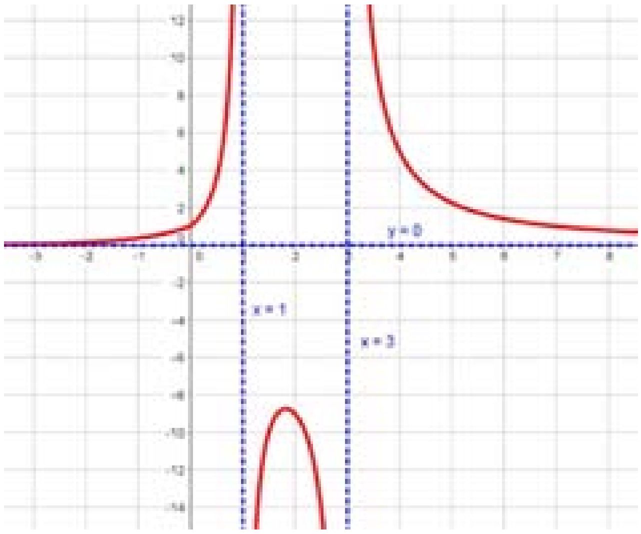
11. Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \begin{cases} e^x & si \ x < 0 \\ \dfrac{3x+3}{x^2 - 4x + 3} & si \ x \geq 0 \end{cases}$.

Las asíntotas de la función son las rectas:

● y = 0 al cumplirse $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+3}{x^2 - 4x + 3} = 0$

● x = 1, al cumplirse $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x+3}{x^2 - 4x + 3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x+3}{x^2 - 4x + 3} = -\infty$

● x = 3, al cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = +\infty$



12. La función que da los costes de una empresa, en miles de euros, respecto al número x > 0 de toneladas que fabrica, viene dada por C (x) = 2x^3 – 6 · ln x. Halla:

a) El mínimo coste y el número de toneladas que hay que fabricar para alcanzar ese mínimo.

b) Representa gráficamente la función dada.

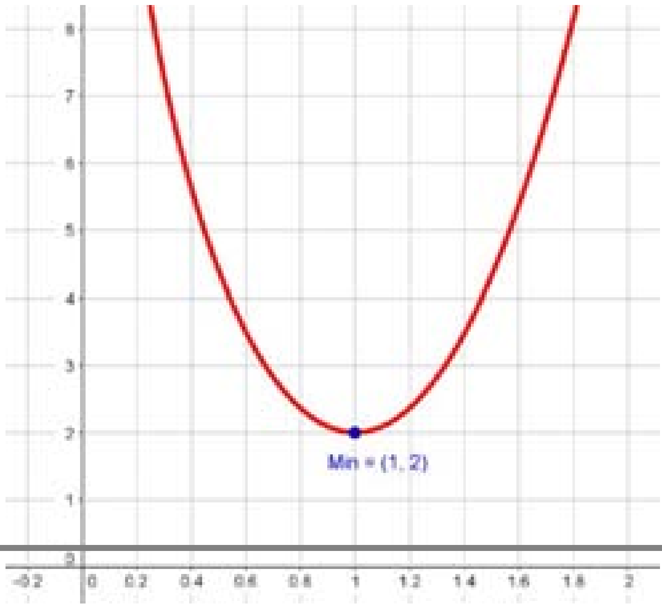
c) Si los ingresos de esta empresa viene dados por I (x) = 2x^3 + 12x, encuentra la función beneficio y estudia si existe beneficio máximo.

a) Las derivadas de la función C (x) = 2x^3 – 6 · ln x son:

$$C'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} \qquad\qquad C''(x) = 12x + \frac{6}{x^2}$$

El valor que anula la primera derivada es x = 1, y al ser C ´´ (1) = 18 > 0, en el punto (1, 2) la función tiene un mínimo.

b) La gráfica de la función C (x) = 2x^3 – 6 · ln x puede verse en el dibujo.



En la gráfica podemos ver el mínimo del apartado anterior, la asíntota vertical x = 0 (eje OY) y la rama parabólica hacia más infinito.

c) Teniendo en cuenta que beneficios = ingresos – costes, la función beneficio, B (x), viene dada por:

B (x) = I (x) – C (x) $\Rightarrow$ B (x) = 2x^3 + 12x – (2x^3 – 6 · ln x) $\Rightarrow$ B (x) = 12x + 6 · ln x

Para ver si existe beneficio máximo hallamos las dos primeras derivadas:

$$B'(x) = 12 + \frac{6}{x} \qquad\qquad B''(x) = -\frac{6}{x^2}$$

La primera derivada se anula para $x = -\frac{1}{2}$ y este punto está fuera del dominio de definición de la función. Por tanto, la función beneficio no tiene un máximo. Puede verse en la gráfica que sigue.

13. Los beneficios de una empresa en sus primeros ocho años vienen dados, en millones de euros, por la función:

$$B\ (t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t,\ \ 0 \le t \le 8$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido en años, desde su fundación.

a) Estudia la monotonía y los extremos de B (t).

b) Dibuja la gráfica de B (t) en el intervalo [0, 8] y explica, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus ocho años de existencia,

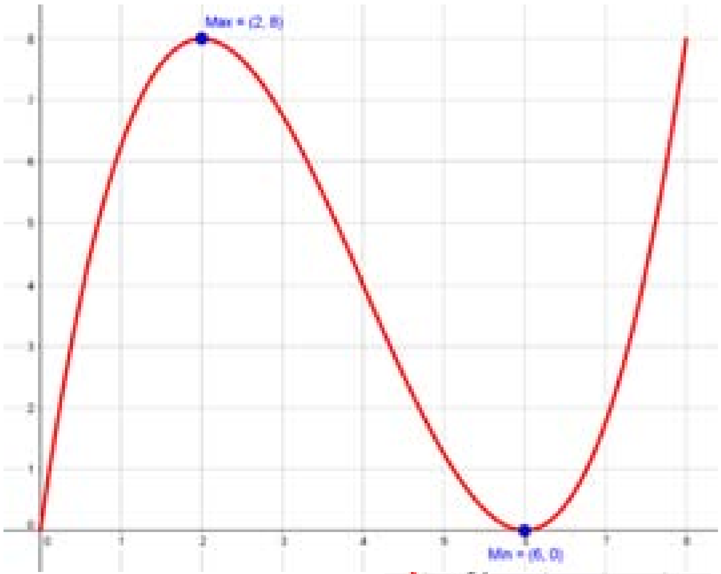
a) Para estudiar la monotonía y los extremos utilizamos la derivada primera:

$$B\ \ (t) = \frac{3}{4}t^2 - 6t + 9 = 0 \ \Rightarrow\ 3t^2 - 24t + 36 = 0 \ \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 2 \end{cases}$$

En el esquema que sigue aparece el estudio del signo de B ´ (t).

La función B (t) es creciente en $(0, 2) \cup (6, 8)$ y decreciente en $(2, 6)$. Tiene un máximo en (2, 8) y un mínimo en (6, 0).

b) La gráfica puede verse a continuación:



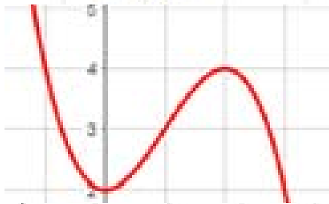
Los beneficios de la empresa crecen de cero a ocho millones de euros en los dos primeros años.

Entre el segundo y el sexto año, los beneficios descienden.

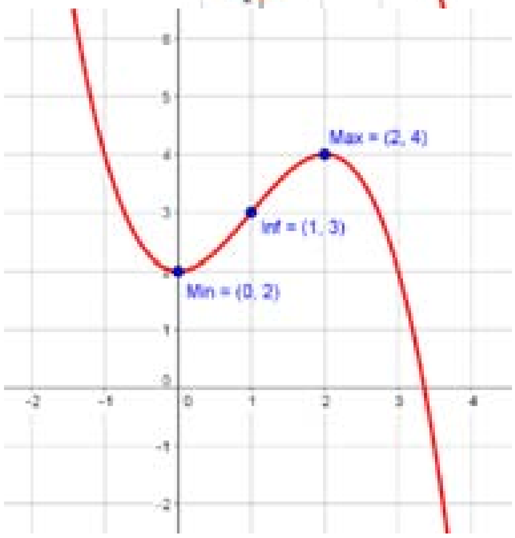
En el sexto año, no hay beneficios ni pérdidas.

A partir del sexto año, los beneficios vuelven a ascender hasta alcanzar de nuevo los ocho millones de euros en el octavo año.

14. Determina los coeficientes a, b, c y d de una función polinómica de tercer grado cuya representación gráfica es la que muestra el dibujo.



La función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un mínimo en el punto (0, 2) y un máximo en el punto (2, 4). La derivada primera es f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$.



Imponemos las condiciones f (0) = 2; f ´ (0) = 0; f (2) = 4 y f ´ (2) = 0 y obtenemos:

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

La función es $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ y su gráfica podemos verla en el dibujo.

15. En una granja dedicada a la cría de pollos, el peso de los mismos, en función de la edad, viene representado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} -x^2 + bx \ si \ 0 \leq x \leq 21 \\ c \qquad si \ x > 21 \end{cases}$$

donde x representa la edad en días y P el peso en gramos. Se sabe que la función se continua y que a los 14 días un pollo pesa 2 198 gramos.

a) Encuentra el valor de las constantes b y c.

b) Representa gráficamente el peso en función de x

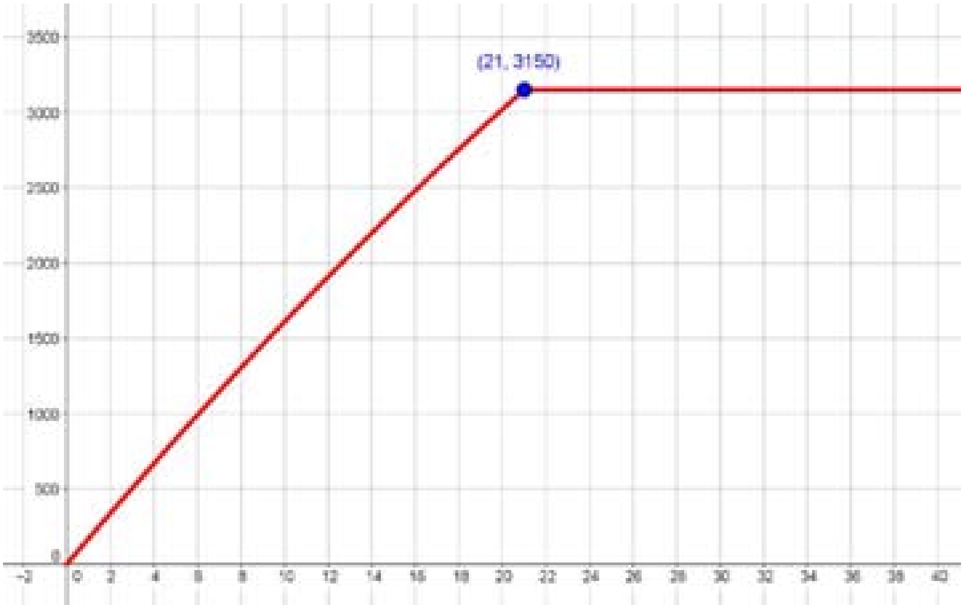
a) Si a los 14 días un pollo pesa 2 198 gramos, se cumplirá:

$$P(14) = 2198 \quad \Rightarrow \quad -(14)^2 + 14b = 2198 \quad \Rightarrow \quad b = 171$$

Si la función P (x) es continua, entonces:

$$\lim_{x \to 21} \left(-x^2 + 171x\right) = c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3150$$

b) La gráfica de la función $P(x) = \begin{cases} -x^2 + 171x & si\ 0 \le x \le 21 \\ 3150 & si\ x > 21 \end{cases}$ está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, 21] y una semirrecta en el resto de su dominio. Podemos verla a continuación.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 220

1. La gráfica de la función siguiente tiene como asíntota oblicua la recta y = x. ¿Cuáles son los valores de a y b? ¿La función resultante tiene otras asíntotas?

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx - 4}{x - 3}$$

Calculamos los valores de a y b:

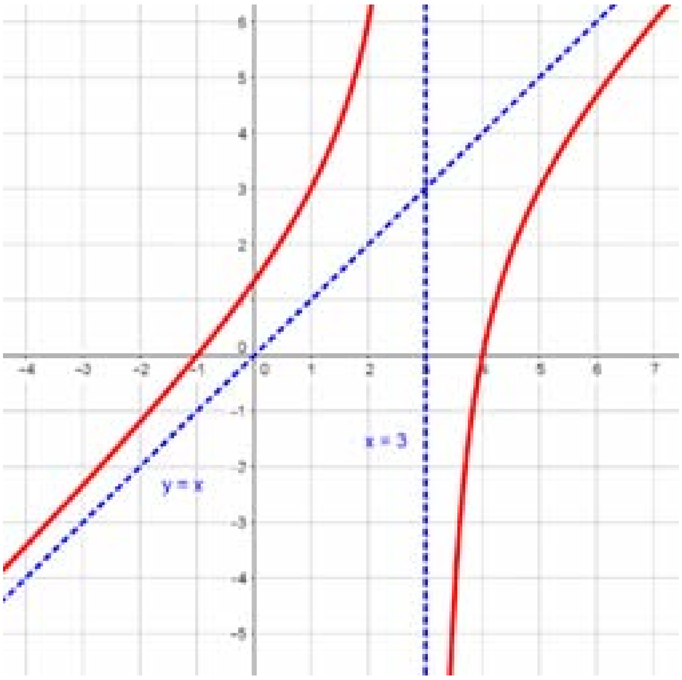
$$m = 1 = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx - 4}{x^2 - 3x} = a$$

$$n = 0 = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + bx - 4}{x - 3} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(b+3)x - 4}{x - 3} = b + 3$$

Por tanto, a = 1; b = - 3 y la función es $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 3}$.

Existe también otra asíntota vertical en x = 3, ya que:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 3} = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 3} = -\infty$$



2. La calificación obtenida por un estudiante en cierto examen depende de las horas de preparación a través de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x + 3} & si\ x > 15 \end{cases}$$

a) Estudia el conjunto de valores positivos de x para los que f (x) es creciente. ¿Tiene sentido afirmar que a más tiempo de preparación corresponde más calificación?

b) Contesta razonadamente si hay algún punto en que estudiar un poco más puede ser muy rentable.

c) ¿Se puede obtener la calificación 10? Justifica la respuesta.

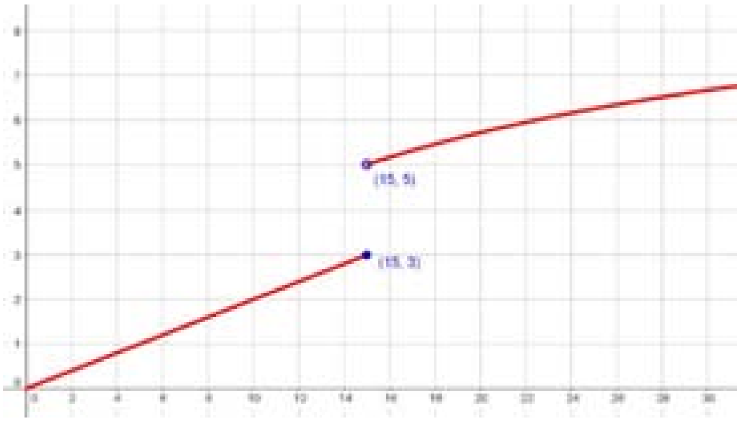
Realizamos la representación gráfica de la función y = f (x).

La gráfica está formada por un segmento recto que une los puntos (0, 0) y (15, 3) y un arco de hipérbola con origen en el punto (15, 5).

a) Vemos en la gráfica que la función es creciente para todos los valores de su dominio $(0, +\infty)$. La derivada de la función es siempre positiva.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{6}{(0{,}2x + 3)^2} & si\ x > 15 \end{cases}$$

Por tanto, tiene sentido afirmar que a más tiempo de preparación corresponde más calificación.

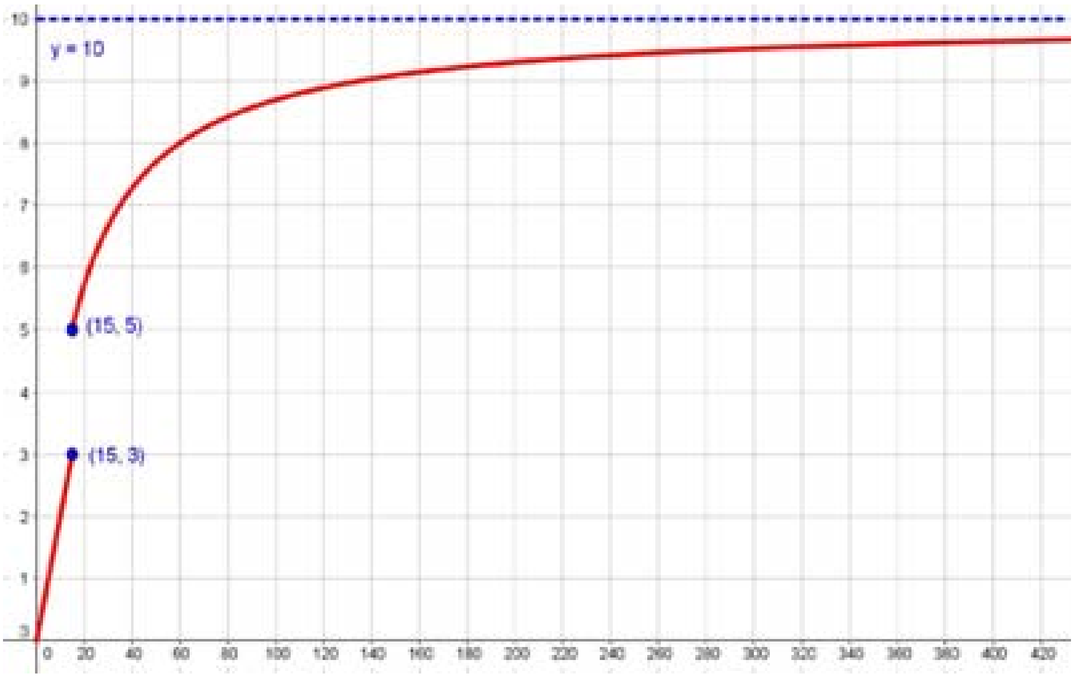


b) Como puede observarse en el dibujo la gráfica es discontinua en x = 15: En un entorno del citado punto pasa de valer 3 a valer 5, de esta manera, estudiando un poco más de 15 horas se obtendría una calificación de 5 y estudiando un poco menos se obtendría un 3. Para x = 15 estudiar un poco más puede ser muy rentable

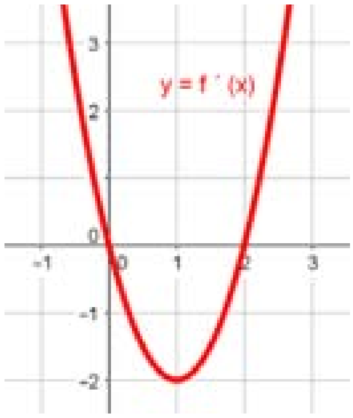
c) Si estudiamos un gran número de horas la calificación que se obtienes es:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{0{,}2x + 3} = \frac{2}{0{,}2} = 10$$

Estudiando muchas horas nos acercaremos a la calificación 10 pero será imposible obtenerla al ser y = 10 una asíntota de la función.



3. El gráfico de la figura, que muestra una función polinómica de segundo grado que pasa por el origen, es la representación de la derivada de una función y = f (x).



a) Determina dónde es creciente y dónde decreciente la función y = f (x).

b) Encuentra los máximos y mínimos relativos, así como los puntos de inflexión de la función y = f (x).

c) Haz un bosquejo de la gráfica de y = f (x). Justifícalo.

a) Estudiamos el signo de la función representada en el gráfico y = f ´ (x) y de esta forma conoceremos la monotonía de la función y = f (x).

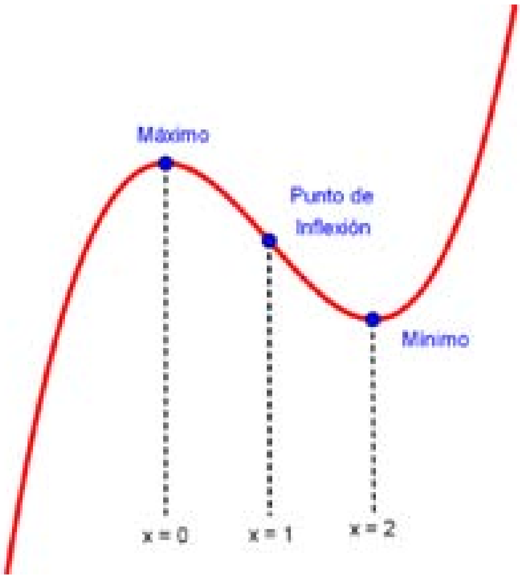
La función y = f (x) es creciente en $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(2, +\infty\right)$, al ser y = f ´ (x) positiva en ese intervalo y decreciente en (0, 2), al ser y = f ´ (x) negativa en ese intervalo.

b) El máximo de y = f (x) se alcanza en x = 0 ya que la función y = f ´ (x) pasa de ser creciente a ser decreciente.

El mínimo de y = f (x) se alcanza en x = 2 ya que la función y = f ´ (x) pasa de ser decreciente a ser creciente.

El punto de inflexión de y = f (x) se obtiene en x = 1 ya que la derivada de y = f ´ (x), es decir, f ´´ (x) se anula en dicho punto.

c) Un bosquejo de la gráfica de y = f (x) podría ser la del dibujo adjunto.



4. La producción de cierta hortaliza en un invernadero, P (x) en kilogramos, depende de la temperatura, x en grados centígrados, según la expresión:

$$\mathbf{P\ (x) = (x + 1)^2 \cdot (32 - x)}$$

Calcula cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero. ¿Qué producción se obtendrá con dicha temperatura óptima? Representa de forma aproximada la función en el intervalo [- 5, 25].

Para hallar la temperatura óptima, igualamos a cero la derivada primera:

$$P\,'(x) = -3x^2 + 60x + 63 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 20x - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 21 \\ x = -1 \end{cases}$$

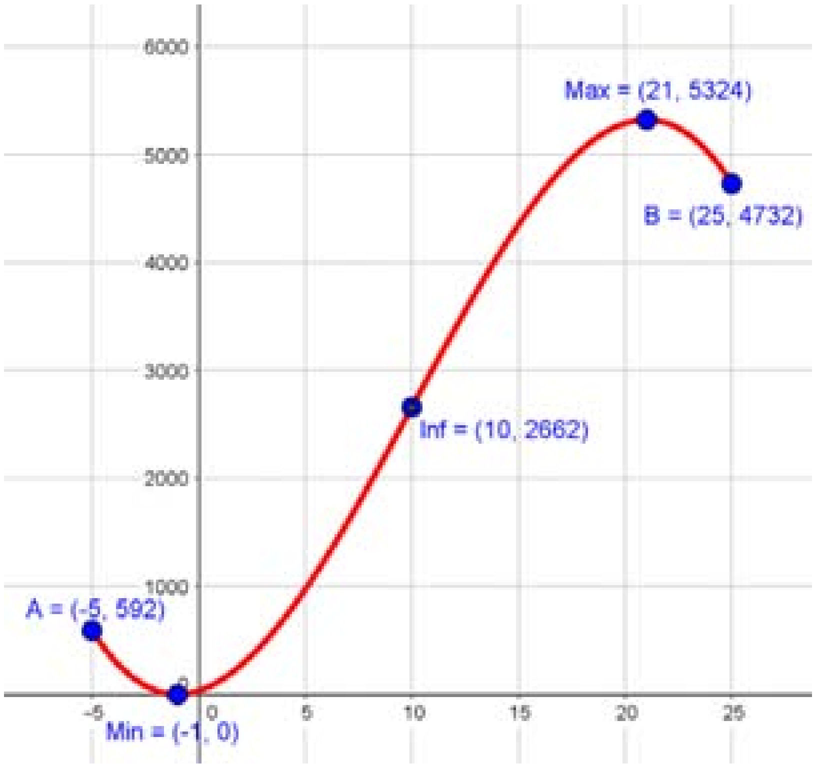
Con la derivada segunda, P ´´ (x) = - 6x + 60, determinamos el tipo de extremo relativo:

$$P''(21) = -66 < 0 \text{ (máximo) e } P''(-1) = 66 > 0 \text{ (mínimo)}$$

La temperatura óptima son 21 ºC.

Con la temperatura óptima se obtienen:
$P(21) = (21 + 1)^2 \cdot (32 - 21) = 5\,324$ kilogramos de hortaliza.

La representación gráfica puede verse en el dibujo.



5. La temperatura de un horno viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo que lleva encendido (f (x) representa la temperatura en ºC a los x minutos).

$$f(x) = \frac{900x + 200}{x + 10}, \quad x \geq 0$$

a) Representa gráficamente la función f (x). ¿Disminuye la temperatura del horno en algún instante?

b) Sabiendo que los materiales del horno se deterioran si este alcanza los 1000 ºC, ¿habría que apagar el horno en algún momento para que no sufra daños?

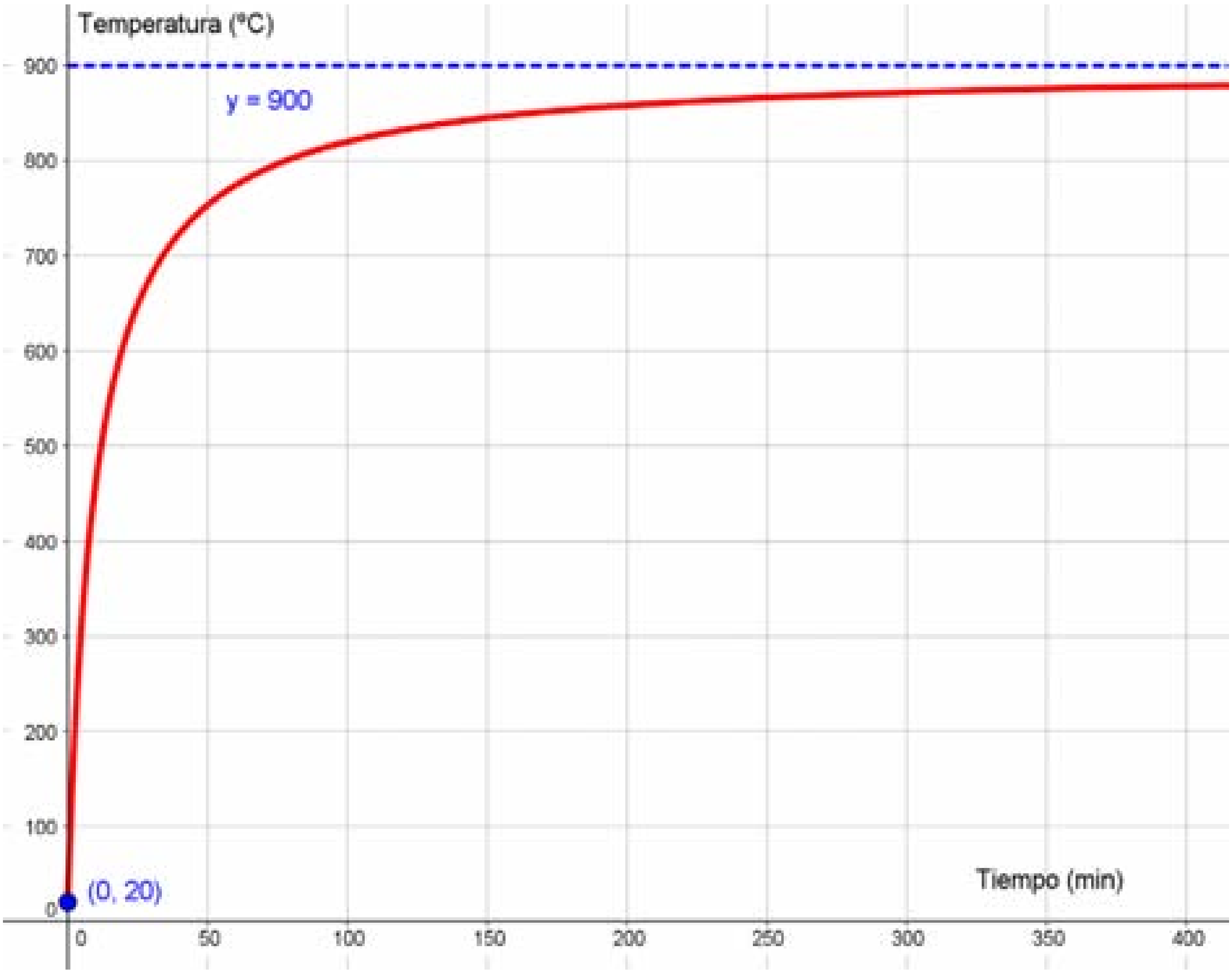
a) la derivada primera de la función es $f'(x) = \dfrac{8\,800}{(x + 10)^2} > 0$.

Como f ´ (x) > 0 para todo x > 0, la función f (x) es siempre creciente, por tanto, la temperatura del horno nunca disminuye.

Además tenemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{900x + 200}{x + 10} = 900$, es decir, la recta y = 900 es una asíntota horizontal.

La temperatura inicial del horno es $f(0) = \dfrac{900 \cdot 0 + 200}{0 + 10} = 20$ ºC.

La representación gráfica puede verse a continuación.



b) No habrá que apagar el horno, la temperatura nunca llega a 900 ºC.

6. En un entorno controlado, el tamaño de una población de aves, P(t) (en cientos), se ajusta a la función:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si\ 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t} & si\ t > 10 \end{cases}$$

Representa gráficamente la función y responde a las cuestiones que siguen.

a) ¿A partir de qué año crecerá la población P (t)? ¿En algún año la población es mínima?

b) Determina el valor al que tiende la población con el paso del tiempo.

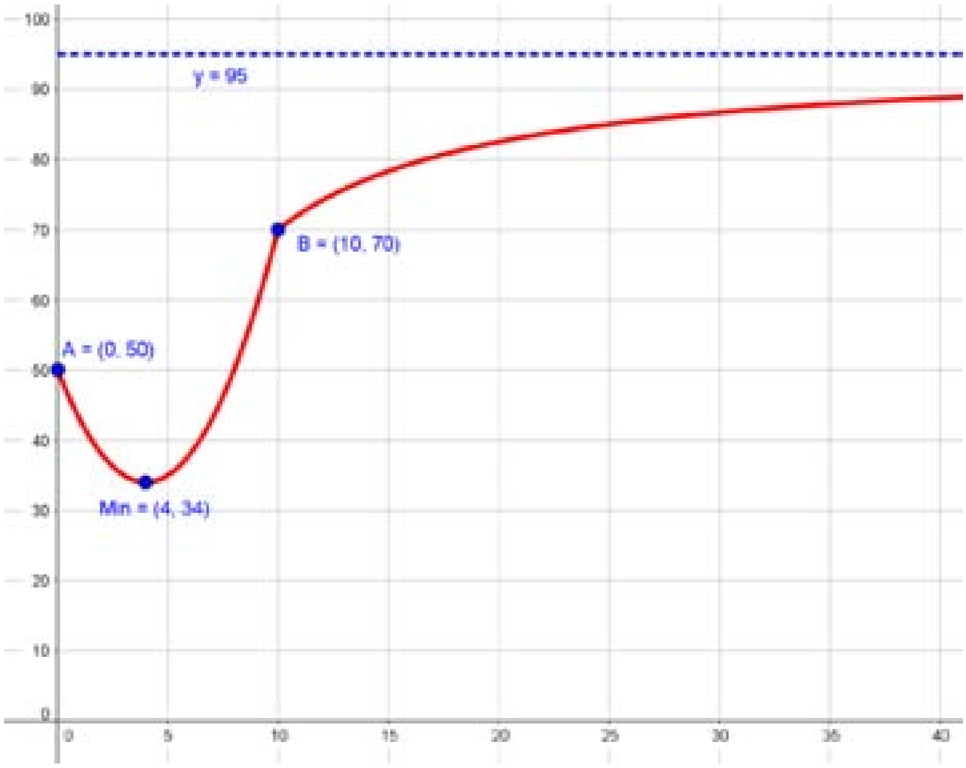
c) Calcula el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5000 y 7500 aves.

Dibujamos la gráfica de P (t), teniendo en cuenta que para 0 ≤ t ≤ 10 es una parábola de vértice el punto (4, 34) y que P (0) = 50 y P (10) = 70.

Para t > 10 es un arco de hipérbola con $P(10) = 95 - \frac{250}{10} = 70$, lo que hace que la función sea continua.

Además, tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 95 al cumplirse $\lim_{t \to +\infty} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 95$.

Teniendo en cuenta lo anterior la gráfica adopta la siguiente forma.



a) La población P (t) crece a partir del 4º año. La población es mínima en el cuarto año, con 3400 aves.

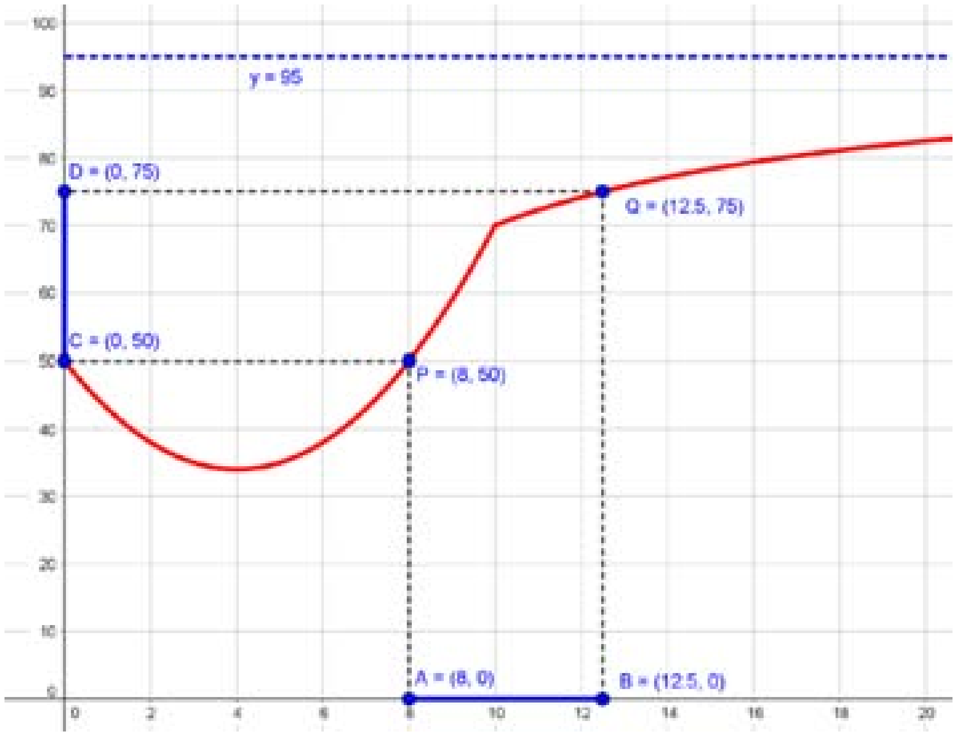
b) Con el paso del tiempo la población tiende a 9 500 aves, ya que $\lim_{t \to +\infty} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 95$.

c) Calculamos el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5000 y 7500 aves.

$$t^2 - 8t + 50 = 50 \Rightarrow t \cdot (t - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$95 - \frac{250}{t} = 75 \Rightarrow 95t - 250 = 75t \Rightarrow 20t = 250 \Rightarrow t = 12{,}5$$

La población se mantiene entre 5 000 y 7 500 aves entre los años 8 y 12,5.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 221

Funciones potenciales en biología

Las funciones de expresión f (x) = k · x^p donde p en un número entero o fraccionario (positivo o negativo), se denominan funciones potenciales.

1. Realiza la representación gráfica cuando p = 1, p = -1, p = 2, p = 3, p = 1/2, p = 1/3, etc. Estudia sus características, en particular, su comportamiento en más infinito o menos infinito y cuando x tiende a cero.

Estas funciones potenciales ejercen de leyes de escala en el ámbito de la naturaleza. Esto significa que al conocer el valor de la función f (x) = x^p en un punto x, el valor de la función para el valor λx (λ veces menor), es f (λx) = $\lambda^p \cdot x^p = \lambda^p \cdot$ f (x), es decir, λ^p veces menor.

Existen muchos comportamientos, asociados a fenómenos naturales, que siguen este tipo de leyes. La más famosa de ellas es la ley de Klieber (descubierta por Max Klieber en 1932) o ley ¾ del metabolismo basal que relaciona el ritmo metabólico (Q) de un animal con su masa (M) y viene dada por la expresión Q ≈ $M^{3/4}$. Esta ley tiene consecuencias muy importantes respecto a la distribución masa-tamaño (diversidad de la biomasa) en el planeta. Para las plantas el exponente es próximo a 1.

2. Busca ejemplos de animales y plantas que sigan la ley de Klieber. Realiza representaciones gráficas de la expresión matemática de la ley para distintos seres vivos.

Otras leyes de escala en Biología son la ley de Damuth (1981) que relaciona el número de animales en función de su masa o la ley de Fenchel (1974) que establece que las especies de mayos tamaño corporal poseen menores tasas de crecimiento corporal.

3. Busca información sobre las leyes anteriores, ¿qué expresión matemática tienen?, analiza el significado de sus variables, realiza representaciones gráficas adecuadas.

4. ¿Existen otras leyes de escala, análogas a las anteriores?

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre las leyes de escala.

● Para conocer más sobre la ley de Kleber ver el artículo "*La ley de la selva sigue siempre las mismas reglas matemáticas*", aparecido en El País el 3 de septiembre de 2015.

● MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid

● http://www.ecologia.info/leyes.htm

● www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt

● www.ua.es/personal/mj.caturla/bio/tema1.MetabolismoyMasa.pdf

UNIDAD 9: Integrales indefinidas

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 222

1. Una función *F(x) es primitiva de una función f(x) siempre que la derivada de F(x) sea f(x).* Comprueba, en cada uno de los siguientes apartados, que la función F(x) es primitiva de f(x).

a) $F(x) = \ln \sqrt[3]{6x^2+5}$; $f(x) = \dfrac{4x}{6x^2+5}$

b) $F(x) = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$; $f(x) = \dfrac{1-3x}{(x-1)^3}$

Fácilmente se deriva la función F (x) y se obtiene f (x).

2. Encuentra funciones cuyas derivadas sean las siguientes:

a) $f(x) = 3x^2$ **c)** $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = e^x$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Un ejemplo de funciones son:

a) $F(x) = x^3 + 5$; $F(x) = x^3 - 2/5$

b) $F(x) = e^x - 3$; $F(x) = e^x + \sqrt{2}$

c) $F(x) = \text{sen } x + \dfrac{1}{2}$; $F(x) = \text{sen } x + \pi$

d) $F(x) = 2 \cdot \ln|x-1| + \dfrac{2}{5}$; $F(x) = 2 \cdot \ln|x-1| - \sqrt{5}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 235

1. Número impares. Demuestra que la suma de dos números naturales impares es un número par.

Se puede decir:

Los números de la forma 2n + 1 y 2n + 3 son números impares. Su suma es:

$$(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4 \cdot (n + 1).$$

2. Números cuadrados. Demuestra que si a, b, c y d son números naturales, tales que:

$$\mathbf{P = a^2 + b^2 \quad y \quad Q = c^2 + d^2}$$

entonces el producto PQ es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

Queda del siguiente modo:

$$P \cdot Q = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 237

1. Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (3x-1)\cdot \ln(x+2)\,dx$ **b)** $\int \sqrt{\dfrac{3}{1+3x}}\,dx$ **c)** $\int \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-7x+10}\,dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos la solución de cada una de estas integrales indefinidas que vemos en las imágenes siguientes:

$$\int (3\cdot x-1)\cdot \ln(x+2) \rightarrow -6\cdot \ln(|x+2|)+\left(\left(\frac{3\cdot x^2}{2}-x-2\right)\cdot \ln(x+2)-\frac{3\cdot x^2}{4}\right)+4\cdot x$$

$$\int \sqrt{\frac{3}{1+3\cdot x}} \rightarrow \frac{6\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3\cdot x+1}}$$

$$\int \frac{2\cdot x^2+3\cdot x-2}{x^2-7\cdot x+10} \rightarrow 21\cdot \ln(|-x+5|)-4\cdot \ln(|x-2|)+2\cdot x$$

2. Halla las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^3 \dfrac{3x-1}{x^2+x}\,dx$ **b)** $\int_0^1 (5x+4)\cdot e^{-x}\,dx$ **c)** $\int_0^{\pi} sen^5\, x\,dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos el resultado de cada una de estas integrales definidas que vemos en la imagen siguiente:

$$\int_1^3 \frac{3x-1}{x^2+x} \rightarrow 1.674$$

$$\int_0^1 (5x+4)\cdot e^{-x} \rightarrow \frac{9\cdot e-14}{e}$$

$$\int_0^{\pi} (\text{sen }(x))^5 \rightarrow \frac{16}{15}$$

3. Calcula el área del recinto, del primer cuadrante, limitado por las gráficas de las funciones f (x) = x^2 - 6; g(x) = $\sqrt{x}$ y el eje OX.

De la misma forma que hemos hecho en la actividad desarrollada resolvemos esta nueva actividad como vemos en la siguiente imagen:

$f(x)=x^2-6 \rightarrow x\mapsto x^2-6$

$g(x)=\sqrt{x} \rightarrow x\mapsto \sqrt{x}$

dibujar(f(x),{color=rojo,anchura_linea=2}) → tablero1

dibujar(g(x),{color=azul,anchura_linea=3}) → tablero1

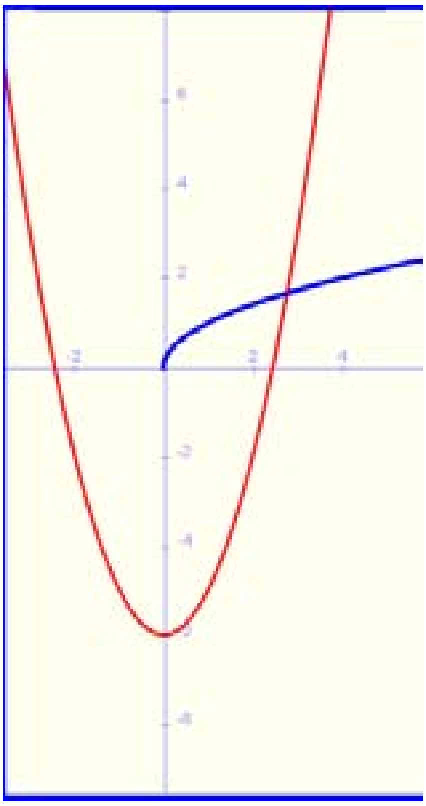
resolver(f(x)=g(x)) → {{x=2.7684}}

$\text{resolver}(f(x)=0) \rightarrow \{\{x=-\sqrt{6}\},\{x=\sqrt{6}\}\}$

$\text{Integral1}=\int_0^{2.7684}(g(x)) \rightarrow 3.0708$

$\text{Integral2}=\int_{\sqrt{6}}^{2.7684}(f(x)) \rightarrow 0.25993$

$\text{Area}=|\text{Integral1}-\text{Integral2}| \rightarrow 2.8109$



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 240

1. Halla dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) f (x) = 4x **b) f (x) = 3x² + 5** **c) f (x) = -3** **d) f (x) = e⁻ˣ**

Ejemplos de las primitivas pedidas son:

a) $F(x) = 2x^2 + 4$; $F(x) = 2x^2 - 7$

b) $F(x) = x^3 + 5x - 2$; $F(x) = x^3 + 5x$

c) $F(x) = -3x + 1$; $F(x) = -3x - 0{,}5$

d) $F(x) = -e^{-x} + 9$; $F(x) = -e^{-x} - 6$

2. Halla una función f(x) cuya derivada es $f'(x) = \frac{3}{x-1}$ y que pasa por el punto (2, 5).

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos:

$F(x) = \int \frac{3}{x-1}\,dx = 3\ln|x-1| + C$

Como f (2) = 5, entonces 5 = 3 · ln (1) + C, de modo que C = 5. La función buscada es:

$$f(x) = 3\ln|x-1| + 5$$

3. Halla la primitiva de la función $f(x) = (2x - 3)^2$ que valga $\frac{9}{2}$ para x = 0.

Todas las primitivas de la función son $f(x) = \int (2x-3)^2\,dx = \frac{(2x-3)^3}{6} + C$.

Se debe verificar que $f(0) = \frac{9}{2}$. De modo que sustituyendo obtenemos: $\frac{9}{2} = \frac{-27}{6} + C$, es decir, C = 9.

La función buscada es $f(x) = \frac{(2x-3)^3}{6} + 9$

4. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones potenciales:

a) $\int 7x^2\,dx$ **e)** $\int (6x^2 - 5x + 7)\,dx$ **i)** $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2\right) dx$

b) $\int \frac{5}{x^4}\,dx$ **f)** $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2}\right) dx$ **j)** $\int 4x^2 \cdot (x^2+2)^2\,dx$

c) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$ **g)** $\int 3x\,(2x+5)^2\,dx$ **k)** $\int (6x^2-5)^8 \cdot x\,dx$

d) $\int \frac{x}{2x^3}\,dx$ **h)** $\int \left(\frac{5x^2 - 9}{x^2}\right) dx$ **l)** $\int 7x^2\,\sqrt{x^3+2}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int 7x^2\ dx = \dfrac{7x^3}{3} + C$

b) $\int \dfrac{5}{x^4}\ dx = \dfrac{-5}{3\ x^3} + C$

c) $\int \sqrt[5]{x^2}\ dx = \dfrac{5\ \sqrt[5]{x^7}}{7} + C$

d) $\int \dfrac{x}{2x^3}\ dx = \dfrac{-1}{2x} + C$

e) $\int \left(6x^2 - 5x + 7\right) dx = 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 7x + C$

f) $\int \left(4x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right) dx = x^4 + \dfrac{2}{x} + C$

g) $\int 3x\ (2x+5)^2\ dx = 3x^4 + 20x^3 + \dfrac{75}{2}x^2 + C$

h) $\int \left(\dfrac{5x^2 - 9}{x^2}\right) dx = 5x + \dfrac{9}{x} + C$

i) $\int \left(\dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^4}{8} - 2\right) dx = 3\sqrt{x} + \dfrac{x^5}{40} - 2x + C$

j) $\int 4x^2 \cdot \left(x^2 + 2\right)^2\ dx = \int \left(4x^6 + 16x^4 + 16x^2\right) dx = \dfrac{4x^7}{7} + \dfrac{16x^5}{5} + \dfrac{16x^3}{3} + C$

k) $\int \left(6x^2 - 5\right)^8 \cdot x\,dx = \dfrac{\left(6x^2 - 5\right)^9}{108} + C$

l) $\int 7x^2\ \sqrt{x^3 + 2}\ dx = \dfrac{14\ \sqrt{\left(x^3 + 2\right)^3}}{9} + C$

5. Resuelve las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones exponenciales:

a) $\int e^{3x}\,dx$ **c)** $\int x\cdot 7^{5x^2}\,dx$ **e)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int 2^{4x}\,dx$ **d)** $\int x^2\cdot e^{x^3}\,dx$ **f)** $\int \left(e^{-2x}+e^{2x}\right)dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+C$

b) $\int 2^{4x}\,dx = \frac{1}{4\ln 2}2^{4x}+C$

c) $\int x\cdot 7^{5x^2}\,dx = \frac{1}{10\cdot\ln 7}7^{5x^2}+C$

d) $\int x^2\cdot e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

e) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}}+C$

f) $\int \left(e^{-2x}+e^{2x}\right)dx = \frac{-1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

6. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones logarítmicas:

a) $\int \frac{3}{2x-1}dx$ **c)** $\int \frac{5x}{4+16x^2}dx$ **e)** $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$

b) $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\,dx$ **d)** $\int \frac{2e^x}{3+e^x}\,dx$ **f)** $\int \frac{12x-3}{4x^2-2x+3}\,dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

b) $\int \frac{4x^2}{2x^3+5}\,dx = \frac{2}{3}\ln|2x^3+5|+C$

c) $\int \frac{5x}{4+16x^2}dx = \frac{5}{32}\ln|4+16x^2|+C$

d) $\int \frac{2e^x}{3+e^x}\,dx = 2\ln|3+e^x|+C$

e) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \; dx \quad = \ln \left| \ln x \right| + C$

f) $\int \frac{12x-3}{4x^2-2x+3} \, dx \; = \; \frac{3}{2} \ln \left| 4x^2 - 2x + 3 \; \right| + C$

7. Halla las siguientes integrales inmediatas, cuyas funciones primitivas son funciones trigonométricas o sus inversas:

a) $\int sen2x \;\; dx$

b) $\int x \cdot \cos x^2 \;\; dx$

c) $\int \frac{\cos x}{2 + senx} dx$

d) $\int (\cos 3x)^3 \cdot sen 3x \;\; dx$

e) $\int tg\, x \;\; dx$

f) $\int \frac{5x^2}{\cos^2 \; x^3} \; dx$

g) $\int \frac{3}{1+16x^2} dx$

h) $\int \frac{2}{9+x^2} dx$

i) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int sen2x \;\; dx \; = \; -\frac{1}{2} \cos \, 2x + C$

b) $\int x \cdot \cos x^2 \;\; dx \; = \; \frac{1}{2} \; sen \left(x^2 \right) + C$

c) $\int \frac{\cos x}{2 + senx} dx \quad = \ln\left(2 + senx \right) + C$

d) $\int (\cos 3x)^3 \cdot sen 3x \;\; dx = \; -\frac{1}{12} \cos^4 \; (3x) + C$

e) $\int tg\, x \; dx = -\ln \left| \cos x \right| + C$

f) $\int \frac{5x^2}{\cos^2 \; x^3} \; dx \quad = \; \frac{5}{3} \, tg\, x^3 \; + C$

g) $\int \frac{3}{1+16x^2} \; dx = \; \frac{3}{4} \, arctg \left(4x \right) + C$

h) $\int \frac{2}{9+x^2} dx \; = \; \frac{2}{3} \, arctg \left(\frac{x}{3} \right) + C$

i) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} \; dx = \quad 6 \cdot arcsen \left(\frac{x}{2} \right) + C$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 241

8. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x}\,dx$ **e)** $\int 3\cdot \cos 6x\ dx$ **i)** $\int \frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^2}{4\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int (1-4x)^3\ dx$ **f)** $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3+4}\right) dx$ **j)** $\int \frac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\,dx$

c) $\int \frac{4\cdot\cos 2x}{3 - sen2x}\,dx$ **g)** $\int 5\sqrt{3x+2}\ dx$ **k)** $\int \frac{3x}{16+x^4}dx$

d) $\int \frac{9x^2}{1+x^3}\,dx$ **h)** $\int \left(\sqrt[3]{5x} - \frac{3}{x^6}\right) dx$ **l)** $\int \frac{3}{\sqrt{1-6x^2}}dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{4x^3 - 3\sqrt{x} + 2}{6x}\,dx = \frac{2x^3}{9} - \sqrt{x} + \frac{1}{3}\ln|x| + C$

b) $\int (1-4x)^3\ dx = \frac{-(1-4x)^4}{16} + C$

c) $\int \frac{4\cdot\cos 2x}{3 - sen2x}\,dx = -2\cdot\ln|3 - sen2x| + C$

d) $\int \frac{9x^2}{1+x^3}\,dx = 3\cdot\ln\left|1+x^3\right| + C$

e) $\int 3\cdot\cos 6x\ dx = \frac{1}{2}\,sen6x + C$

f) $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{x^3+4}\right) dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x} + \frac{5}{3}\ln\left|x^3+4\right| + C$

g) $\int 5\sqrt{3x+2}\ dx = \frac{10}{9}(3x+2)^{3/2} + C$

h) $\int \left(\sqrt[3]{5x} - \frac{3}{x^6}\right) dx = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x)^4} + \frac{3}{5x^5} + C$ =

i) $\int \frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^2}{4\sqrt{x}}\,dx = \frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^3}{18} + C$

j) $\int \frac{3x}{\left(x^2+7\right)^5}\,dx = \frac{-3\left(x^2+7\right)^{-4}}{8}+C$

k) $\int \frac{3x}{16+x^4}dx = \frac{3}{8}\,arctg\left(\frac{x^2}{4}\right)+C$

l) $\int \frac{3}{\sqrt{1-6x^2}}dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\,arcsen\left(\sqrt{6}\,x\right)+C$

9. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int 3x \cdot e^x\,dx$

b) $\int (2-5x)\cdot sen\,(2x)\,dx$

c) $\int 5\ln x\,dx$

d) $\int (x+3)\cdot e^{-x}\,dx$

e) $\int 2^{3x}\cdot x\,dx$

f) $\int e^x \cdot \cos x\,dx$

g) $\int x\cdot \cos x\,dx$

h) $\int x\cdot \ln\,x\,dx$

i) $\int e^{2x}\cdot x^2\,dx$

En cada una de las siguientes integrales utilizamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u\cdot v - \int v \cdot du$$

a) $\int 3x\cdot e^x\,dx = 3x\cdot e^x - \int 3\,e^x\,dx = 3x\cdot e^x - 3\cdot e^x + C$

b) $\int (2-5x)\cdot sen(2x)\,dx = -\frac{2-5x}{2}\cdot\cos 2x - \int \frac{5}{2}\cos 2x\,dx = -\frac{2-5x}{2}\cos\,2x - \frac{5}{4}\,sen 2x + C$

c) $\int 5\ln x\,dx = 5x\cdot\ln x - 5x + C$

d) $\int (x+3)\cdot e^{-x}\,dx = -(x+3)\cdot e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+4)\cdot e^{-x} + C$

e) $\int 2^{3x}\cdot x\,dx = \frac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{3x} - \frac{1}{3\ln 2}\int 2^{3x}\,dx = \frac{x}{3\ln 2}\cdot 2^{3x} - \frac{1}{(3\ln 2)^2}\cdot 2^{3x}+C$

f) Esta es una integral cíclica, pues al aplicar dos veces la integración por partes vuelve a salir la misma integral:

$\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx = e^{2x}\cdot \text{sen x} - \int 2e^{2x}\cdot sen\,x\,dx = e^{2x}\cdot \text{sen x} + 2e^{2x}\cdot\cos x - \int 4e^{2x}\cdot\cos x\,dx$

Llamando I a la integral inicial obtenemos: I = $e^{2x}\cdot$ sen x + $2e^{2x}\cdot$ cos x – 4 I. De modo que despejando I:

$\int e^{2x} \cdot \cos x \, dx = \dfrac{e^{2x} \cdot senx + 2e^{2x} \cdot \cos x}{5} + C$

g) $\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot senx - \int senx \, dx = x \cdot senx + \cos x + C$

h) $\int x \cdot \ln x \; dx = \dfrac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln x - \int \dfrac{1}{2} x \; dx = \dfrac{x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \dfrac{1}{2} \right) + C$

i) $\int e^{2x} \cdot x^2 \, dx = \dfrac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{2x} - \int x \, e^{2x} \, dx = \dfrac{1}{2} \cdot e^{2x} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{2} \right) + C$

10. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

a) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ **d)** $\int \dfrac{3x+1}{x^2 - 4x + 3} dx$ **g)** $\int \dfrac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 2} dx$

b) $\int \dfrac{5x-1}{x^2 - 1} dx$ **e)** $\int \dfrac{3x^3 + 16x}{x^2 + 4} dx$ **h)** $\int \dfrac{x^3 + 6}{x^2 - 4} dx$

c) $\int \dfrac{x^2 + 2}{x} dx$ **f)** $\int \dfrac{x-2}{x^2 + 2x} dx$ **i)** $\int \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 + 1} dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \dfrac{-1}{x-2} dx + \int \dfrac{1}{x-3} dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$

b) $\int \dfrac{5x-1}{x^2-1} dx = \int \dfrac{2}{x-1} dx + \int \dfrac{3}{x+1} dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + C$

c) $\int \dfrac{x^2+2}{x} dx = \int x \, dx + \int \dfrac{2}{x} dx = \dfrac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C$

d) $\int \dfrac{3x+1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \dfrac{-2}{x-1} dx + \int \dfrac{5}{x-3} dx = -2\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$

e) $\int \dfrac{3x^3 + 16x}{x^2 + 4} dx = \int 3x \, dx + \int \dfrac{4x}{x^2+4} dx = \dfrac{3x^2}{2} + 2\ln|x^2 + 4| + C$

f) $\int \dfrac{x-2}{x^2 + 2x} dx = \int \dfrac{-1}{x} dx + \int \dfrac{2}{x+2} dx = -\ln|x| + 2\ln|x+2| + C$

g) $\int \dfrac{2x^2 - 10}{x^2 - x - 2} dx = \int \dfrac{2\left(x^2 - x - 2\right) + 2x - 6}{x^2 - x - 2} dx = \int 2 \, dx + \int \dfrac{2x - 6}{x^2 - x - 2} dx =$

$= 2x + \int \dfrac{8/3}{x+1} dx + \int \dfrac{-2/3}{x-2} dx = 2x + \dfrac{8}{3} \ln|x+1| - \dfrac{2}{3} \ln|x-2| + C$

h) $\int \frac{x^3+6}{x^2-4}dx = \int \frac{x\left(x^2-4\right)+4x+6}{x^2-4}dx = \int x\,dx + \int \frac{4x+6}{x^2-4}dx =$

$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{7}{2}}{x-2}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

i) $\int \frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2+1}dx = \int (x-2)\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}dx = \frac{(x-2)^2}{2} + 5arctg\,(x) + C$

11. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}dx$ **($5x^2 + 2 = t^3$)** **c)** $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$ **($e^x = t$)**

b) $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}dx$ **($\ln x = t$)** **d)** $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ **($x = t^2$)**

Las funciones primitivas buscadas son:

a) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}}dx = \int \frac{4x}{t}\cdot\frac{3t^2}{10x}dt = \frac{3t^2}{5} = \frac{3\left(5x^2+2\right)^{\frac{2}{3}}}{5} + C$

b) $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2}dx = \int \frac{2}{x(3+t)^2}\cdot x\,dt = \frac{-2}{3+t} = \frac{-2}{3+\ln x} + C$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \int \frac{e^x}{t+4}\cdot\frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t+4} = \ln|t+4| = \ln\left|e^x+4\right| + C$

d) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^3}{1+t}dt = \int \frac{(1+t)\cdot\left(2t^2-2t+2\right)-2}{1+t}dt =$

$= \int \left(2t^2-2t+2\right)dt - \int \frac{2}{1+t}dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| =$

$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$

12. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}dx$ **c)** $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ **e)** $\int \frac{\ln x+8}{x(\ln^2 x+4\ln x)}dx$

b) $\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx$ **d)** $\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\ dx$ **f)** $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}dx$

Las funciones primitivas buscadas son:

a) Mediante el cambio x -2 = t^2, obtenemos: $\int \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2}{3+t}\cdot 2t\ dt =$

$$= \int \frac{4t}{3+t}\,dx = \int \frac{4(3+t)-12}{3+t}\ dt = 4t - 12\ln|3+t| = 4\sqrt{x-2} - 12\ln\left|3+\sqrt{x-2}\right| + C$$

b) Mediante el cambio ln x = t, obtenemos: $\int \frac{4+\ln^3 x}{2x}\,dx = \int \frac{4+t^3}{2x}\cdot x\ dt = 2t + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = 2\ln x + \frac{1}{2}\frac{\ln^4 x}{4} + C$

c) Mediante el cambio x = t^2, obtenemos: $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4t}{1+t}2tdt = \int \frac{8t^2}{1+t}\,dt =$ esta es una integral racional y queda:

$$\int \frac{8(t-1)(t+1)+8}{1+t}dt = 8\frac{(t-1)^2}{2} + 8\ln|1+t| = 4\left(\sqrt{x}-1\right)^2 + 8\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

d) Mediante el cambio sen x = t, obtenemos:

$$\int \cos^3 x \cdot sen^2 x\ dx = \int \cos x\cdot\left(1-sen^2 x\right)sen^2 x\ dx = \int \cos x\cdot\left(1-t^2\right)t^2\ \frac{dt}{\cos x} =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$$

e) Mediante el cambio ln x = t, obtenemos: $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4\ln x)}dx = \int \frac{t+8}{x(t^2+4t)}\,x\,dt =$

$$= \int \frac{2}{t}\ dt + \int \frac{-1}{t+4}\ dt = 2\ln|t| - \ln|t+4| = 2\ln|\ln x| - \ln|\ln x + 4| + C$$

f) Mediante el cambio e^x = t, obtenemos: $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{4t}{t^2-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t-1}\,dt + \int \frac{-2}{t+1}\,dt =$

$$= 2\ln|t-1| - 2\ln|t+1| = 2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 242

1. Halla una función f(x) de la que se sabe que f(2) = 5 y f ´(x) = x^3 + 2x.

Todas las primitivas de la función son f(x) = $\int\left(x^3+2x\right)dx = \frac{x^4}{4} + x^2 +$.

Se debe verificar que f (2) = 5. De modo que sustituyendo obtenemos: $5 = \frac{16}{4} + 4 + C$, entonces C = - 3.

La función buscada es f (x) = $\frac{x^4}{4}+x^2-3$

2. Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más adecuado:

a) $\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int \frac{Ln\,x}{x\,(Ln^2 x-1)}dx$ **g)** $\int e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)\,dx$

b) $\int \frac{5-4x}{2x^2+x-1}dx$ **e)** $\int \frac{x+1}{2x^2+4x-5}\,dx$ **h)** $\int \frac{2}{e^x-1}dx$

c) $\int x\,\sqrt{1+2x^2}\,dx$ **f)** $\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}dx$ **i)** $\int \frac{x^2+2x-3}{x-2}\,dx$

a) Mediante el cambio x = t^2, obtenemos:

$$\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\left(2t^2+1\right)^2}{t}\cdot 2t\,dt = \int\left(8t^4+8t^2+2\right)dt = \frac{8\sqrt{x^5}}{5}+\frac{8\sqrt{x^3}}{3}+2\sqrt{x}+C$$

b) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{5-4x}{2x^2+x-1}dx = \ln|2x-1| - 3\ln|x+1| + C$$

c) Resolvemos esta integral por el método de integrales inmediatas:

$$\int x\,\sqrt{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{6}\left(1+2x^2\right)^{3/2}+C$$

d) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\ln x}{x\,(\ln^2 x-1)}dx = \frac{1}{2}\,\ln\left|\ln^2 x-1\right| + C$$

e) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+4x-5}\,dx = \frac{1}{4}\,\ln\left|2x^2+4x-5\right| + C$$

f) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2}\,e^{\sqrt{2x}} + C$$

g) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)\,dx = -\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}+C$$

h) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{2}{e^x - 1} dx = -2x + 2\ln\left|e^x - 1\right| + C$$

i) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} dx = \int (x+4)\, dx + \int \frac{5}{x-2} dx = \frac{(x+4)^2}{2} + 5\ln|x-2| + C$$

3. Halla la primitiva de f(x) = $\frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3}$ que valga 1 para x = 0

Las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

$$F(x) = \int \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3} dx = 2x - 9\ln|x+3| + \ln|x+1| + C$$

Como sabemos que F(0) = 1 sustituyendo obtenemos: C = 1 + 9 ln 3.

La primitiva que pide el problema es: $2x - 9\ln|x+3| + \ln|x+1| + 1 + 9\ln 3$

4. Halla una función f(x) real de variable real de la que se sabe que f ´´ (x) = $3x^2$ - 4x + 3 y que su gráfica presenta un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$.

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

f ´ (x) = $\int (3x^2 - 4x + 3)\, dx$ = $x^3 - 2x^2 + 3x + C$;

f (x) = $\int (x^3 - 2x^2 + 3x + C)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + Cx + K$

Como tiene un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$ se debe verificar: $\begin{cases} f(1) = \frac{11}{12} \\ f´(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2 \\ K = \frac{11}{6} \end{cases}$ por lo que f(x) = $\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{11}{6}$.

5. Halla dos primitivas de la función f(x) = $\frac{4}{1-e^{2x}}$.

Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos todas las primitivas que son:

$$\int \frac{4}{1-e^{2x}} dx = 4x - 2\cdot\ln\left|1-e^{2x}\right| + C$$

Dando valores a la constante C obtenemos las primitivas buscadas:

$$\int \frac{4}{1-e^{2x}} dx = 4x - 2\cdot\ln\left|1-e^{2x}\right| - 7$$

$$\int \frac{4}{1-e^{2x}} dx = 4x - 2\cdot\ln\left|1-e^{2x}\right| + \frac{5}{2}$$

6. La curva que limita un determinado fractal viene dada por la función f (t) = 2t · cos (t). Calcula $\int f(t)\, dt$

Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int f(t)\, dt = \int 2t \cdot \cos t\, dt = 2t \cdot sen t + 2 \cdot \cos t + C$$

7. Sea f(x) = $\frac{2x-12}{x^2-x+1}$. Halla $\int x \cdot f(x) dx$

$$\int x \cdot f(x) dx = \int x \cdot \frac{2x-12}{x^2-x+1} dx = \int \frac{2x^2-12x}{x^2-x+1} dx = \int 2 + \frac{-10x-2}{x^2-x+1} dx =$$

$= 2x - 5\ \ln\left|x^2 - x + 1\right| - \dfrac{14\sqrt{3}}{3}\ arctg\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

8. Halla $\int \dfrac{2^x}{1+4^x}\,dx$

$\int \dfrac{2^x}{1+4^x}\,dx = \dfrac{1}{\ln 2}\cdot arctg\ 2^x + C$

9. Halla una función f: R $\rightarrow$ R si se sabe que f (1) = 1; f ´ (1) = 2; f ´´ (1) = 8 y f ´´´ (x) = 24x - 6.

f ´´ (x) = $\int (24x - 6)\,dx = 12x^2 - 6x + C$;

f ´ (x) = $\int (12x^2 - 6x + C)\,dx = 4x^3 - 3x^2 + Cx + D$

f (x) = $\int (4x^3 - 3x^2 + Cx + D)\,dx = x^4 - x^3 + C\dfrac{x^2}{2} + Dx + K$

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos: $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=2 \\ f''(1)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=-1 \\ K=1 \end{cases}$ por lo que

f (x) = $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

10. Halla una función real de variable real f(x) que pasa por el origen de coordenadas y cuya función derivada es f ´ (x) = x · ln (x² +1).

La función pedida es: f(x) = $\int x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx = \dfrac{x^2}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \int\dfrac{x^3}{x^2+1}dx =$

$= \dfrac{x^2+1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{x^2}{2} + C$

Para que pase por el origen de coordenadas se debe verificar que f (0) = 0. Por lo que C = 0 y la función buscada es: f(x) $= \dfrac{x^2+1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{x^2}{2}$

11. Halla una función polinómica de segundo grado cuya derivada es la función g (x) = 4x – 3 y tiene una tangente en la recta y = x + 2.

La función es f(x) = $\int\left(4x-3\right)dx = 2x^2 - 3x + C$

Si la recta dada es tangente a la gráfica de la función se verifica que g(x) = 4x – 3 = 1; por lo que x = 1 e y = 3. El punto de tangencia es (1, 3).

Si f (1) = 3, se cumplirá 3 = 2 · 1^2 – 3 · 1 + C, entonces C = 4 y la función buscada será f (x) = $2x^2 - 3x + 4$.

12. Dada la función f(x) = x^3 – 12x. Encuentra la función F(x) primitiva de f(x) y que verifique F (2) = 1.

Las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

F(x) = $\int \left(x^3 - 12x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 6x^2 + C$

Como sabemos que F (2) = 1 sustituyendo obtenemos: C = 21.

La primitiva que pide el problema es: F(x) = $\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 21$

13. Halla dos primitivas de la función f(x) = e^{2x+7}. ¿Alguna de las primitivas pasa por el punto (- 3, e)?

13. Todas las primitivas de la función dada son de la forma:

F(x) = $\int e^{2x+7}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x+7} + C$

La primitiva que pasa por el punto dado es: F(x) = $\frac{1}{2} e^{2x+7} + \frac{1}{2} e$

14. De una función y = f (x) se sabe que su derivada es g (x) = x · cos (x^2 + π). Halla f (x) sabiendo que tiene una tangente en el punto (0, 3).

La función es f(x) = $\int x \cdot \cos\left(x^2 + \pi\right) dx = \frac{1}{2} sen\left(x^2 + \pi\right) + C$

Si tiene una tangente en el punto (0, 3) se verifica que f (0) = 3, el valor de C = 3; por lo que la función buscada será f(x) = $\frac{1}{2} sen\left(x^2 + \pi\right) + 3$

15. Dada la función f (x) = (x – 1) · (x + 1) · (x – 3).

a) Halla una primitiva de f (x).

b) Justifica que F (x) = x^4 + 2x – 4 no es primitiva de f (x).

a) Las primitivas de la función dada son: $\int (x-1)(x+1)(x-3) dx = \int \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) dx$ =

$= \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + C$

b) La función F(x) no es primitiva de f(x) pues su derivada es F ´ (x) = $4x^3 + 2 \neq x^3 - 3x^2 - x + 3$ = f(x).

16. Halla una función f(x) polinómica de tercer grado que pase por los puntos (0, 0) y (1, 1) y tal que f ´´ (x) = 6x + 4.

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

f ´(x) = $\int (6x+4)\,dx =$ $3x^2 + 4x + C$

f (x) = $\int (3x^2+4x+C)\,dx =$ $x^3 + 2x^2 + Cx + D$

Obligando a pasar por los puntos dados obtenemos: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-2 \\ D=0 \end{cases}$ por lo que la función polinómica buscada es f(x) = x^3+2x^2-2x .

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 243

Matemáticas electorales
Cada vez que se celebran unas elecciones, locales o municipales (Ayuntamientos), autonómicas (Parlamentos de la Comunidad), generales (Congreso o Senado) o comunitarias (Parlamento Europeo), tras el recuento de votos hay que repartir los puestos de representación entre las diferentes candidaturas presentadas.

La Constitución Española establece que la representación debe ser proporcional al número de votos obtenido por cada candidatura, de modo que a mayor número de votos conseguidos, deberá corresponder mayor número de escaños. Llevar esto a la práctica no es tan sencillo como puede parecer a primera vista.

El sistema de reparto de representantes puede realizarse de múltiples formas. Existen los procedimientos:
- Reparto directamente proporcional.
- Métodos del divisor: regla D´Hondt, método de Saint Lagué puro o método de Saint Lagué modificado. - Métodos de cociente: cociente Hare, cociente Droop y cociente Imperiali.
- Método de la mayoría relativa.

Cada país ha optado por un sistema de reparto con una cierta intención política. Algunos sistemas electorales facilitan la gobernabilidad de la nación, ayuntamiento, etc. otorgando más poder del matemáticamente obtenido a las candidaturas más votadas. En otros casos se potencia la obtención de representación parlamentaria de las candidaturas con menos votos para potenciar la presencia política de las minorías.

Todo lo anterior forma parte del campo matemático denominado *Teoría de la elección social* que se ocupa, entre otros aspectos, de medir el poder en organizaciones políticas, económicas, educativas, etc. Se ocupa de los sistemas de votación, con o sin peso, la influencia de los miembros, las alianzas o coaliciones, los pactos, la cooperación, los índices de poder (índices de Shapley, Banzhaf o Deegan).

Estudia, analiza y describe cada uno de los sistemas de reparto de representantes que se nombran, el coste, en votos, que le cuesta a cada partido sus escaños, el beneficio o pérdida de escaños para cada candidatura según el sistema elegido.

Investiga sobre la medida del poder a través de los índices citados.

Ofrecemos bibliográfica donde encontrar información sobre las cuestiones expuestas, además en Internet puede localizarse, sin dificultad, trabajos realizados sobre los aspectos reseñados.

ESPINEL FEBLES, Mª. C. (1999) *El poder y las coaliciones*, Suma, nº 31, 109-117

ESPINEL FEBLES, Mª. C. (1999) *Sistema de reparto de poder en las elecciones locales*, Números nº 39, 13-19

GARFUNKEL, S. (1999) *Las matemáticas en la vida cotidiana.,* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

NORTES CHECA, A. (2001) *Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas*, Suma, nº 36, 43-49

PÉREZ CARRETERO, F. D. (2012) *Matemáticas y política. Las leyes electorales*, Suma, nº 71, 31-38

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1985) *Matemática Aplicada a la distribución de escaños. Método de reparto P. R. I.,* Epsilón nº 6/7

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1990) *Fórmulas electorales basadas en sucesiones de divisores.,* Suma nº 7, 29-38

UNIDAD 10: Integrales definidas. Aplicaciones

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 244

1. Halla el área de cada uno de los siguientes recintos:

a) Limitado por la recta y = $\frac{1}{4}$x, el eje OX y la recta x = 2.

b) Limitado por la recta $y = -\frac{1}{2}x - 2$, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 4.

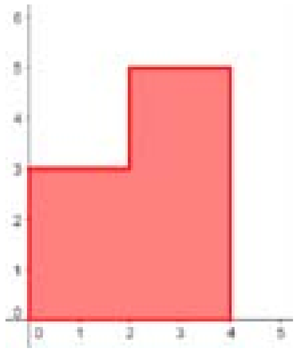
Las áreas pedidas son:

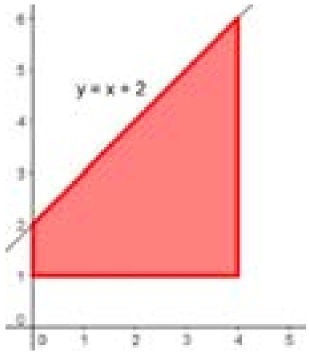
a) 0,5 unidades cuadradas.

b) 7 unidades cuadradas.

2. Calcula el área de los recintos de las siguientes figuras:

a)





a) Geométricamente el área del recinto es la de un rectángulo de base 4 unidades y altura 5 unidades menos la de un cuadrado de 2 unidades de lado. Por tanto, el área vale 16 unidades cuadradas.

Analíticamente el área es: $\int_0^4 5\,dx - 4 = 16$

b) Geométricamente el área es un trapecio de base mayor 5 unidades, base menor 1 unidad y altura 4 unidades. Por tanto el área vale 12 unidades cuadradas.

Analíticamente el área es: $\int_0^4 (x+2)\,dx - 4 = 12$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 259

1. Teoremas. A partir del siguiente enunciado, que es un teorema directo, enuncia el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco:

«La suma de dos números naturales impares es un número par»

La solución queda:

Directo: Si sumamos dos números impares entonces, obtenemos un número par.

Este resultado es verdadero: (2n + 1) + (2m + 1) = 2 · (n + m + 1) que es un número par.

Recíproco: Si obtenemos un número par, entonces, sumamos dos números impares.

Este resultado es falso. Podemos obtener un número par de la suma de dos pares.

Contrario: Si no sumamos dos números impares, entonces, no obtenemos un número par.

Este resultado es falso. De la suma de dos números pares se obtiene un número par.

Contrarrecíproco: Si no obtenemos un número par, entonces, no sumamos dos números impares.

Este resultado es verdadero. Si no obtenemos un número par, estamos obteniendo un número imanar. Este resultado proviene de sumar un número impar y otro número par; por tanto, no sumamos dos números impares.

2. Desigualdad. Demuestra que si a y b son dos números reales positivos, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

La solución es:

Como en la hipótesis nos dicen que a y b son dos números reales positivos, podríamos decir que $m = \sqrt{a}$ y $n = \sqrt{b}$; así la desigualdad quedaría de la forma:

$$\frac{2}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}} \leq m \cdot n$$

Operando en esta desigualdad obtenemos $\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \leq m \cdot n$ o lo que es lo mismo, vamos a demostrar que:

$$m \cdot n - \frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \geq 0.$$

Operando convenientemente en la primera expresión, obtenemos:

$$m \cdot n \left[\frac{m^2+n^2-2mn}{m^2+n^2}\right] = m \cdot n \, \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$$

Y como m y n son números reales positivos queda probado que esta expresión es mayor o igual que cero, que es lo que queríamos demostrar.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 261

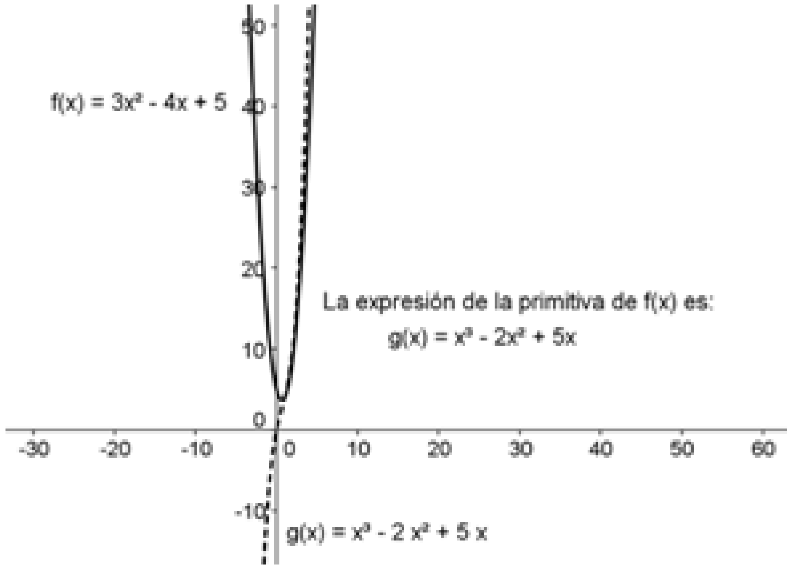
1. Calcula las siguientes integrales: a) $\int (3x^2 - 4x + 5)\, dx$ **b)** $\int \ln x\, dx$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe INTEGRAL INDEFINIDA.

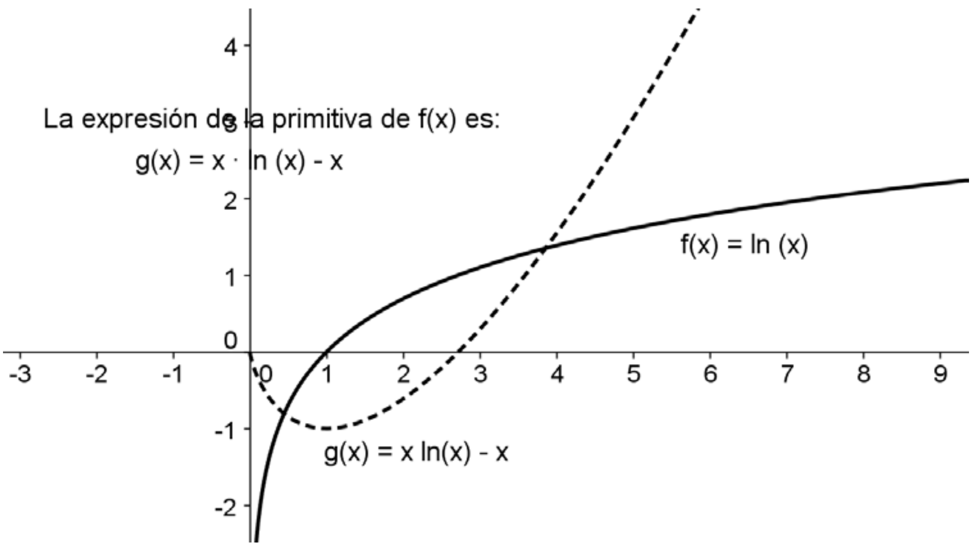
a) Para la integral $\int (3x^2 - 4x + 5)\, dx$:

- Introducimos en el **Campo de Entrada** la expresión de la función que aparece en el integrando, tecleando **f(x)=3x^2-4x^3+5** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica.

- Con el comando **Integral [f]** dibujamos la gráfica de la función primitiva (en línea discontinua en el dibujo) y su expresión, g(x) = x^3 - $2x^2$ + 5x, podemos verla en la ventana algebraica o en el menú contextual de la gráfica.



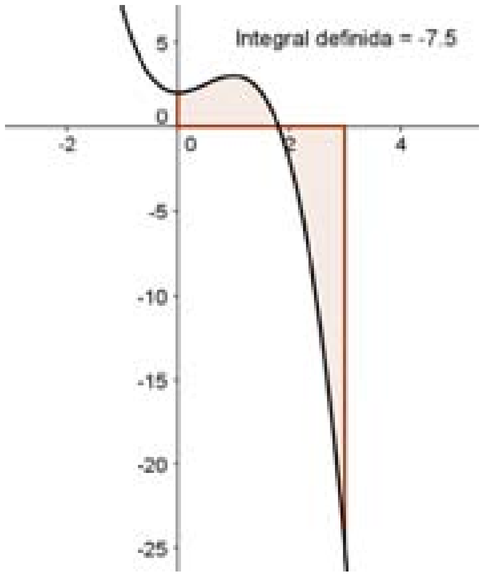
a) Para la otra integral procedemos de manera análoga y obtenemos la primitiva g(x) = x · ln (x) – x, que puede verse en el dibujo.



2. Obtén el valor de $\int_0^3 \left(-2x^3 + 3x^2 + 2\right) dx$; así como las sumas inferiores y superiores.

Seguimos los pasos del epígrafe INTEGRAL DEFINIDA. SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES

- Introducimos en el **Campo de Entrada** la expresión de la función integrando, **f(x)=-2x^3+3x^2+2**, y visualizamos su gráfica.



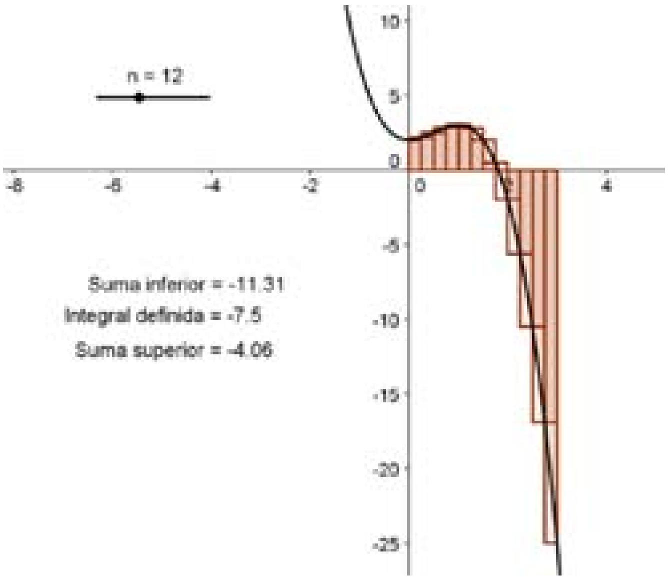
- El comando **Integral [f, 0, 3]** calcula el valor de la integral definida, que es **a = -7.5**; dibuja la región delimitada por la gráfica de la función, el eje OX y las abscisas x = 0, x = 3; además vemos su valor en la ventana algebraica.

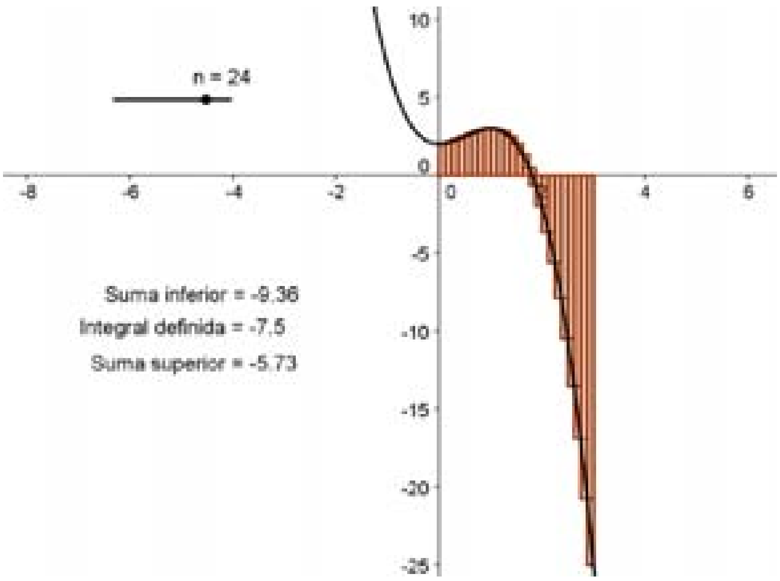
- Creamos un deslizador que llamamos **n** y hacemos que varíe de 1 a 30, con incrementos de una unidad.

- El comando **SumaInferior [f, 0, 3, n]** calcula y representa la suma inferior de la función con una partición del intervalo [0, 3] en n subintervalos. El valor de la citada suma puede verse en la ventana algebraica.

- El comando **SumaSuperior [f, 0, 3, n]** calcula y representa la suma superior de la función con una partición del intervalo [0, 3] en n subintervalos. El valor de la citada suma puede verse en la ventana algebraica.

- Tecleamos los textos “Integral definida =” +a; “Suma inferior =” +b y “Suma superior =” +c y observaremos los citados valores en la Ventana gráfica. Cambiamos el número de particiones desplazando el deslizador.





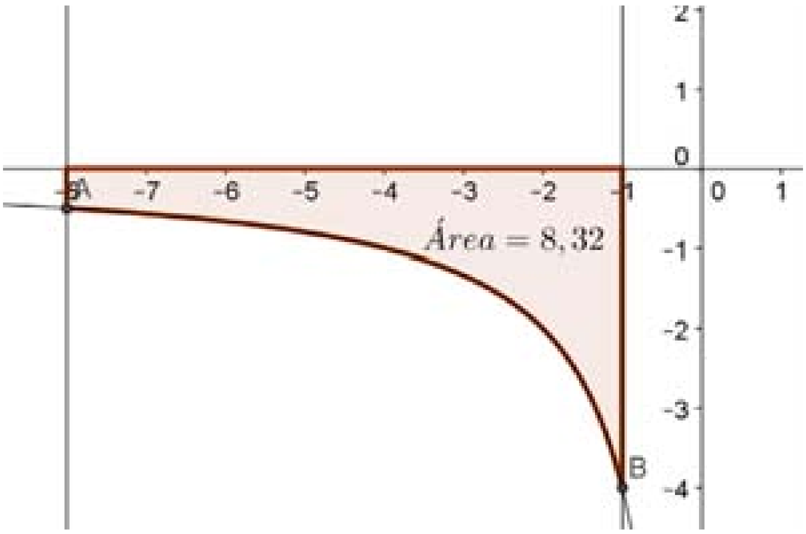
3. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = $\frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas x = -1 y x = -8.

Seguimos los pasos del epígrafe ÁREA ENCERRADA POR UNA CURVA:

- Representamos gráficamente la función f(x) = $\frac{4}{x}$, y las rectas x = -1 y x= -8. Para ello las tecleamos en el **Campo de Entrada**.

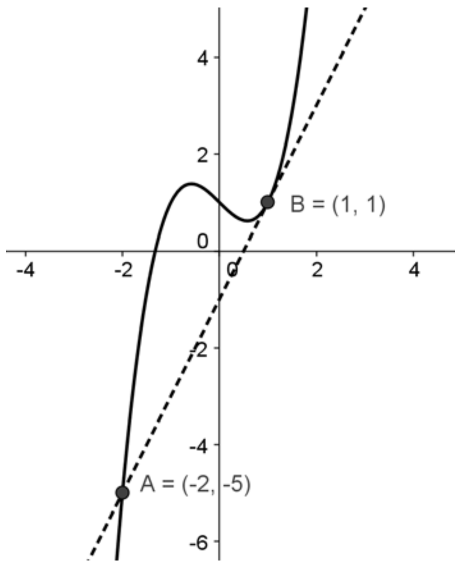
- Hallamos los puntos de corte de la función dada con cada una de las rectas, mediante intersección de objetos y obtenemos los puntos A y B.

- Calculamos el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje OX y las abscisas de los puntos A y B, tecleando el comando **Integral [f, x(B), x(A)]**. El valor del área aparece en la ventana algebraica.



4. Calcula el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función f(x) = x^3 – x + 1 y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Calcula el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función f(x) = x^3 – x + 1 y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.



Seguimos los pasos que siguen.

- Representamos gráficamente la función f(x) = x^3 – x + 1 introduciendo sus expresión en el **Campo de Entrada**. Para ello tecleamos **f(x)=x^3-x+1**.

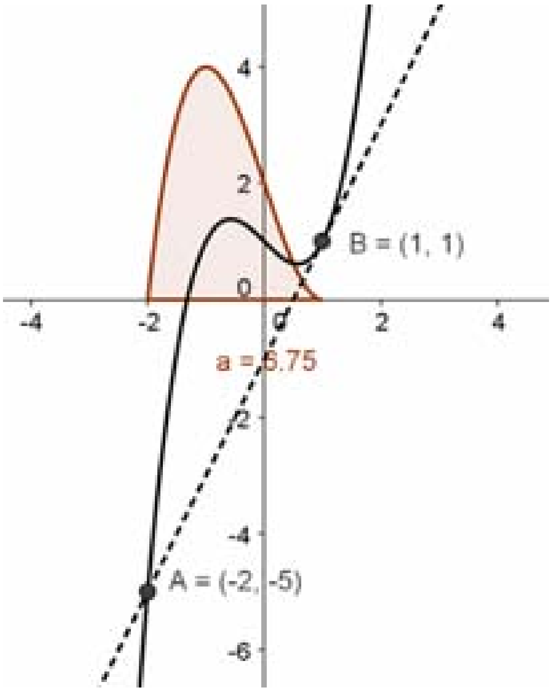
- Con el comando **Tangente [1, f]** calculamos la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1, que puede verse en la ventana algebraica, y dibujamos la citada tangente. Obtenemos la recta de ecuación y = 2x – 1.

- Introducimos en el Campo de Entrada la función g(x) = 2x – 1, que coincide con la recta tangente anterior. Borramos la tangente trazada con anterioridad.

-Con la herramienta **Intersección de dos objetos**, haciendo clic sobre las gráficas de f(x) y g(x), hallamos los puntos de corte de ambas gráficas. Para estas funciones obtenemos los puntos A (- 2, - 5) y B (1, 1).

- El área buscada la proporciona la función f(x) – g(x) entre las abscisas de los puntos de corte de ambas curvas. Con el comando **Integral [f(x)-g(x),-2, 1**] hallamos el área encerrada entre las gráficas de las funciones. El valor del área es **a = 6.75** unidades cuadradas.

- Como puede verse en la imagen, Geogebra dibuja la región, cuya área calcula, en el semiplano superior. El valor del área también aparece en la ventana algebraica



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 264

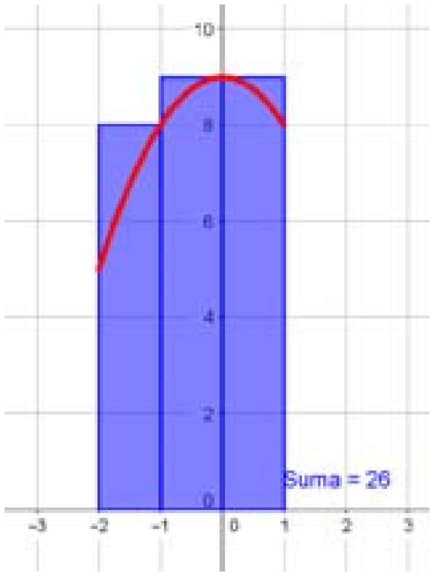
1. Sea la función $f(x) = 9 – x^2$. Consideremos el intervalo [- 2, 1] y la partición de dicho intervalo dada por P = {- 2, - 1, 0, 1}. Halla, de forma razonada, el valor de las sumas superior e inferior correspondiente a la función dada y a dicha partición.

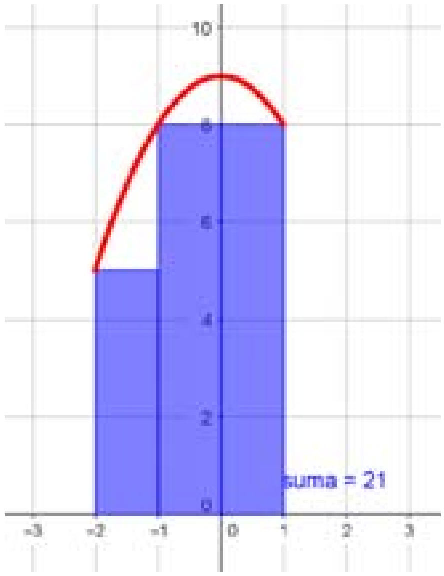
La partición P determina en el intervalo dado los siguientes intervalos [- 2, - 1], [- 1, 0], [0, 1].

Las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función f (x) en P son:

$S(P) = f(-1) \cdot (-1 + 2) + f(0) \cdot (0 + 1) + f(0) \cdot (1 – 0) = 8 + 9 + 9 = 26$

$s(P) = f(-2) \cdot (-1 + 2) + f(-1) \cdot (0 + 1) + f(1) \cdot (1 – 0) = 5 + 8 + 8 = 21$





2. Una partición decreciente verifica que f (- 2) = 64, f (- 1) = 42 y f (1) = 10. Halla, razonadamente, la suma superior y la suma inferior correspondientes a la función y = f (x) en el intervalo [- 2, 1] relativas a la partición P = {- 2, - 1, 1}.

La partición P determina en el intervalo dado los siguientes intervalos [- 2, - 1] y [- 1, 1].

Las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función f (x) en P son:

S (P) = f (- 2) · (- 1 + 2) + f (- 1) · (1+ 1) = 64 + 42 · 2 = 148

s (P) = f (- 1) · (- 1 + 2) + f (1) · (1 + 1) = 42 + 10 · 2 = 62

3. Halla las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^3 \sqrt{x+3}\,dx$

f) $\int_4^9 \left(3-2\sqrt{x}\right)^3 \cdot \frac{4}{3\sqrt{x}}\,dx$

k) $\int_0^2 \frac{x^2+3x-2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

b) $\int_0^{\pi} \frac{2\cos 3x}{4+sen3x}\,dx$

g) $\int_3^6 \frac{5x}{x^2+9}\,dx$

l) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x+2}\,dx$

c) $\int_0^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\,dx$

h) $\int_1^e \left(x+3\right)\cdot \ln x\,dx$

m) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

d) $\int_2^4 \frac{3x^2-3x-2}{x-1}\,dx$

i) $\int_5^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}\,dx$

n) $\int_0^{1/2} \frac{e^{2x}}{5-e^{2x}}\,dx$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi} \cos^3 4x \cdot sen\,4x\,dx$

j) $\int_3^5 \frac{5-x}{x^2-x-2}\,dx$

p) $\int_{-1}^0 \left(e^{-x}-x\cdot e^{x}\right)dx$

3. El valor de cada una de las integrales definidas es:

a) $\int_0^3 \sqrt{x+3}\, dx = 4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$

b) $\int_0^{\pi} \frac{2\cos 3x}{4 + sen 3x}\, dx = 0$

c) $\int_0^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\, dx = 0{,}4547$

d) $\int_2^4 \frac{3x^2 - 3x - 2}{x - 1}\, dx = 15{,}803$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi} \cos^3 4x \cdot sen\, 4x\, dx = -\frac{1}{16}$

f) $\int_4^9 \left(3 - 2\sqrt{x}\right)^3 \cdot \frac{4}{3\sqrt{x}}\, dx = -\frac{80}{3}$

g) $\int_3^6 \frac{5x}{x^2 + 9}\, dx = 2{,}29$

h) $\int_1^e (x+3) \cdot \ln x\, dx = \frac{e^2}{4} + \frac{13}{4}$

i) $\int_5^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - 2}\, dx = 11{,}599$

j) $\int_3^5 \frac{5 - x}{x^2 - x - 2}\, dx = 0{,}2877$

k) $\int_0^2 \frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1}\, dx = 0{,}2169$

l) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x+2}\, dx = 0{,}27$

m) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{5}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = \frac{5\pi}{4}$

n) $\int_0^{1/2} \frac{e^{2x}}{5 - e^{2x}\, dx} = 0{,}28$

p) $\int_{-1}^0 \left(e^{-x} - x \cdot e^x\right) dx = e$

4. Sea la función f(x) = $\left|x^2-2x\right| = \begin{cases} x^2-2x \ si \ x \le 0 \ \ o \ x \ge 2 \\ 2x-x^2 \ \ si \ \ -2 < x < 2 \end{cases}$ **. Halla** $\int_1^3 f(x)\,dx$ **.**

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 (2x-x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x)\,dx = \left[\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)_1^2 + \left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)_2^2\right] = 2$$

5. Halla un polinomio de primer grado P(x) = ax + b sabiendo que P (1) = 1 y que $\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = 6$.

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

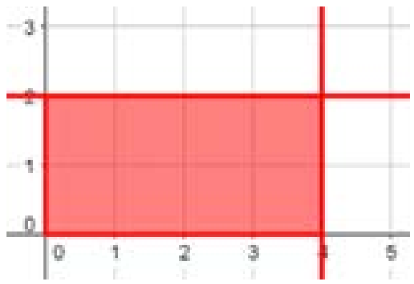
$$\int_{-1}^{1} (ax+b)\,dx = \left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{a}{2}+b\right)-\left(\frac{a}{2}-b\right) = 2b \quad \Rightarrow \quad 2b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

Como P (1) = 1 $\Rightarrow$ a + b = 1 $\Rightarrow$ a = - 2.

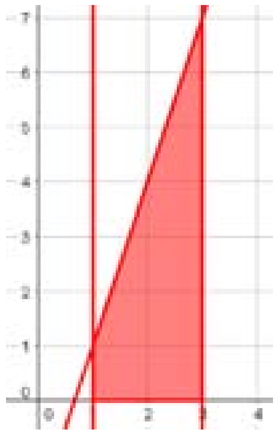
El polinomio es P(x) = - 2x + 3

6. En cada una de las figuras indica, mediante una integral definida, el área del recinto sombreado:

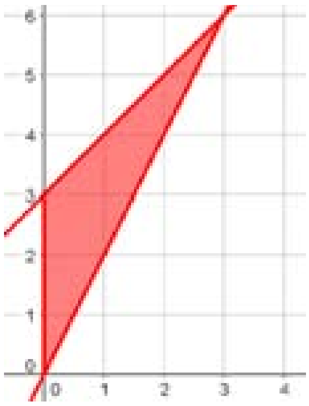
a)



b)



c)



a) $\int_0^4 2\,dx = (2x)_0^4 = 8 \ uc$

b) La ecuación de la recta que pasa por A y D es: y = 3x - 2.

La integral buscada es $\int_1^3 (3x-2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)_1^3 = 8\ uc$

c) Las ecuaciones de las rectas de la figura son: y = 2x; y = x + 3

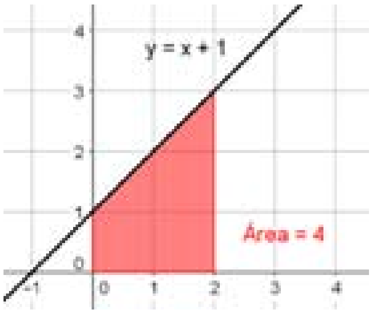
La integral buscada es $\int_0^3 (x+3-2x)\,dx = \left(3x - \dfrac{x^2}{2}\right)_0^3 = \dfrac{9}{2}\ uc$

7. Halla estas integrales y comprueba mediante las respectivas gráficas los resultados obtenidos en cada una de ellas:

a) $\int_0^2 (x+1)\,dx$ **b)** $\int_1^3 (x+1)\,dx$ **c)** $\int_{-4}^{-2} (x+1)\,dx$

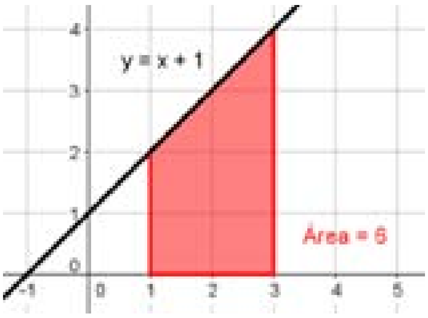
a) $\int_0^2 (x+1)\,dx = \left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)_0^2 = 4\ uc$

En la gráfica podemos ver este mismo resultado:



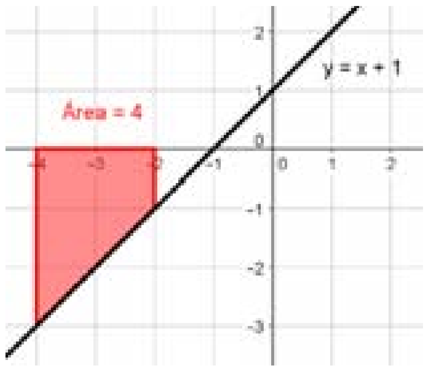
b) $\int_1^3 (x+1)\,dx = \left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)_1^3 = 6\ uc$

En la gráfica podemos ver este mismo resultado:



c) $\int_{-4}^{-2} (x+1)\,dx = \left(\dfrac{(x+1)^2}{2}\right)_{-4}^{-2} = -4$

En la gráfica podemos ver este mismo resultado:

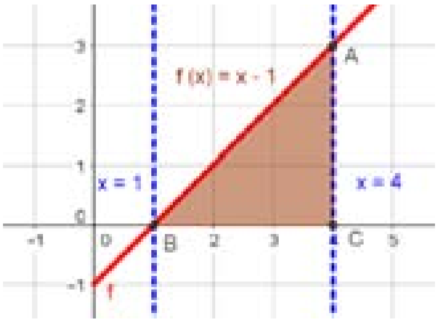


ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 265

8. Halla, por métodos geométricos y mediante integrales, las áreas de los siguientes recintos:

a) El recinto limitado por la recta y = x – 1, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 4.

b) El recinto limitado por la recta 2y = x + 3, el eje OX y las rectas x = -1 y x = 2.



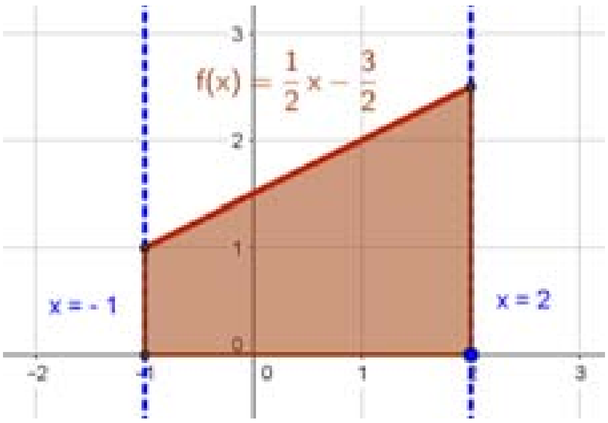
Las áreas pedidas son:

a) Por métodos geométricos es un triángulo ABC, como vemos en la figura. Su área es 4,5 uc.

Por medio de integrales el área es $A = \int_1^4 (x-1)\, dx = 4,5\ uc$.

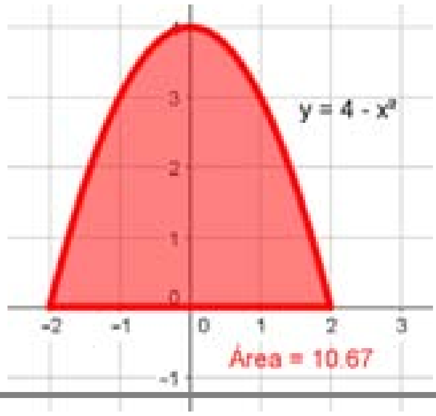
b) Por métodos geométricos es un trapecio ABCD, como vemos en la figura. Su área es 5,25 uc.

Por medio de integrales el área es $A = \int_{-1}^{2} \frac{x+3}{2}\, dx = 5,25\ uc$.



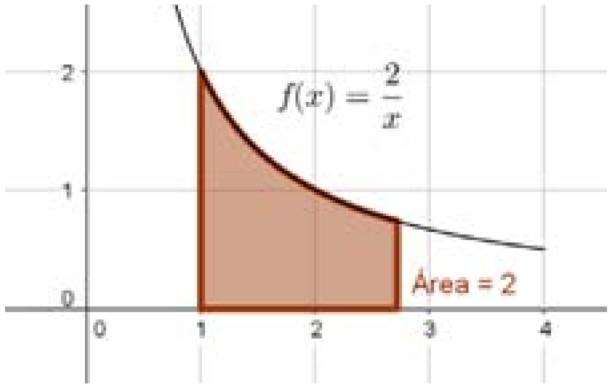
9. Halla el área del recinto limitado por la curva y = 4 – x² y el eje OX.

El área buscada es $\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \frac{32}{3} = 10,67$ uc.



10. Calcula el área del recinto limitado por la curva y = $\frac{2}{x}$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = e.

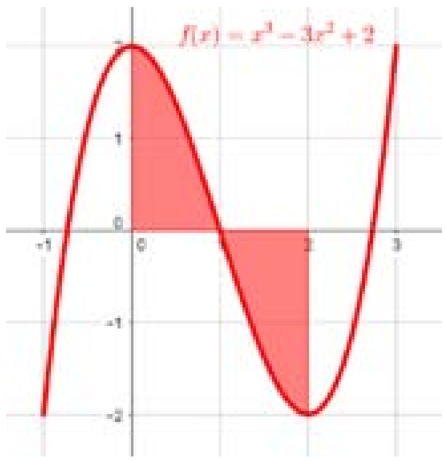
El área pedida es: $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2$ uc.



11. Halla el área de la región limitada por la curva y = $x^3 - 3x^2 + 2$, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

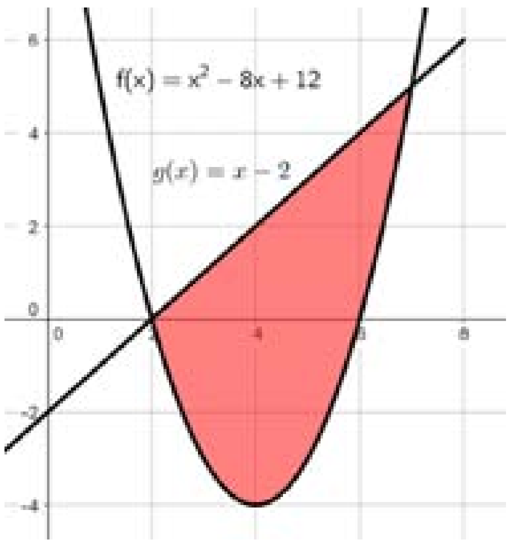
El área, A, del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2)\,dx = 2{,}5\ uc$$

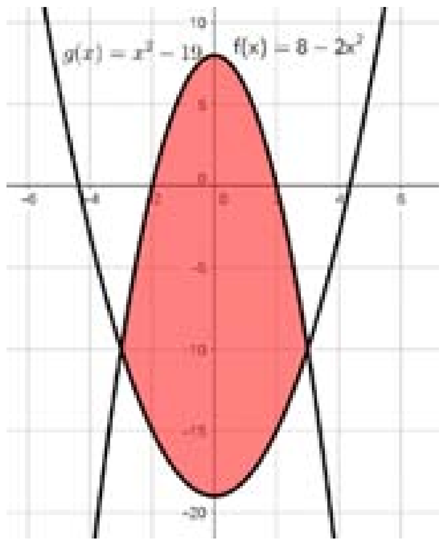


12. Calcula el área de cada uno de los siguientes recintos:

a)



b)



a) Ambas curvas se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 - 8x + 12 \end{cases}$ que son A (2, 0) y B (7, 5)

El área del recinto sombreado es: $A = \int_2^7 \left[x - 2 - \left(x^2 - 8x + 12\right)\right] dx = 20{,}83 \;\; uc$

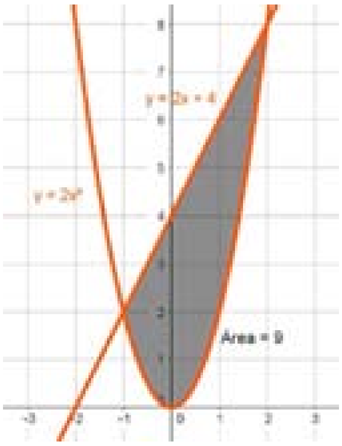
b) Ambas curvas se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = x^2 - 19 \\ y = 8 - 2x^2 \end{cases}$ que son A (- 3, - 10) y B (3, - 10)

El área del recinto sombreado es: $A = 2\int_0^3 \left[\left(8 - 2x^2\right) - \left(x^2 - 19\right)\right] dx = 108 \;\; uc$

13. Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación y = 2x^2 y la recta y = 2x + 4.

El área buscada viene dada por las integrales:

$$\int_{-1}^{2} (2x + 4)\, dx \; - \int_{-1}^{2} 2x^2 \, dx = \left[x^2 + 4x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9 \; uc .$$



14. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones de los siguientes apartados:

a) y = x^3 ; y = $\sqrt{x}$

b) y = x^2 -9; y = - 2x^2

c) y^2 = 4x; x^2 = 4y

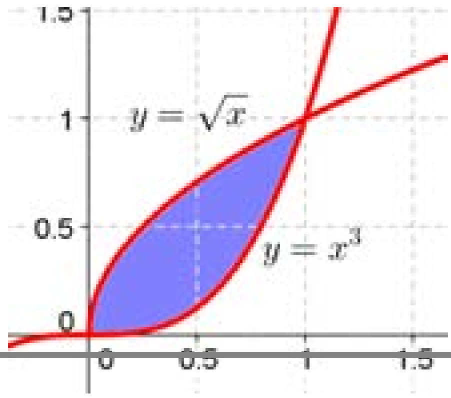
d) y = e^x ; y = e^{-x}; x = 1

a) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \quad (0, 0); (1, 1)$$

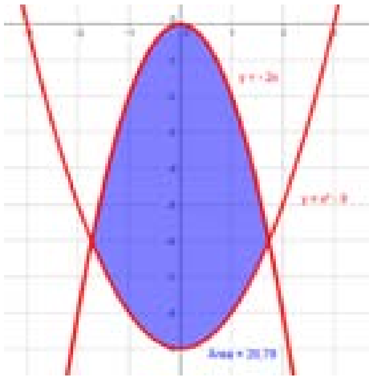
El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \frac{5}{12} = 0{,}42 \; uc$$



b) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ y = -2x^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, -6\right); \left(-\sqrt{3}, -6\right)$$

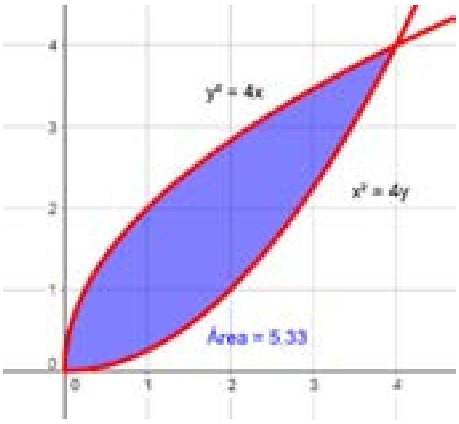


El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^2 - 9 - (-2x^2)\right) dx = 12\sqrt{3} = 20{,}78\ uc$$

c) Encontramos los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema:

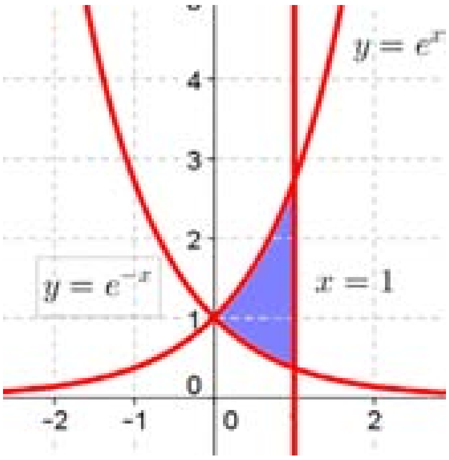
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(0, 0\right); \left(4, 4\right)$$



El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3} = 5{,}33\ uc\ .$$

d) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:



$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \left(0, 1\right)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 e^x\, dx - \int_0^1 e^{-x}\, dx = 1{,}086\ uc$$

15. Sea la función f(x) = $\begin{cases} 2 & si \quad x \le -3 \\ x^2 & si \quad -3 < x < 1 \\ 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de esta función.

b) Haz la gráfica de la misma.

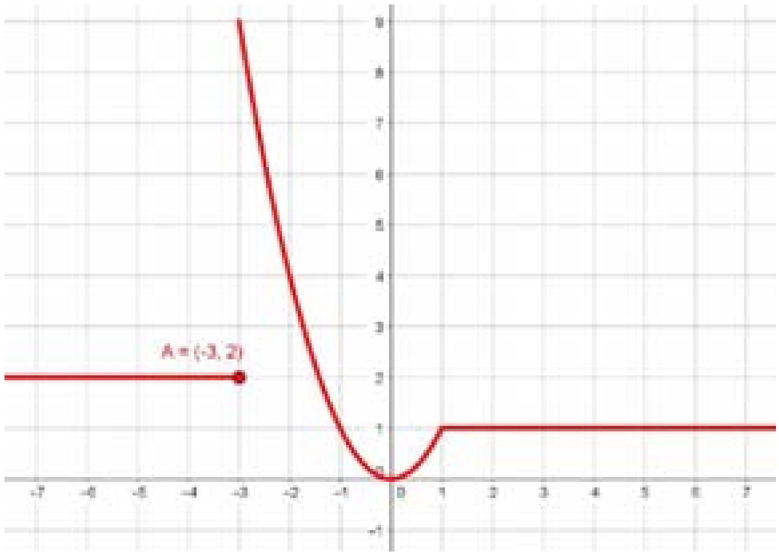
c) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

a) Estudiamos la continuidad en x = 1 y en x = -3

Como $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} 2 = 2$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} x^2 = 9$ y f (- 3) = 2, la función dada no es continua en x = - 3.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1$ y f (1) = 1, la función dada es continua en x = 1.

b) La gráfica es:

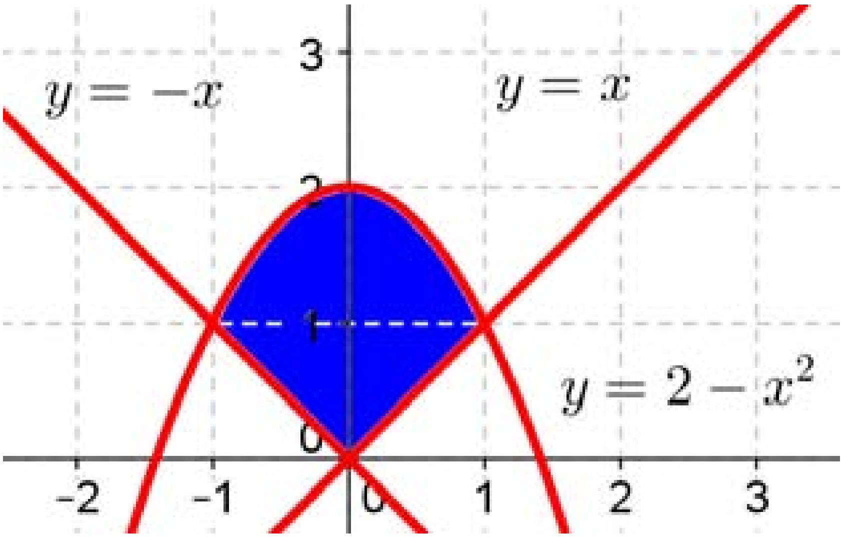


c) El área pedida es: $A = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 1\, dx = \frac{4}{3}\, uc = 1{,}33\, uc$

16. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = 2 – x² y las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.

En la gráfica esta sombreada la región cuya área queremos hallar. Su valor es:

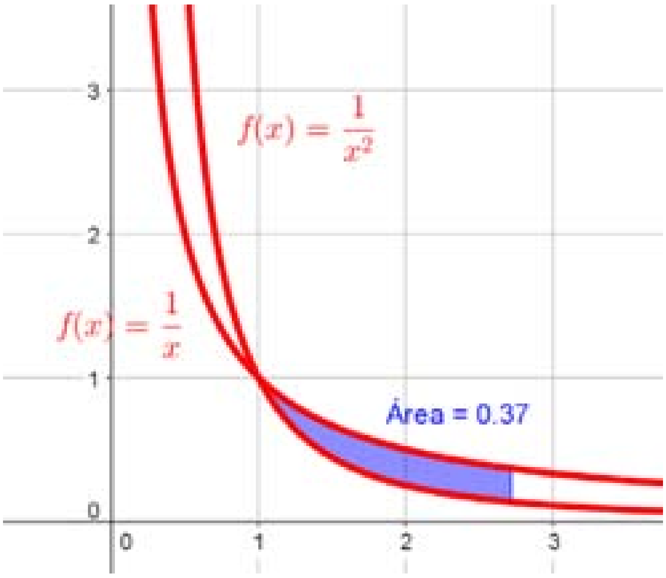
$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = \frac{7}{3} = 2{,}33\, uc$$



17. Encuentra el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y la recta x = e.

El área del recinto es:

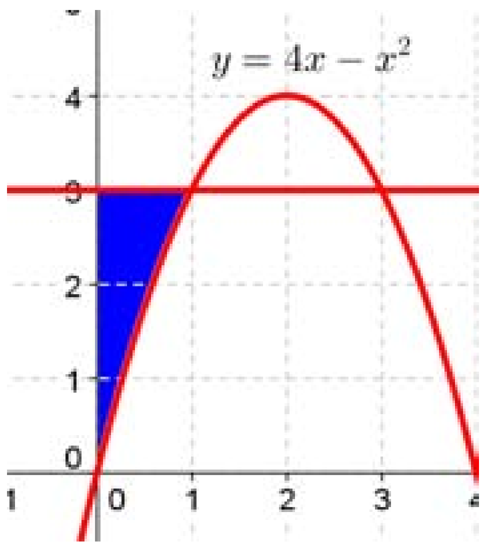
$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(\ln e + \frac{1}{e}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 266

1. Consideramos la curva de ecuación y = 4x – x². Halla el área del recinto limitado por esta curva y el eje OY en el intervalo [0, 1].

En la imagen podemos ver sombreado el recinto cuya área queremos hallar.



El área vale:

$$A = 1\cdot 3 - \int_0^1 \left(4x - x^2\right) dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\ uc$$

2. Sea la función f(x) = $\begin{cases} ax+6 & si \quad x \le -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & si \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Halla a y b para que esta función sea continua en su dominio.

b) Para los valores de a y b hallados, calcula $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales.

Ha de ser continua en x = -1 y en x = 2. Para ello se debe cumplir:

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (ax + 6) = -a + 6$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (bx^2 - 2x + 1) = b + 3$, entonces, a + b = 3.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (bx^2 - 2x + 1) = 4b - 3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x-5}{(x+1)^2}\right) = -\dfrac{1}{3}$, entonces, $4b - 3 = -\dfrac{1}{3}$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + b = 3 \\ 4b = \dfrac{8}{3} \end{cases}$ obtenemos: $\begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

b) $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \int_{-2}^{-1} \left(\dfrac{7}{3}x + 6\right) dx + \int_{-1}^{2} \left(\dfrac{2}{3}x^2 - 2x + 1\right) dx = 4{,}5$

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 x \cdot e^{5x^2} \; dx$ **b)** $\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2} \right) dx$ **c)** $\int_1^e x \cdot \ln x \; dx$

a) $\int_0^1 x \cdot e^{5x^2} \; dx = \left(\frac{1}{10} e^{5x^2} \right)_0^1 = \frac{e^5 - 1}{10} \approx 14{,}74$

b) $\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{-14}{3} = -\,4{,}67$

c) $\int_1^e x \cdot \ln x \; dx = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2{,}10$

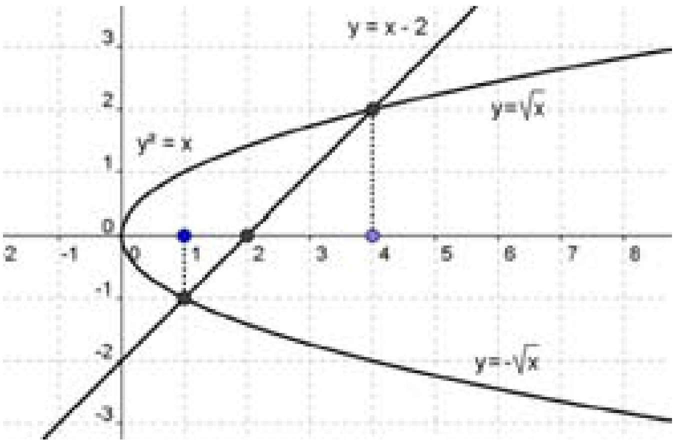
4. Determina el área limitada por la parábola de ecuación $y^2 = x$ y la recta de ecuación $y = x - 2$.

Realizamos un dibujo del enunciado para encontrar la región limitada por la parábola y por la recta.

Debe observarse que la parábola $y^2 = x$ da lugar a dos funciones de ecuaciones $y = -\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x}$.

Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \quad (1, -1) \; ; \; (4, 2)$$



Observando con detenimiento el dibujo vemos que el área buscada es:

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\; dx - \int_2^4 (x-2)\; dx - \left[\int_0^1 -\sqrt{x}\, dx + \int_1^2 (x-2)\; dx \right] =$$

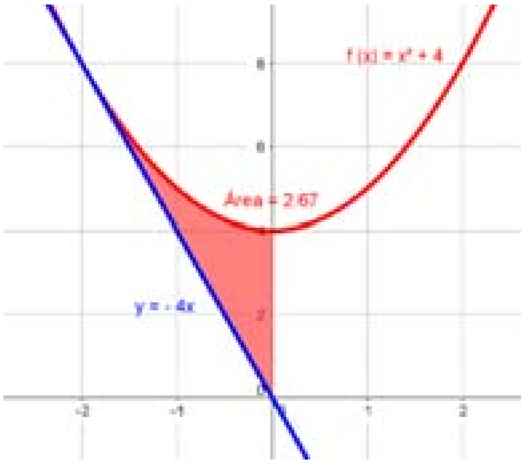
$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^4 - \left\{ \left[-\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \right\} = 4{,}5\; uc$$

5. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función y = x^2 + 4, la recta tangente a la misma en el punto de abscisa - 2 y el eje OY.

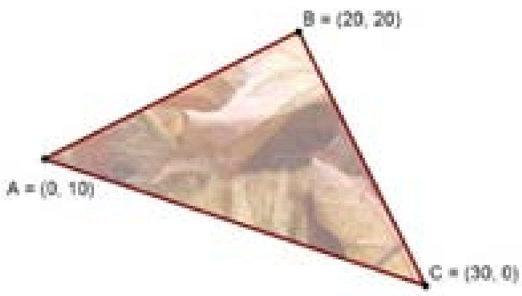
La recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto (- 2, 8) tiene por ecuación y = - 4x.

El área del recinto sombreado de la figura que queremos hallar viene dada por:

$$\int_{-2}^{0}\left(x^2+4\right)dx-\int_{-2}^{0}(-4x)\,dx=\frac{8}{3}=2,67\ uc\,.$$

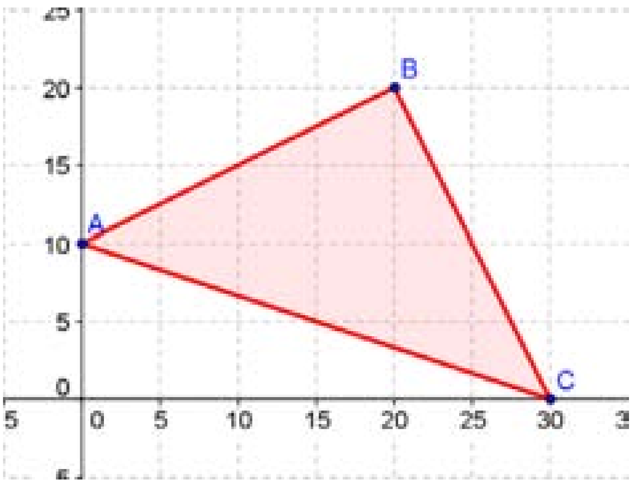


6. En la imagen vemos el diseño de un cartel con forma de triángulo ABC. Halla el área del mismo sabiendo que sus vértices son puntos de un sistema cartesiano en el que cada unidad esta dada en metros.



Se trata de un triángulo isósceles. Lo dibujamos en unos ejes coordenados y obtenemos la figura siguiente:

Hallamos el área de dos formas distintas:



a) El área del triángulo = área del rectángulo de base 30 y altura 20 menos el área de dos triángulos rectángulos de base 10 y altura 20 menos el área del triángulo rectángulo de base 30 y altura 10

Área = 30 · 20 – 2 · 10 · 20 / 2 – 30 · 10/2 =250 m^2

b) Hallamos las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo:

recta AB: $y=\frac{1}{2}x+10$

recta BC: y = -2x + 60

recta AC: $y=\frac{-1}{3}x+10$

Por tanto el área del triángulo es:

$$\int_0^{20}\left[\left(\frac{1}{2}x+10\right)-\left(\frac{-1}{3}x+10\right)\right]dx+\int_{20}^{30}\left[\left(-2x+60\right)-\left(\frac{-1}{3}x+10\right)\right]dx = \frac{500}{3}+\frac{250}{3}=250\,m^2$$

7. Halla la función polinómica de grado 3 cuya gráfica pasa por el punto P (1, 0), tiene por tangente la recta y = 2x + 1 en el punto de abscisa x = 0, y su integral entre 0 y 1 vale 3.

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ la función polinómica de tercer grado buscada.

Su derivada es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Las condiciones para determinar los coeficientes a, b, c y d son:

- Su gráfica pasa por el punto P (1, 0), es decir, f (1) = 0.

- La recta tangente hace tangencia en el punto x = 0, y (0) = 2 · 0 + 1 = 1, es decir, pasa por el punto Q (0,1), o lo que es lo mismo, f (0) = 1.

- La pendiente de la tangente es 2 luego f ´ (0) = 2.

- La integral $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$.

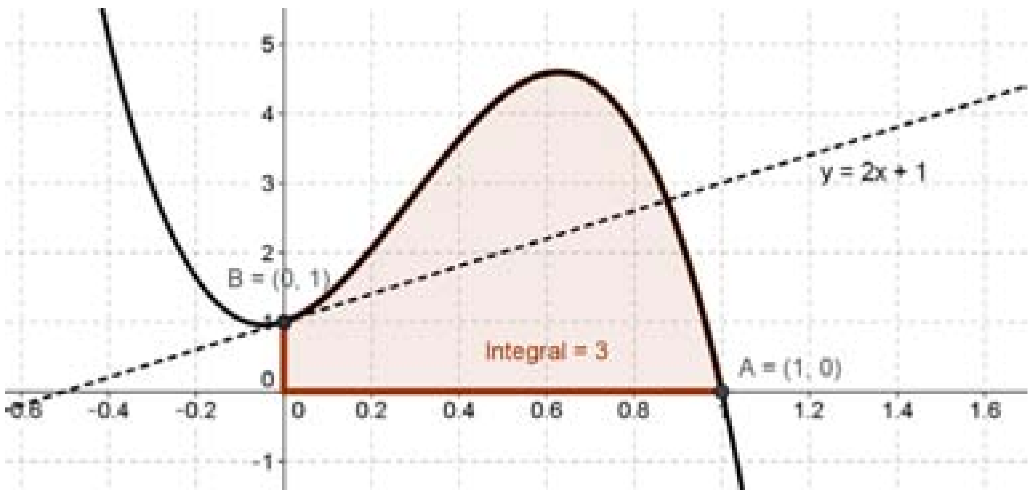
Imponiendo cada una de las condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ d=1 \\ c=2 \\ 3a+4b+6c+12d=36 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: a = - 24; b = 21; c = 2 y d = 1. La función buscada es:

$$f(x) = -24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$$

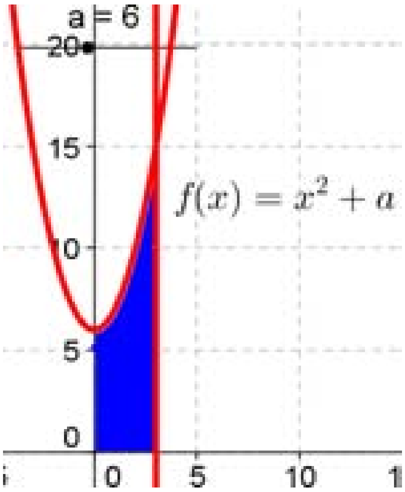
En el dibujo puede verse la gráfica de la función obtenida cumpliendo todas las condiciones del enunciado.



8. Sea la función f(x) = x² + a, con a > 0. Halla el valor de a para el cual el área determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta x = 3, valga 27 unidades cuadradas.

En la gráfica podemos ver las condiciones del enunciado y la zona sombreada cuya área nos dan.

$$A = \int_0^3 (x^2 + a)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + ax\right)_0^3 = 9 + 3a \Rightarrow 9 + 3a = 27 \Rightarrow a = 6 \text{ unidades}$$



9. Calcula la siguiente integral $\int_{-1}^{2} \left| x^2 + 3x \right| dx$.

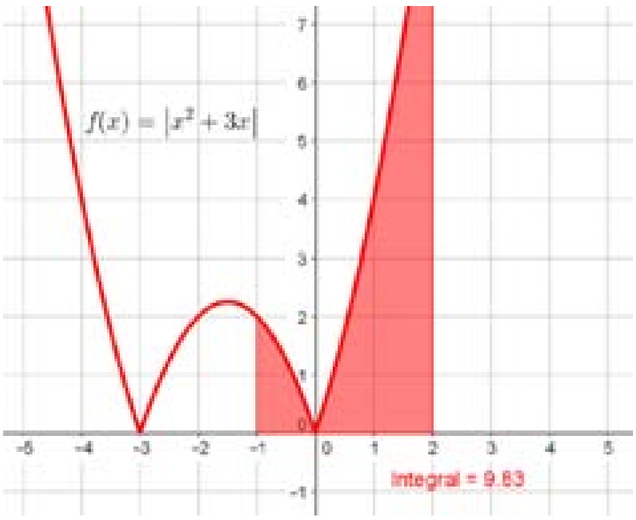
La función del integrando puede definirse de la forma:

$$f(x) = \left| x^2 + 3x \right| = \begin{cases} x^2 + 3x & si\ x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \\ -x^2 - 3x & si\ x \in (-3, 0) \end{cases}$$

El valor de la integral coincide con el área del recinto que puede verse en el gráfico. Este valor es:

$$\int_{-1}^{2} \left| x^2 + 3x \right| dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 - 3x)\, dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 3x)\, dx =$$

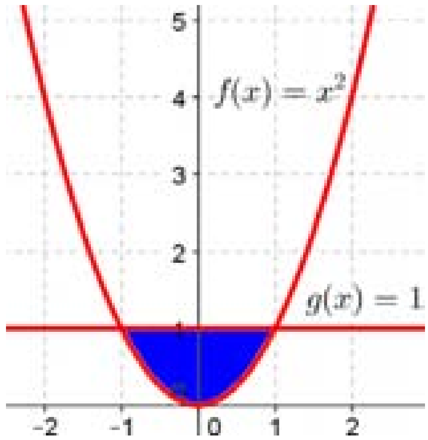
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{2} = \frac{59}{6} = 9{,}83\ uc$$



10. La superficie de media mesa está limitada por las funciones f (x) = x² y g (x) = 1, estando x expresado en metros. El barniz para la mesa se vende en

botes con cada uno de los cuales se barnizan 2 metros cuadrados. ¿Cuántos botes se necesitan para barnizar la mesa entera?

La gráfica podemos ver la zona sombreada cuya área de media mesa queremos hallar.



A = $2 \cdot \int_0^1 (1-x^2)\, dx = 2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{4}{3}$

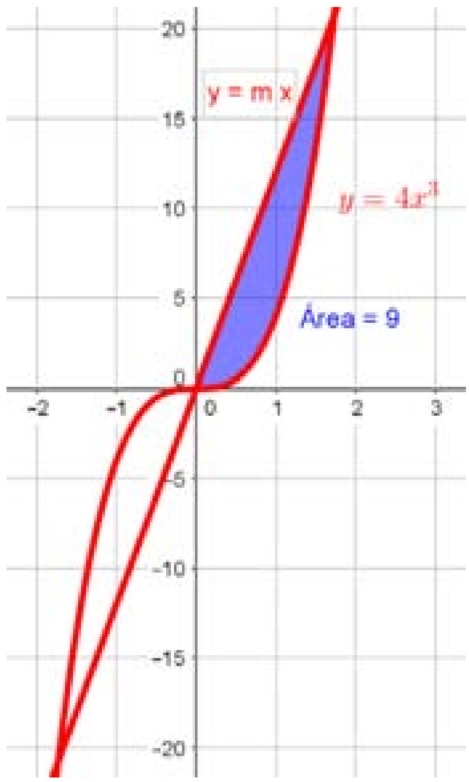
La superficie de la mesa entera es $\frac{8}{3}\, m^2$

Necesitamos $\frac{8}{3} : 2 = \frac{4}{3}$

Tendrán que comprar 1 + 1/3 de botes de barniz, es decir 2 botes de barniz y sobraran 2/3 de bote de barniz.

11. Hallar el valor de m para que el área delimitada, en el primer cuadrante, por la función y = 4x^3 y la recta y = mx sea de 9 unidades cuadradas.

El recinto, cuya área es de 9 unidades cuadradas, es la región sombreada del dibujo.



Encontramos los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 4x^3 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow (0,0) \;;\; \left(\frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{m\sqrt{m}}{2} \right) \;;\; \left(-\frac{\sqrt{m}}{2}, -\frac{m\sqrt{m}}{2} \right)$$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\int_0^{\sqrt{m}/2} \left(mx - 4x^3 \right) dx = 9$$

De aquí obtenemos que $\frac{m^2}{16} = 9$, de modo que m = 12.

12. Sea la función $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+1}$. Halla b para que sea cierta la siguiente igualdad: $\int_{-1}^{b} f(x)\, dx = 0$

Sabemos que:

$$\int_{-1}^{b} f(x)\, dx = 0 \;\Rightarrow\; \int_{-1}^{b} \frac{4x-2}{x^2-x+1}\, dx = \left[2\ln\left(x^2-x+1\right) \right]_{-1}^{b} = 2\ln\left(b^2-b+1\right) - 2\ln 3 = 0$$

Operando, obtenemos $b^2 - b + 1 = 3$. Resolviendo la ecuación la igualdad se cumple para dos valores de b: b = 2 y b = - 1

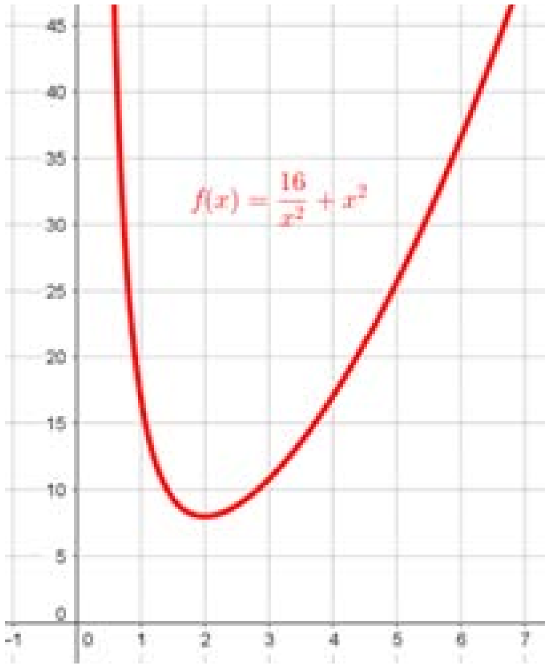
13. Dada la función f(x) = $\frac{a}{x^2} + x^2$ con x > 0 y a una constante.

a) Si se sabe que f ´ (2) = 1, ¿cuánto valdría a?

b) Para a = 16 haz la gráfica de la función dada y calcula el área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 3.

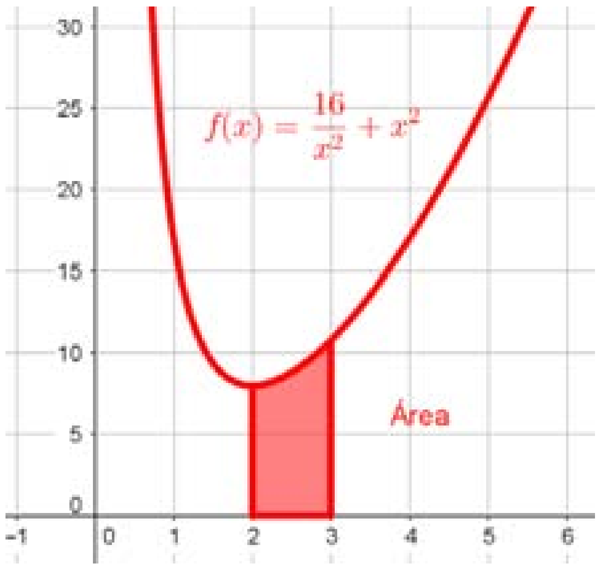
a) Sabemos que f ´ (2) = 1 y que f ´ (x) = $\frac{-2a}{x^3} + 2x$. Por tanto tenemos que: $\frac{-2a}{8} + 4 = 1$, entonces a = 12.

b) En la gráfica hemos dibujado la función f(x) = $\frac{16}{x^2} + x^2$ para valores positivos de la variable.



El área del recinto es:

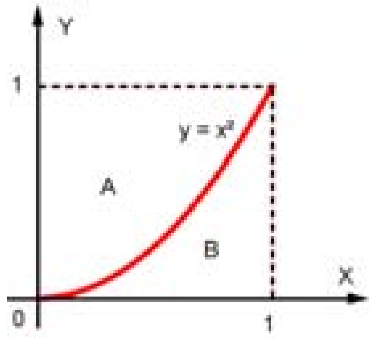
$$A = \int_2^3 \left(\frac{16}{x^2} + x^2 \right) dx = \left[\frac{-16}{x} + \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = 9\ uc$$



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 267

Razones de áreas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen si se halla la razón de las áreas que se forman cuando las funciones $y = x^n$ ($n \in Z$, $n \in Q$) se representan entre dos valores arbitrarios a y b, con a < b.



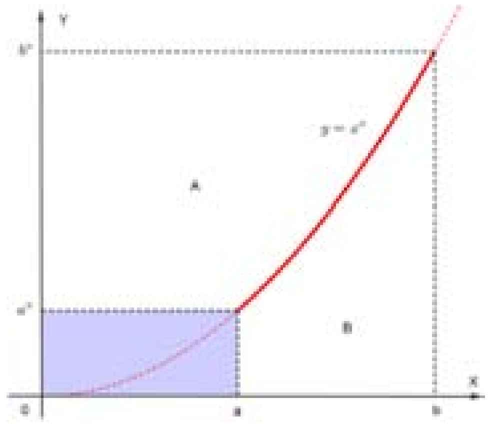
1. Sea la función $y = x^2$. Consideramos:

- La región B delimitada por $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ y el eje OX.

- La región A delimitada por $y = x^2$, $y = 0$, $y = 1$ y el eje OY.

Halla la razón: $\dfrac{\acute{A}rea\ A}{\acute{A}rea\ B}$.

2. Calcula la razón de las áreas para otras funciones del tipo $y = x^n$, $n \in Z^+$, entre $x = 0$ y $x = 1$.



3. Estudia qué ocurre para áreas comprendidas entre $x = 0$ y $x = 2$, entre $x = 1$ y $x = 2$, etc.

4. Analiza el caso general, con $y = x^n$ entre a y b, tal que a < b, y para las regiones:

- La región A delimitada por $y = x^n$, $y = a^n$, $y = b^n$ y el eje OY.

- La región B delimitada por $y = x^n$, $x = a$, $x = b$ y el eje OX.

5. Los resultados que obtienes, ¿se mantienen para funciones del tipo $y = x^n$, $n \in Z^-$, entre $x = 0$ y $x = 1$; entre $x = 0$ y $x = 2$; entre $x = 1$ y $x = 2$, etc.? ¿Y para funciones del tipo $y = x^n$, $n \in Q$, en los mismos intervalos?

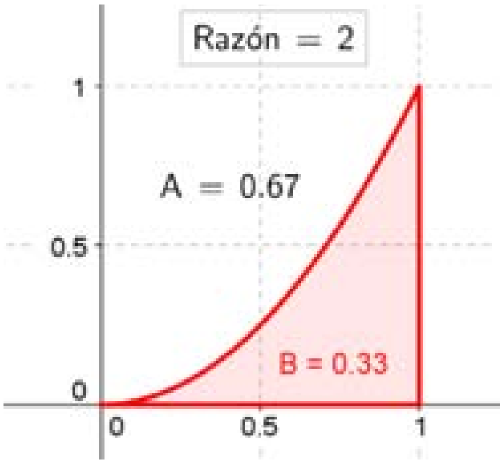
1. Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0,33$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



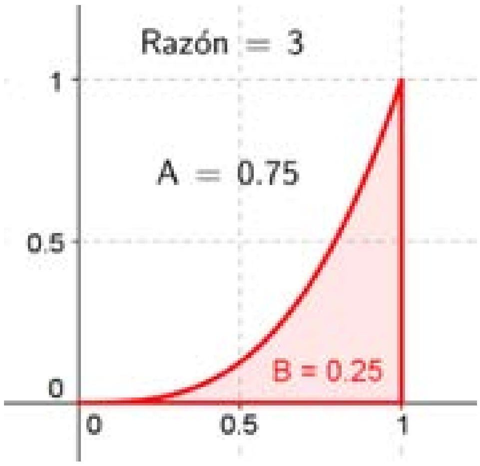
2. Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



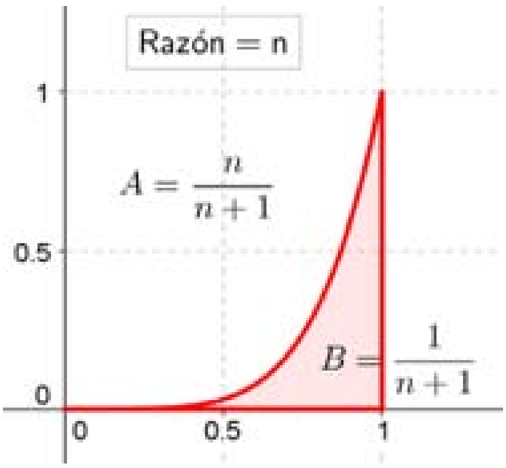
Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

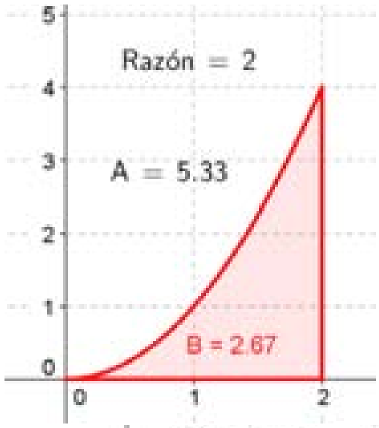
3. Estudiamos las áreas comprendidas entre x = 0 y x = 2.

Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

$$A = 8 - B = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5{,}33$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} = 2.$



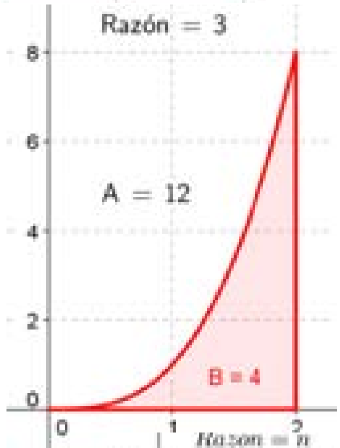
En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

$$A = 16 - B = 16 - 4 = 12$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{12}{4} = 3.$



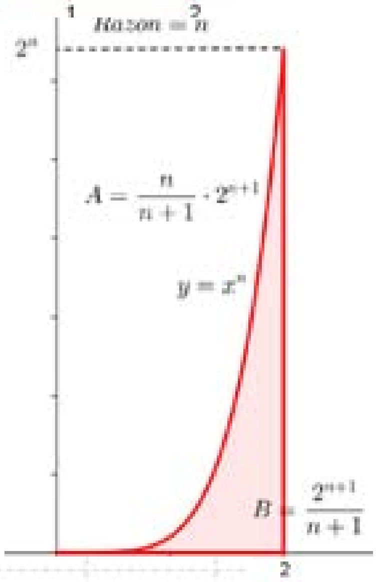
En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}}{\frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+1}} = n.$

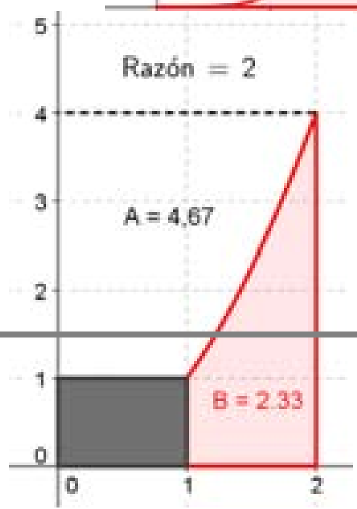


En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

Estudiamos las áreas comprendidas entre x = 1 y x = 2.

Para la función y = x^2 hallamos las áreas de las regiones B y A:

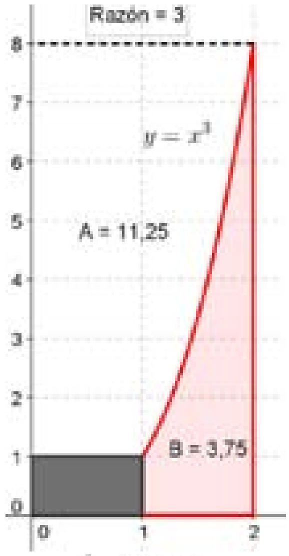


$$B = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}33$$

$$A = 8 - 1 - B = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3} = 4{,}67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{14}{3}}{\frac{7}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



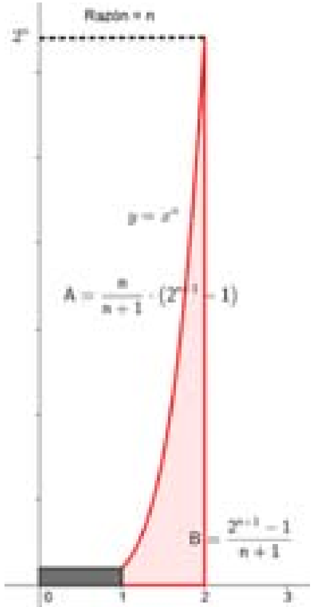
Para la función y = x^3 hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$A = 16 - 1 - B = 15 - \frac{15}{4} = \frac{45}{4} = 11{,}25$$

La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{45}{4}}{\frac{15}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



Para la función y = x^n, con $n \in Z^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_1^2 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - 1 - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)$$

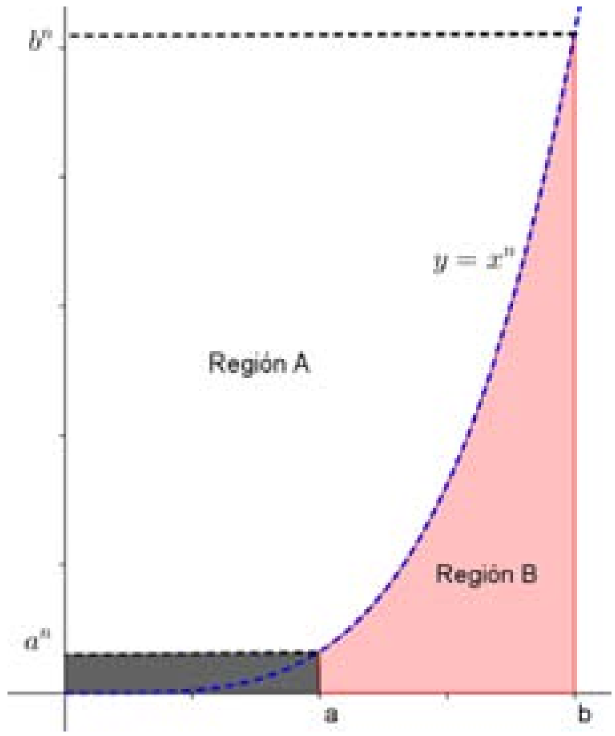
La razón de las áreas es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)}{\frac{1}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función y = x^n.

4. Analizamos el caso general, con $y = x^n$ entre a y b, tal que a < b, y para las regiones:

- La región A delimitada por $y = x^n$, $y = a^n$, $y = b^n$ y el eje OY.
- La región B delimitada por $y = x^n$, $x = a$, $x = b$ y el eje OX.



El área de la Región B es:

$$B = \int_a^b x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^2 = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

El área de la Región A es:

$$A = b^n \cdot b \; - a^n \cdot a - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

La razón de las áreas es:

$$Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{\frac{n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)} = n$$

5. Estudiamos las funciones $y = x^n$, $n \in Z^-$.

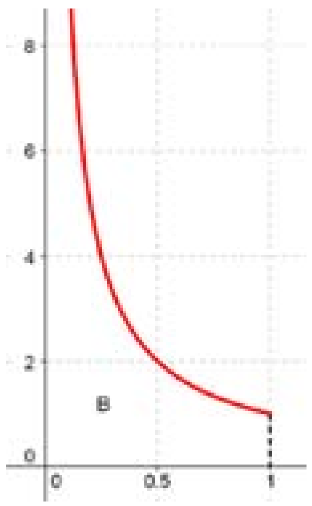
Comenzamos con $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

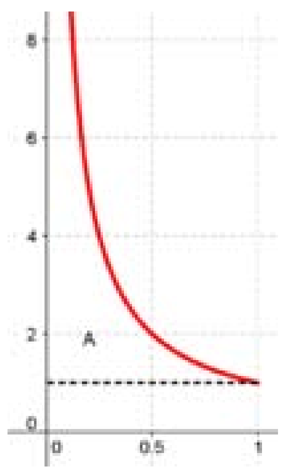
● **Entre 0 y 1:**

El área de la región B es: $B = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 0 - (-\infty) = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} dy = \left[\ln y\right]_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty$$





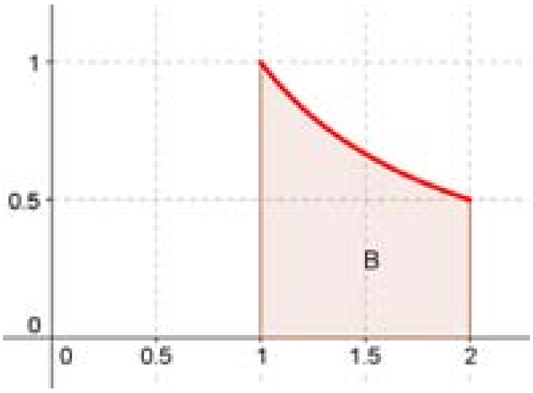
● **Entre 0 y a, con a > 0,** se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

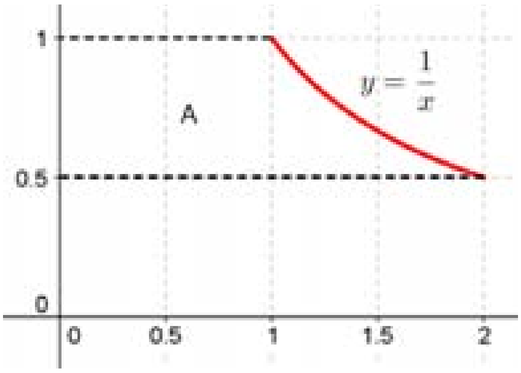
● **Entre 1 y 2:**

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0{,}6931$$

$$A = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln y\right]_{1/2}^{1} = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - (-\ln 2) = \ln 2 = 0{,}6931$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1$



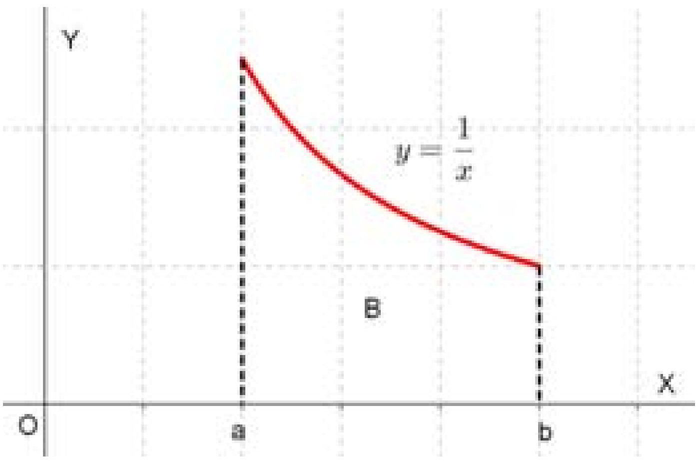


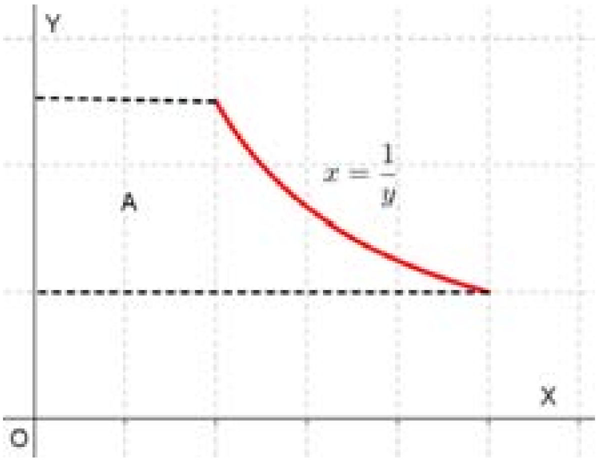
● **Entre a y b:**

$$B = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

$$A = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln y\right]_{1/b}^{1/a} = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a - (-\ln b) = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} = 1$





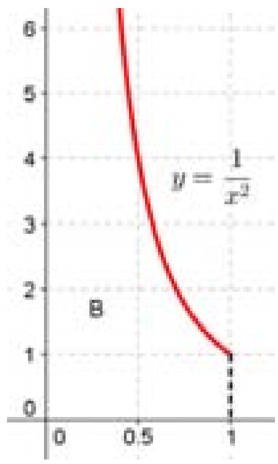
Consideramos $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

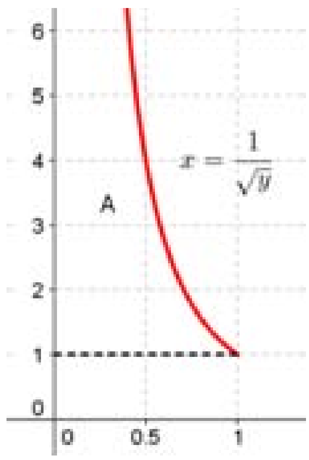
● **Entre 0 y 1:**

El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{-2}\,dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_0^1 = -1 - \left(-\dfrac{1}{0}\right) = -1 + \infty = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \left[2\sqrt{y}\right]_1^{+\infty} = +\infty - 2 = +\infty$$



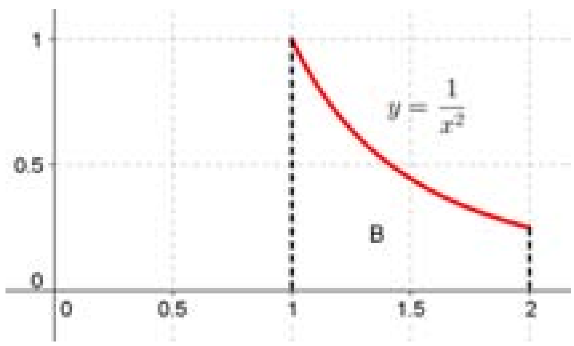


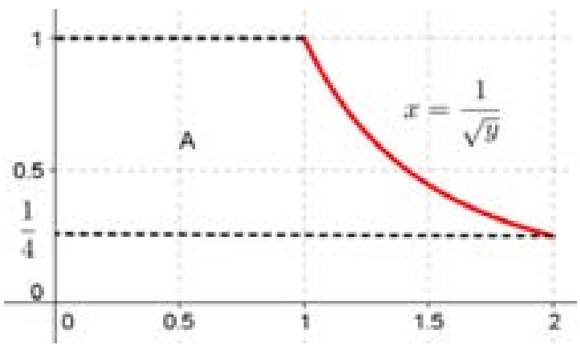
● **Entre 0 y a, con a > 0,** se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

● **Entre 1 y 2:**

$$B = \int_1^2 x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_{1/4}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \left[2\sqrt{y}\right]_{1/4}^{1} = 2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}} = 2 - 1 = 1$$





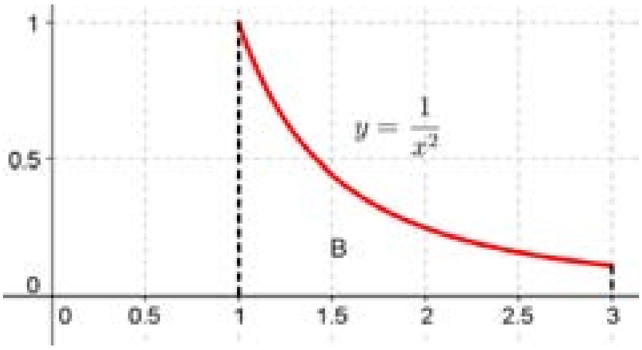
El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

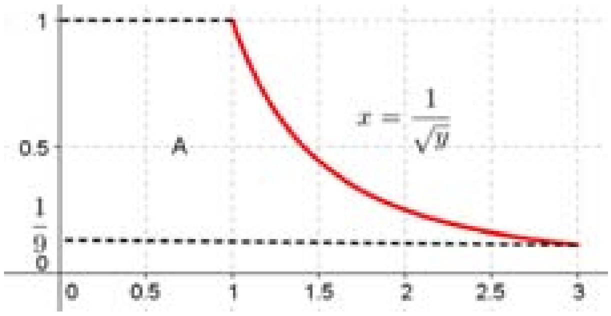
● **Entre 1 y 3:**

$$B = \int_1^3 x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - (-1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A = \int_{1/9}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \left[2\sqrt{y}\right]_{1/9}^{1} = 2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{9}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$



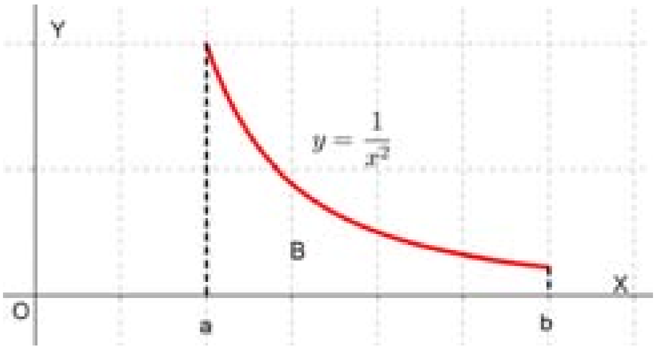


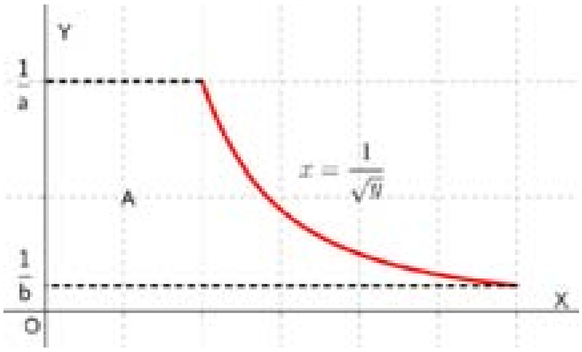
● Entre a y b:

$$B = \int_a^b x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$A = \int_{1/b^2}^{1/a^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \left[2\sqrt{y}\right]_{1/b^2}^{1/a^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)} = 2$





Consideramos $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

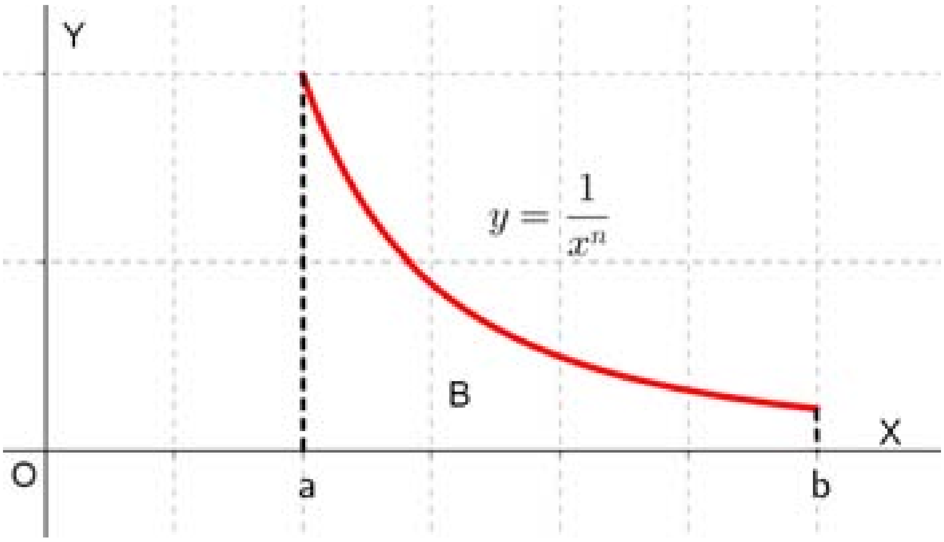
● Entre a y b:

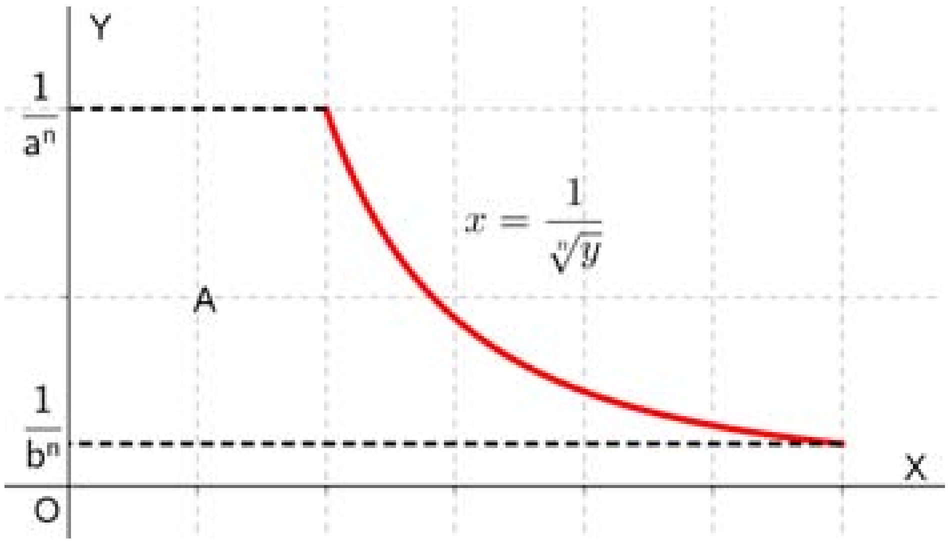
$$B = \int_a^b x^{-n}\,dx = \left[\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\right]_a^b = \frac{1}{-n+1}b^{-n+1} - \frac{1}{-n+1}a^{-n+1} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right]$$

$$A = \int_{1/b^{n2}}^{1/a^n} y^{-1/n}\, dy = \left[\frac{n}{n-1} y^{\frac{n-1}{n}}\right]_{1/b^n}^{1/a^n} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{b^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{1}{a^{n-1}} - \dfrac{1}{b^{n-1}}\right)}{\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{a^{n-1}} - \dfrac{1}{b^{n-1}}\right)} = n$





Estudiamos las funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$, $\dfrac{p}{q} \in Q^+$. Comenzamos con $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

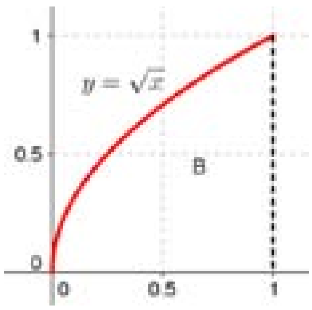
● **Entre 0 y 1:**

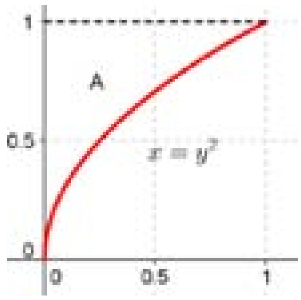
El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3} - 0 = \dfrac{2}{3}$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1}^{+\infty} y^2 \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$





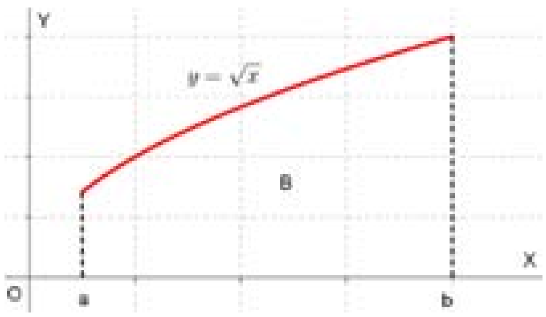
- **Entre a y b:**

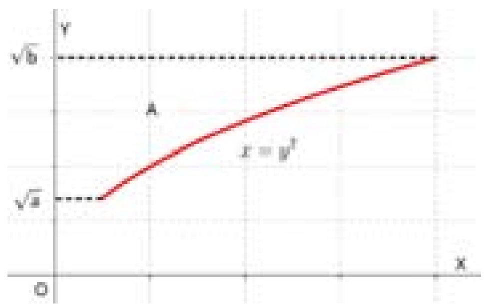
El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_a^b = \frac{2}{3}\sqrt{b^3} - \frac{2}{3}\sqrt{a^3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^2 \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = \frac{1}{3}\sqrt{b^3} - \frac{1}{3}\sqrt{a^3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)}{\frac{2}{3}\left(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$





Consideramos la función $y = x^{\frac{p}{q}}, \frac{p}{q} \in Q^+$ **entre a y b.**

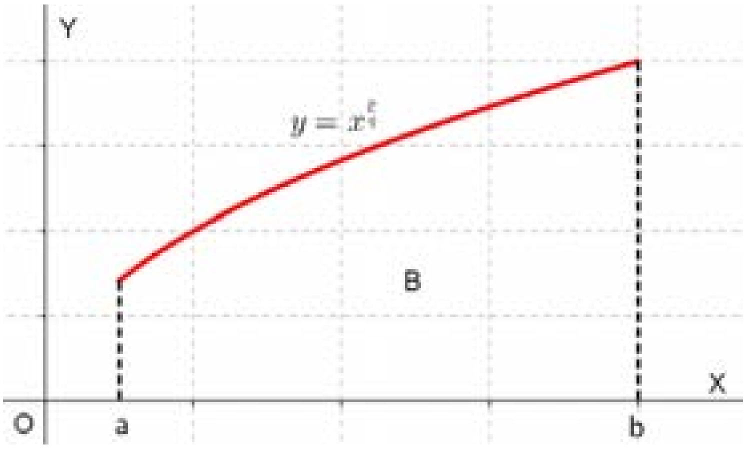
El área de la región B es:

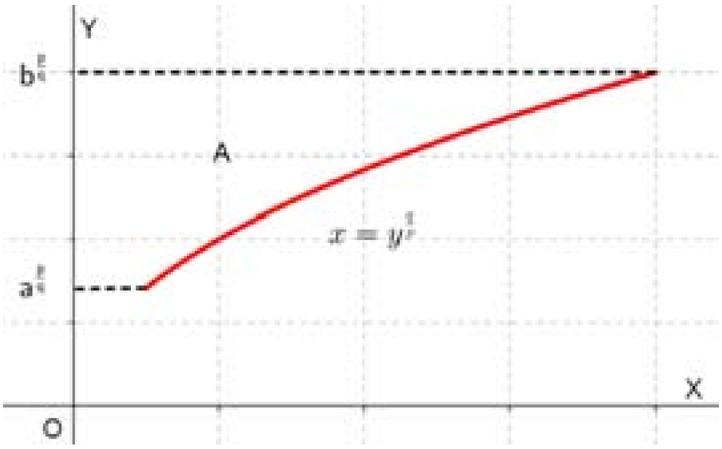
$$B = \int_a^b x^{\frac{p}{q}} \, dx = \left[\frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{p}} \right]_a^b = \frac{q}{p+q} b^{\frac{p+q}{q}} - \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}} = \frac{q}{p+q}\left(b^{\frac{q}{p+q}} - a^{\frac{q}{p+q}} \right)$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A=\int_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} y^{\frac{q}{p}}\,dy=\left[\frac{p}{p+q}\,y^{\frac{p+q}{p}}\right]_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}}=\frac{p}{p+q}\left[\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p+q}{p}}-\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p+q}{p}}\right]=\frac{p}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}}-a^{\frac{p+q}{q}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón=\dfrac{Área\ A}{Área\ B}=\dfrac{\dfrac{p}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}}-a^{\frac{p+q}{q}}\right]}{\dfrac{q}{p+q}\left[b^{\frac{p+q}{q}}-a^{\frac{p+q}{q}}\right]}=\dfrac{p}{q}$





Estudiamos las funciones $y=x^{\frac{p}{q}},\ \dfrac{p}{q}\in Q^-$. Comenzamos con $y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

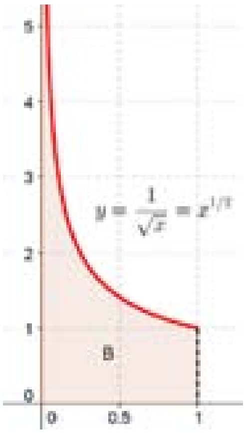
● Entre 0 y 1:

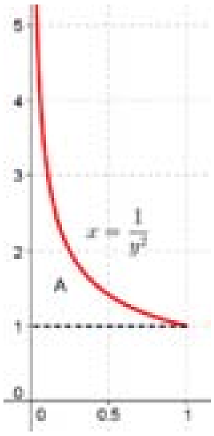
El área de la región B es: $B=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=2\sqrt{1}-2\sqrt{0}=2$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\,dy=\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{+\infty}=-\frac{1}{+\infty}-(-1)=0+1=1$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$





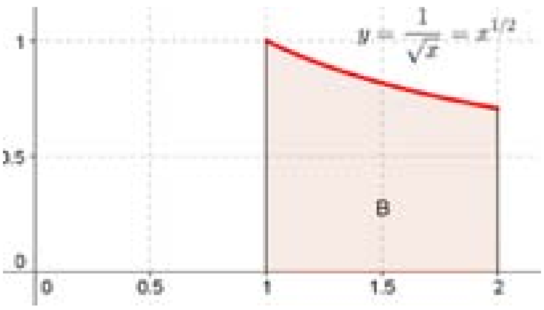
● **Entre 1 y 2:**

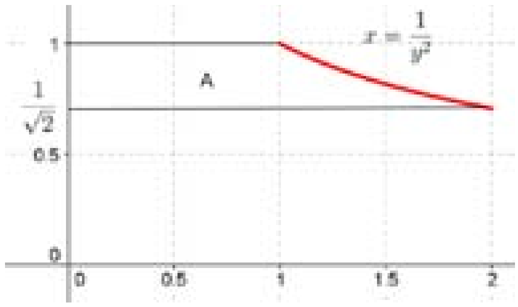
El área de la región B es: $B = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2} - 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{1}{2}$





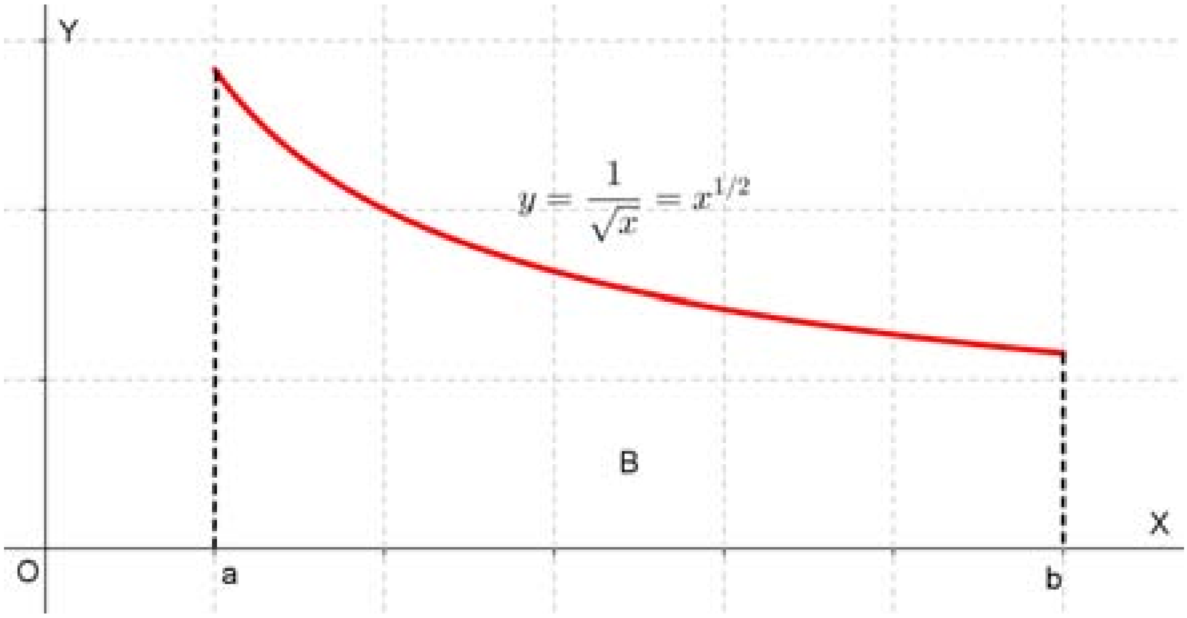
● **Entre a y b:**

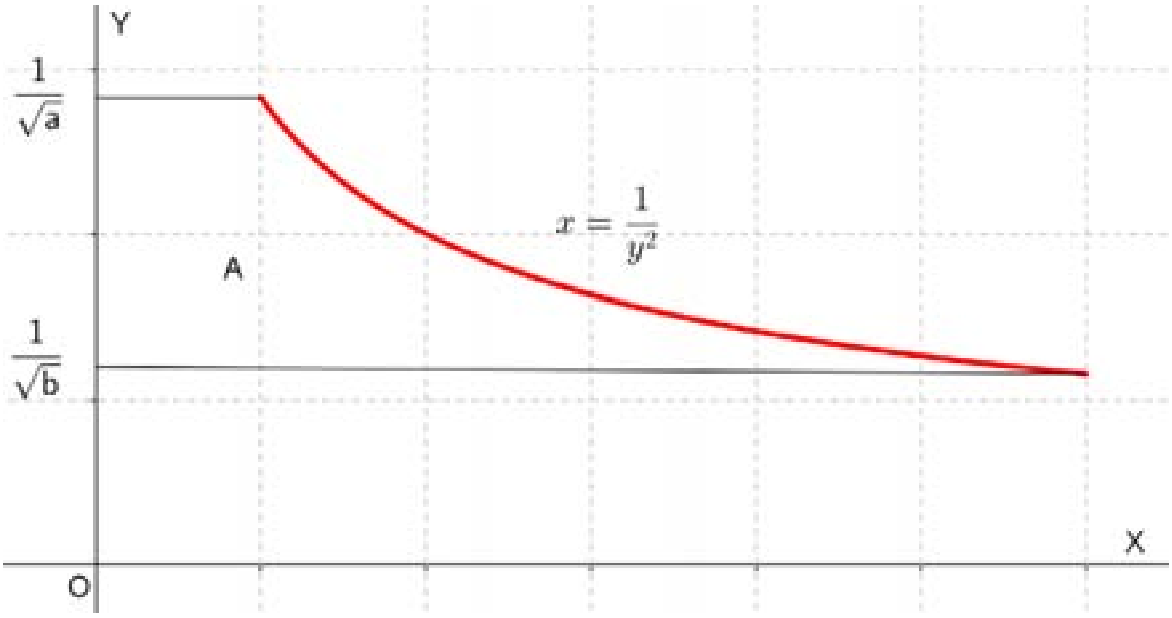
El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} = 2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{b}}^{1/\sqrt{a}} \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{a}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \dfrac{Área\ A}{Área\ B} = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)} = \dfrac{1}{2}$





Podemos comprobar con otras funciones del mismo tipo, por ejemplo:

$y = x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\quad y = x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad y = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\quad \dots$

que se obtienen resultados análogos al anterior.

Para finalizar, h**acemos**, **los cálculos para la función** $y = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{p}}$ **entre a y b.**

El área de la región B es:

$$B = \int_a^b x^{-\frac{p}{q}}\,dx = \left[\frac{q}{q-p}x^{\frac{q-p}{q}}\right]_a^b = \frac{q}{q-p}b^{\frac{q-p}{q}} - \frac{q}{q-p}a^{\frac{q-p}{q}} = \frac{q}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/b^{p/q}}^{1/a^{p/q}} y^{-\frac{q}{p}}\,dy = \left[\frac{p}{p-q}\right]_{1/b^{\frac{p}{q}}}^{1/a^{\frac{p}{q}}} = \frac{p}{p-q}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{p/q}\right]^{\frac{p-q}{p}} - \frac{p}{p-q}\left[\left(\frac{1}{b}\right)^{p/q}\right]^{\frac{p-q}{p}} = \ldots =$$

$$= \frac{p}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área\ A}{Área\ B} = \frac{\frac{p}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]}{\frac{q}{q-p}\left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}}\right]} = \frac{p}{q}$

UNIDAD 11: Formas de contar. Números para contar

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 270

1. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras podemos formar?

Son todos los números de la forma abcba.

La primera cifra puede ser ocupada por cualquier dígito del 1 al 9. Las cifras segunda y tercera pueden ser ocupadas por cualquier dígito del 0 al 9. Las cifras cuarta y quinta van obligadas por las dos anteriores.

Por el principio de multiplicación obtenemos $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números capicúas de 5 cifras que podemos formar.

2. Con tres pesas de 1, 2 y 3 kg ¿Cuántas pesadas distintas podemos hacer?

Podemos hacer 3 pesadas de una pesa cada una, 3 pesadas de dos pesas cada una y 1 pesada con las tres pesas. En total podemos hacer 7 pesadas diferentes.

Son $C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3} = 7$.

3. ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, se pueden formar con todas las letras de la palabra ROMA?

Con todas las letras de la palabra ROMA podemos formar $P_4 = 24$ palabras distintas.

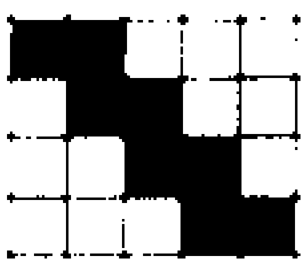
4. Cinco amigos, dos chicas y tres chicos van al cine y se sientan en una fila en la que hay cinco butacas. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar si las chicas se sientan juntas?

Llamamos A y B a las chicas y a,b,c a los chicos.

Una situación es ABabc. Las chicas se pueden permutar entre ellas y moverse en 4 posiciones ABabc, aABbc, abABc y abcAB y los chicos se pueden permutar entre ellos. Entonces todas las situaciones posibles son $P_2 \cdot P_3 \cdot 4 = 48$ formas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 283

1. Diagonal y cuadrados. En el rectángulo del dibujo, de orden 5 x 4, la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal en un rectángulo de orden a x b?



La solución queda:

Experimentamos con los casos particulares más sencillos y ordenamos los resultados. Llamando a (altura) y b (base) a las dimensiones del rectángulo, podemos construir la tabla.

a x b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	4	4	6	6
3	3	4	3	6	7	6
4	4	4	6	4	8	8
5	5	6	7	8	5	10
6	6	6	6	8	10	6

En el elemento en el que se cruzan la fila a con la columna b aparece el número de cuadrados pequeños atravesados por la diagonal, para un rectángulo de dimensiones a x b, por ejemplo, la fila 4 y la columna 3 se cruzan en el número 6, luego, en un rectángulo de orden 4 x 3 la diagonal atraviesa 6 cuadrados.

Si analizamos los valores de la tabla anterior podemos plantear la siguiente conjetura:

● El número de cuadrados pequeños que atraviesa la diagonal de un rectángulo de orden a x b es igual a: a + b – 1, si a y b son primos entre sí.

● Si los números a y b nos son primos entre sí, entonces el número es: a + b – d, siendo d el máximo común divisor de a y b.

2. Producto de tres números. Demuestra que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.

El producto de tres números naturales consecutivos no puede ser un cubo perfecto ya que si lo fuese se tendría: $k^3 = n (n + 1) (n + 2)$.

Por otra parte son válidas las siguientes desigualdades:
$n^3 < n (n + 1) (n + 2) < (n + 1)^3$

La desigualdad primera $n^3 < n (n + 1) (n + 2)$, es decir $n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n$, es inmediata.

Para probar la segunda $n (n + 1) (n + 2) < (n + 1)^3$, basta comprobar que: $n (n + 2) < (n + 1)^2$.

Pero esto también es inmediato por que: $n (n + 2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Luego el número $n (n + 1) (n + 2)$ no puede ser un cubo perfecto ya que se encuentra comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 284

1. Determina las agrupaciones que se describen a continuación:

a) Las variaciones ordinarias de las letras A, B, C y D tomadas dos a dos.

b) Las permutaciones con repetición de las letras A, A, B y D.

En la imagen pueden verse las agrupaciones que pueden formarse en cada apartado.

a) Variaciones ordinarias de A, B, C y D tomadas 2 a 2

$V_{\{A,B,C,D\},2} \rightarrow$ {{A,B},{B,A},{A,C},{C,A},{A,D},{D,A},{B,C},{C,B},{B,D},{D,B},{C,D},{D,C}}

b) Permutaciones con repetición de A, A, B y D

$P_4^{\{A,A,B,D\}} \rightarrow$ {{A,A,B,D},{A,A,D,B},{A,B,A,D},{A,B,D,A},{A,D,A,B},{A,D,B,A},{B,A,A,D},{B,A,D,A},{B,D,A,A},{D,A,A,B},{D,A,B,A},{D,B,A,A}}

2. Calcula:

a) $VR_{10,\,5}$ **b)** $V_{10,\,5}$ **c)** P_{10} **d)** $P_{10}^{5,\,5}$ **e)** $C_{10,\,5}$

En la imagen aparecen las soluciones.

Los valores buscados son :

$VR_{10,5} \rightarrow 100000$

$V_{10,5} \rightarrow 30240$

$P_{10} \rightarrow 3628800$

$P_{10}^{5,5} \rightarrow 252$

$C_{10,5} \rightarrow 252$

3. Construye las ocho primeras filas del triángulo de Pascal.

Procediendo como se indica en las páginas de Nuevas Tecnologías y en el epígrafe TRIÁNGULO DE PASCAL, obtenemos:

$$\begin{pmatrix}
_ & _ & _ & _ & _ & _ & _ & \binom{0}{0} & _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & _ & _ & \binom{1}{0} & _ & \binom{1}{1} & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & _ & \binom{2}{0} & _ & \binom{2}{1} & _ & \binom{2}{2} & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & \binom{3}{0} & _ & \binom{3}{1} & _ & \binom{3}{2} & _ & \binom{3}{3} & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & \binom{4}{0} & _ & \binom{4}{1} & _ & \binom{4}{2} & _ & \binom{4}{3} & _ & \binom{4}{4} & _ & _ & _ \\
_ & _ & \binom{5}{0} & _ & \binom{5}{1} & _ & \binom{5}{2} & _ & \binom{5}{3} & _ & \binom{5}{4} & _ & \binom{5}{5} & _ & _ \\
_ & \binom{6}{0} & _ & \binom{6}{1} & _ & \binom{6}{2} & _ & \binom{6}{3} & _ & \binom{6}{4} & _ & \binom{6}{5} & _ & \binom{6}{6} & _ \\
\binom{7}{0} & _ & \binom{7}{1} & _ & \binom{7}{2} & _ & \binom{7}{3} & _ & \binom{7}{4} & _ & \binom{7}{5} & _ & \binom{7}{6} & _ & \binom{7}{7}
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
_ & _ & _ & _ & _ & _ & _ & 1 & _ & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & _ & _ & 1 & _ & 1 & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & _ & 1 & _ & 2 & _ & 1 & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & 1 & _ & 3 & _ & 3 & _ & 1 & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & 1 & _ & 4 & _ & 6 & _ & 4 & _ & 1 & _ & _ & _ \\
_ & _ & 1 & _ & 5 & _ & 10 & _ & 10 & _ & 5 & _ & 1 & _ & _ \\
_ & 1 & _ & 6 & _ & 15 & _ & 20 & _ & 15 & _ & 6 & _ & 1 & _ \\
1 & _ & 7 & _ & 21 & _ & 35 & _ & 35 & _ & 21 & _ & 7 & _ & 1
\end{pmatrix}$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 285

4. Calcula: a) $VR_{8,\,4}$ b) P_8 c) $C_{8,\,4}$ d) $P_8^{6,\,2}$ e) $P_8^{5,\,3}$ f) $P_8^{4,\,4}$

Activando las opciones del menú **MATH PRB** obtenemos los valores que pueden verse en las imágenes:

a) $VR_{8,\,4} = 8^4 = 4096$

b) $P_8 = 8! = 40320$

c) $C_{8,\,4} = 70$

d) $P_8^{6,\,2} = \dfrac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$

e) $P_8^{5,\,3} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$

f) $P_8^{4,\,4} = \dfrac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$

```
8^4
                4096
8!
               40320
8 nCr 4
                  70
█
```

```
8 ! / (6 ! * 2 !)
                  28
8 ! / (5 ! * 3 !)
                  56
8 ! / (4 ! * 4 !)
                  70
█
```

5. Halla el valor de todos los números combinatorios de la fila novena del triángulo de Pascal.

En el menú **MATH PRB** activamos la opción **3 : nCr** tecleando la expresión: 8 nCr {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} y obtenemos:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

6. Calcula los valores de las agrupaciones y los números que se describen a continuación:

a) Las variaciones ordinarias de 6 elementos tomados de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, 4 en 5 y 6 en 6.

b) Las variaciones ordinarias de 10, 11, 12, 13 y 14 elementos tomados de 2 en 2.

c) Los números factoriales 5!, 6!, 7!, 8!, 9! y 10!.

a) En el menú MATH PRB tecleamos 6 nVr {1, 2, 3, 4, 5, 6} y obtenemos:

6 30 120 360 720 720.

b) En el menú MATH PRB tecleamos {10, 11, 12, 13, 14} nVr 2 y obtenemos:

90 110 132 156 182.

c) En el menú MATH PRB tecleamos {5, 6, 7, 8, 9, 10}! y obtenemos:

120 720 5040 40320 362880 3628800.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 288

1. Lanzamos dos dados al aire. ¿De cuántas formas diferentes podemos obtener siete o nueve puntos?

En total son: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3),(5,2),(6,1),(3,6),(4,5),(5,4) y (6,3). Es decir, 10 formas distintas.

2. ¿En cuántas familias de cuatro hijos hay dos varones y dos mujeres?

En total hay 16 familias distintas de 4 hijos. De ellas hay 6 que tienen dos varones y 2 mujeres y son:

(v,v,m,m) , (v,m,v,m) , (v,m,m,v), (m,v,m,v), (m,v,v,m), (m,m,v,v)

Con combinatoria es: Entre y todas las familias posibles $VR_{2,4} = 16$ familias hay $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

3. ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden escribirse con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9? ¿Cuántos de ellos serán múltiplos de 5? ¿Cuántos serán mayores de 500?

Se pueden escribir $V_{5,\,3} = 60$ números.

Serán múltiplos de 5 los que terminen en la cifra 5: $V_{4,\,2} = 12$ números.

Serán mayores de 500 los que empiecen por 5 o por 7 o por 9: $3 \cdot V_{4,\,2} = 36$ números.

4. El número PIN de un teléfono móvil está formado por cuatro dígitos seguidos. ¿Cuántos números distintos podemos formar de este modo?

Podemos formar $VR_{10,\,4} = 10\,000$ números PIN

5. Con los diez dígitos formamos números de cinco cifras:

a) ¿Cuántos de ellos tendrán todas sus cifras distintas?

b) En el caso anterior ¿cuántos serán pares?

c) ¿Cuántos números de cinco cifras podemos formar?

a) Serán todos los que se pueden formar con 10 dígitos menos los que empiecen por 0 que no son números de 5 cifras sino de 4: $V_{10,\,5} - V_{9,\,4} = 27\,216$ números.

b) Serán pares los que terminen en 0, en 2, en 4, en 6 o en 8 y son: $5 \cdot V_{9,\,4} - 4 \cdot V_{8,\,3} = 13\,776$ números.

c) En este caso las cifras pueden ser distintas o repetidas y podremos formar: $9 \cdot VR_{10,\,4} = 90\,000$ números

6. Las matriculas de vehículos en España están formadas por cuatro dígitos y tres letras, por ejemplo 0438AHK. ¿Cuántas matriculas distintas se pueden hacer de esta forma?

En este caso se pueden repetir los dígitos y las letras por lo que serán: $VR_{10,\,4} \cdot VR_{27,\,3}$ = 196 830 000 de matriculas diferentes.

7. En la asamblea anual de una comunidad de vecinos asisten 20 vecinos y deben elegir Presidente y Secretario ¿Cuántas formas distintas tienen de hacerlo?

Tienen $V_{20,\,2}$ = 380 formas distintas.

8. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir seis cartas de una baraja española de 40 cartas en los siguientes casos?:

a) Sin reemplazar las cartas al mazo. **b) Reemplazando las cartas al mazo.**

a) Hay $V_{40,\,6} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 = 2\,763\,633\,600$

b) Si se pueden ir reemplazando las cartas hay $VR_{40,\,6} = 40^6 = 4\,096\,000\,000$

9. Nueve amigos, 4 chicas y 5 chicos, van al estadio a ver un partido de futbol. Se sientan en una grada que tiene 9 asientos. Halla:

a) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse?

b) ¿De cuántas si las chicas se quieren sentar juntas y los chicos también?

a) Se pueden sentar de $P_9 = 9! = 362\,880$ formas distintas.

b) En este caso hay $P_4 \cdot P_5 \cdot P_2 = 5760$ formas distintas.

10. Juan dispone de 4 novelas de aventuras, 6 de ciencia ficción y 3 policiacas para colocar en la estantería de su habitación. Halla:

a) ¿De cuántas maneras distintas puede colocar sus libros?

b) ¿De cuántas si quiere que las novelas de aventuras estén juntas en primer lugar?

c) ¿De cuántas si quiere que estén juntas las del mismo género?

a) Los puede colocar de $P_{13} = 13! = 6\,227020\,800$ maneras distintas.

b) En este caso hay $P_4 \cdot P_9 = 4! \cdot 9! = 8\,709\,120$ maneras distintas.

c) En este caso hay $P_4 \cdot P_6 \cdot P_3 \cdot P_3 = 4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 3! = 622\,080$ maneras distintas.

11. ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, podemos formar con las letras de la palabra MURCIELAGO? ¿Cuántas de ellas empiezan por M y terminan en O?

Podemos formar $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ palabras distintas. Empiezan por M y terminan en O: $P_8 = 8! = 40\,320$ palabras distintas

12. Un Byte está formado por una secuencia de 8 digitos, ceros y unos.¿Cuántos bytes distintos podemos formar? ¿Cuántos empezarán y terminaran por 1?¿Cuántos tendrán 3 unos y el resto ceros?

Podemos formar $VR_{2,8}$ = 256 bytes distintos.

Empezarán y terminarán en 1: $VR_{2,6}$ = 64 bytes distintos

Tendrán 3 unos y 5 ceros: $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

13. Un pintor mezcla colores con sus botes de pintura. Dispone de los siete colores del arco iris, ¿cuántas mezclas de tres colores puede obtener?

Puede hacer $C_{7,3}$ = 35 colores diferentes

14. Un opositor se examina de 70 temas y le sacan por sorteo 4 temas que debe hacer. ¿Cuántos exámenes distintos puede tener? ¿Cuántos si de los 10 primeros sacan 1?

Puede hacer $C_{70,4}$ = 916 895 exámenes distintos.

En este caso puede hacer $C_{10,1} \cdot C_{60,3}$ = 342 200 exámenes distintos.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 289

15. ¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono? ¿Y un polígono de n lados?

Un dodecágono tiene $C_{12,2}$ – 12 lados = 54 diagonales.

Un polígono de n lados tiene $C_{n,2}$ – n lados = $\frac{n^2-3n}{2} = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonales.

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$

b) $\binom{42}{x+3} = \binom{42}{2x-6}$

c) $\binom{x}{6} + \binom{15}{y} = \binom{z}{7}$

d) $P_x = 6\, P_{x-2}$

e) $VR_{x,2} = 5 + V_{x,2}$

f) $\binom{2x^2}{9x-18} = \binom{2x^2}{7x-12}$

g) $V_{x,2} - C_{x,2} = 190$

h) $C_{x,4} = 20\, C_{x,2}$

a) La expresión se convierte en la ecuación x · (x - 1) · (x - 2) · (x - 3) = 20 · x · (x - 1); cuya solución es x = 7.

b) Obtenemos la ecuación x + 3 + 2x - 6 = 42, cuya solución es x = 15.

c) Los valores de las incógnitas son x = 15; y = 7; z = 16.

d) La solución de la ecuación x! = 6 · (x - 2)! es x= 3.

e) Obtenemos la ecuación $x^2 = 5 + x\cdot (x - 1)$ con solución x = 5.

f) Las soluciones de la ecuación $(9x - 18) + (7x – 12) = 2x^2$ son x = 5 y x = 3.

g) Obtenemos la ecuación $x\cdot(x-1)-\dfrac{x!}{2!\cdot(x-2)!}=190$ con solución x = 20.

h) La solución de la ecuación $\dfrac{x!}{4!\cdot(x-4)!}=20\cdot\dfrac{x!}{2!\cdot(x-2)!}$ es x = 18.

17. ¿Cuántos números de teléfono de 9 cifras se pueden formar si la primera cifra debe ser un 9? ¿Cuántos si las tres primeras cifras deben ser 975?

Si la primera cifra ha de ser un 9 se pueden formar: $VR_{10, 8} = 10^8$ = 100 000 000 números de teléfono.

Si las tres primeras han de ser 975 se pueden formar: $VR_{10, 6} = 10^6$ = 1 000 000 números de teléfono.

18. Para hacer una apuesta de lotería primitiva hay que marcar con cruces seis números de un boleto en el que figuran los números del 1 al 49. ¿Cuántos boletos hay que rellenar para tener la seguridad de ganar?

Hay que rellenar $C_{49, 6}$ = 13 983 816 boletos distintos.

19. Un estudiante tiene 10 autobuses distintos para ir al instituto y los mismos para volver. ¿De cuántas formas puede hacer el viaje de ida y vuelta si no puede ir y volver en el mismo? ¿Y si puede ir y volver en el mismo?

En el primer caso tiene $V_{10, 2}$ = 90 formas distintas.

En el segundo caso tiene $VR_{10, 2}$ = 100 formas distintas.

20. Tiramos 6 monedas distintas al aire, ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener? ¿en cuántos aparecen 4 caras y 2 cruces?

Podemos obtener $VR_{2, 6}$ =64 resultados distintos.

Si han de aparecer 4 caras y 2 cruces podemos obtener $P_6^{4,2}$ = 15 resultados distintos.

21. Los expedientes de los alumnos de un centro de enseñanza están formados por tres letras elegidas entre las 27 del abecedario y un número de tres cifras distintas. ¿Cuántos números de expedientes distintos puede haber?

Se pueden hacer $VR_{27, 3} \cdot 9 \cdot V_{9, 2}$ = 12 754 584 números de expedientes distintos.

22. En un grupo de amigos hay 10 chicos y 8 chicas. Hay dos líderes, un chico y una chica. Se quiere formar una comisión para preparar una fiesta formada por 5 amigos.

a) ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántas si han de entrar 3 chicos y 2 chicas?

c) ¿Cuántas si han de entrar los dos líderes?

d) ¿Cuántas si ha de entrar uno solo de los líderes?

a) En total se pueden formar $C_{18,\,5}$ = 8568 comisiones distintas.

b) En este caso se pueden formar $C_{10,\,3} \cdot C_{8,\,2}$ = 3360 comisiones distintas.

c) En este caso se pueden formar $C_{9,\,2} \cdot C_{7,\,1}$ = 252 comisiones distintas.

d) En este caso se pueden formar $C_{9,\,2} \cdot C_{8,\,2} + C_{10,\,3} \cdot C_{7,\,1}$ = 1848 comisiones distintas.

23. Para formar un equipo de baloncesto de 5 jugadores, un club dispone de 12 jugadores. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar? ¿Cuántos si sólo hay 3 que juegan de pívot?

Puede formar $C_{12,\,5}$ = 792 equipos distintos.

Si solo hay 3 jugadores que pueden ser pivot se pueden formar: $C_{3,\,1} \cdot C_{9,\,4}$ = 378 equipos distintos.

24. En una jaula hay 6 gatos blancos y 8 negros. Salen de la jaula pon un hueco de uno en uno. ¿De cuantas formas distintas pueden salir? ¿De cuántas si han de salir primero los negros y luego los blancos? ¿De cuántas si han de salir juntos los del mismo color?

Pueden salir de $P_{14} = 14! =$ 87 178 291 200formas distintas.

Si han de salir primero los negros y luego los blancos pueden hacerlo de $P_8 \cdot P_6 = 8! \cdot 6! =$ 29 030 400 formas distintas.

Si han de salir juntos los del mismo color pueden hacerlo de $P_6 \cdot P_8 \cdot P_2 = 6! \cdot 8! \cdot 2! =$ 58 060 800 formas distintas.

25. Con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 ¿Cuántos productos distintos de 3 dígitos diferentes se pueden formar? ¿Cuántos de esos productos serán pares?

Se pueden hacer $C_{6,\,3}$ = 20 productos distintos.

Serán pares los que tengan una, dos o las tres cifras pares: $C_{3,\,1} \cdot C_{3,\,2} + C_{3,\,2} \cdot C_{3,\,1} + C_{3,\,3}$ = 19 productos pares.

26. ¿Cuántas quinielas diferentes de 15 resultados es necesario hacer para tener seguridad de ganar? ¿Cuántas tendrán seis doses, cinco unos y cuatro equis?

Hay que hacer $VR_{3,\,15}$ = 14 348 907 quinielas distintas.
Tendrán seis doses, cinco unos y cuatro equis: $P_{15}^{6,5,4} = 630\,630$ quinielas distintas.

27. Un grupo de 10 amigos se reparten 10 viajes que les han tocado en un sorteo ¿De cuántas formas pueden hacerlo? ¿De cuántas si hay 3 viajes a París, 5 a Roma y 2 a Londrés?

Pueden hacerlo de P_{10} = 10! = 3 628 800 formas distintas.

En el caso de que haya 3 viajes a París, 5 a Roma y 2 a Londres, habrá $P_{10}^{3,5,2} = 2\,520$ formas distintas de repartir los viajes.

28. Un comercio dispone de 8 pesas distintas. ¿Cuántas pesadas diferentes puede hacer?

28. Hemos de considerar todos los casos posibles, es decir: Tomar 1 sola pesa, dos pesas, tres pesas, cuatro pesas, cinco pesas, seis pesas, siete pesas u ocho pesas.

Obtenemos $C_{8,\,1} + C_{8,\,2} + C_{8,\,3} + C_{8,\,4} + C_{8,\,5} + C_{8,\,6} + C_{8,\,7} + C_{8,\,8} = 2^8 - 1 = 255$ pesadas diferentes.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 290

1. En una pandilla de 4 amigos ¿cuántas situaciones distintas de fechas de cumpleaños en días de la semana se puede dar?

Considerando que la semana tiene 7 días se pueden dar $VR_{7,\,4}$ = 2041 situaciones diferentes.

2. ¿De cuántas formas se puede elegir la tripulación de un avión formada por 7 personas si se dispone de 12 miembros de los cuales solo 3 son pilotos?

Considerando que debe ir un piloto se pueden dar $C_{3,\,1} \cdot C_{9,\,6}$ = 252 tripulaciones distintas.

3. Un grupo de 50 estudiantes van a un restaurante a comer para celebrar el fin de curso. En el restaurante les presentan el menú formado por 4 platos de primero, 5 de segundo y 3 postres. Uno de los estudiantes comenta que con ese menú puede que todos coman diferente ¿Cómo pudo saberlo?

Con esos platos se pueden hacer $C_{4,\,1} \cdot C_{5,\,1} \cdot C_{3,\,1} = 60$ menús distintos. Como son 50 comensales, pueden comer todos diferentes combinaciones de menú.

4. Un router de una red inalámbrica tiene 6 pilotos que pueden estar en verde (encendidos) o en rojo (apagados). ¿De cuántas formas distintas podemos ver el router? ¿De cuántas si están solo 2 verdes?

Podemos ver el router de $VR_{2,\,6}$ = 64 formas distintas. Si hay solo dos verdes habrá cuatro rojos por lo que podemos ver el router de $P_6^{2,4} = 15$ formas distintas.

5. En una tienda de caramelos hay 16 tipos de gominolas y 10 de caramelos de papel. Queremos comprar una docena se dulces diferentes.

a) ¿De cuántas formas distintas podemos elegir?

b) ¿De cuantas si quiero 9 gominolas y el resto caramelos?

c) ¿De cuántas, del apartado anterior, si hay dos gominolas que no me gustan y cuatro que quiero que me pongan seguro?

a) Podemos elegir de $C_{26, 12}$ = 9 657 700 formas distintas.

b) En este caso podemos elegir de $C_{16, 9} \cdot C_{10, 3}$ = 1 372 800 formas distintas.

c) En este caso podemos elegir de $C_{10, 5} \cdot C_{10, 3}$ = 30 240 formas distintas.

6. Resolver la ecuación $V_{x,3} = 4 \cdot V_{x-2,2} + 8 \cdot V_{x-2,1}$

Queda la ecuación $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ que tiene por soluciones x= 1, x = 2 y x = 4. Solo x = 4 es una solución válida.

7. El alfabeto Morse utiliza como símbolos para formar palabras y números (·) y (-). ¿Cuántas palabras distintas de 8 símbolos podemos formar? ¿En cuántas entraran 5 puntos y 3 rayas?

Podemos formar $VR_{2, 8} = 256$ palabras distintas.

Tendrán cinco puntos y tres rayas: $P_8^{5,3} = 56$ palabras distintas.

8. Tenemos 4 números distintos positivos y 3 negativos.

a) ¿Cuántos productos positivos distintos de tres factores podemos formar?

b) ¿Cuántos productos negativos distintos de cuatro factores podemos formar?

a) Productos positivos de 3 factores serán aquellos en los que entran 3 números positivos o uno positivo y dos negativos, es decir $C_{4, 3} + C_{4, 1} \cdot C_{3, 2} = 16$.

b) Productos negativos de 4 factores serán aquellos en los que entran 3 números positivos y 1 negativo o uno positivo y 3 negativos, es decir $C_{4, 3} \cdot C_{3, 1} + C_{4, 1} \cdot C_{3, 3} = 16$.

9. A una feria del libro asisten 6 escritores de novela, 4 de poesía y 2 de ensayo. Para firmar sus libros se colocan en línea recta.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar?

b) ¿De cuántas si han de estar juntos los de poesía en último lugar?

c) ¿De cuántas si han de estar juntos los de la misma especialidad?

a) Se pueden colocar de $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$ formas distintas.

b) Están los escritores de poesía en último lugar de $P_8 \cdot P_4$ = 967 680 formas distintas.

c) Están juntos los de la misma especialidad de $P_6 \cdot P_4 \cdot P_2 \cdot P_3$ = 207 360 formas distintas.

10. En un plano hay pintados diversos puntos, no habiendo tres en línea recta. Cada uno está unido a los demás por líneas rectas. Si en total contamos 55 líneas rectas ¿cuántos puntos hay dibujados en el plano?

Llamamos x a los puntos que hay. Se debe cumplir la ecuación $C_{x,\,2} = 55$. De aquí obtenemos que hay x = 11 puntos.

11. Con las letras de la palabra ECONOMICAS:

a) ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, se pueden formar con las letras de la palabra?

b) ¿Cuántas de ellas empiezan y terminan en O?

c) ¿En cuántas palabras aparecen las vocales y las consonantes alternas como en la palabra inicial?

a) Se pueden formar $P_{10}^{2,2,1,1,1,1,1,1} = 907\,200$ palabras diferentes.

b) Empiezan y terminan en O: $P_8^{2,1,1,1,1,1,1} = 20\,160$ palabras diferentes.

c) Tienen las vocales y consonantes alternas como en la palabra inicial en: $P_5^{2,1,1,1} \cdot P_5^{2,1,1,1} \cdot P_2 = 7\,200$ palabras distintas.

12. Ocho amigas se deben sentar alrededor de una mesa circular y hay dos que no se pueden sentar juntas por ser hermanas. Halla de cuántas formas se pueden sentar las ocho personas.

Hallamos de cuántas formas se pueden sentar las ocho amigas y restamos los casos en los que dos hermanas se sienten juntas y obtenemos $P_7 - 2 \cdot P_6$ = 3 600 formas distintas.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 291

Desordenaciones

1. Una empresa pequeña tiene cuatro clientes. En las oficinas preparan 4 cartas personalizadas para sus clientes y 4 sobres con las direcciones correspondientes. Meten al azar una carta en cada sobre. ¿Cuántas formas existen en las que ninguna carta llega a su destinatario? ¿Y cuántas en las que llega solo una carta? ¿Y cuántas en las que llegan dos cartas? ¿Y cuántas con tres? ¿Y cuántas en las que todas llegan a su destino?

Estudia las situaciones en las que haya 5 o 6 cartas, así como en las que haya menos cartas. Busca relaciones entre los números que obtienes al responder a las cuestiones que se plantean.

2. Intenta resolver la situación análoga que fue estudiada por Leonhard Euler (1707-1783) en su famosa obra *Introductio in Analysin Infinitorum* que dice así:

Dada cualquier serie de n letras a, b, c, d, e… encuentra de cuántas maneras distintas pueden colocarse sin que ninguna ocupe la posición que ocupaba inicialmente.

Denotando por d_n al número de permutaciones de n letras a, b, c, d… en las que ninguna letra ocupa su posición original, Euler descubrió la relación de recurrencia que permite calcular d_n en función de desordenaciones de órdenes inferiores:
Para n > 2 se verifica: $d_n = (n-1)\cdot\left[d_{n-1} + d_{n-2}\right]$

Euler también descubrió la forma de obtener d_n sin necesidad de conocer las desordenaciones de órdenes inferiores y obtuvo la expresión:
Para n ≥ 1 se verifica:

$$d_n = n!\cdot\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

¿Podrías encontrar algún razonamiento que permita demostrar las dos expresiones anteriores?

1. Llamamos a las cuatro cartas con los números naturales 1, 2, 3 y 4. Escribimos todas las permutaciones de 4 elementos, 4! = 24, y analizamos los elementos fijos o elementos que conservan su posición natural.

En la tabla aparecen todos los casos. Se han señalado en negrita las permutaciones con todos sus elementos desordenados.

Permutación	Fijos	Permutación	Fijos	Permutación	Fijos	Permutación	Fijos
1234	4	2134	2	3124	1	**4123**	0
1243	2	**2143**	0	**3142**	0	4132	1
1324	2	2314	1	3214	2	4213	1
1342	1	**2341**	0	3241	1	4231	2
1423	1	**2413**	0	**3412**	0	**4312**	0
1432	2	2431	1	**3421**	0	**4321**	0

Para el caso n = 3 obtenemos:

Permutación	Fijos	Permutación	Fijos
123	3	**231**	0
132	1	**312**	0
213	1	**321**	1

Vamos a denotar por **d(n; k)** al número de las permutaciones de 12 … n, con k elementos fijos exactamente; y en particular al número **d(n; 0)** lo denotaremos (por su importancia para calcular los demás) simplemente por $\mathbf{d_n}$ (número de permutaciones desordenadas de n elementos).

Por ejemplo, cuando n = 4, n = 3, n = 2 y n = 1, tenemos:

- d(4; 4) = 1; d(4; 3) = 0; d(4; 2) = 6; d(4; 1) = 8; d_4 = d(4; 0) = 9.

- d(3; 3) = 1; d(3; 2) = 0; d(3; 1) = 3; d_3 = d(3; 0) = 2.

- d(2; 2) = 1; d(2; 1) = 0; d_2 = d(2; 0) = 1.

● $d(1; 1) = 1$; $d_1 = d(1; 0) = 0$.

Podemos construir una tabla:

n	d_n	d(n; 1)	d(n; 2)	d(n; 3)	d(n; 4)
1	0	1			
2	1	0	1		
3	2	3	0	1	
4	9	8	6	0	1

Observamos, en primer lugar que, como el número total de permutaciones de 1, 2, … , n es n!, se tiene que la suma de las desordenaciones obtenidas en cada fila suman n!:

$$\sum_{k=0}^{n} d\,(n;\,k) = n! \qquad [1]$$

Por otra parte, una permutación de n elementos con k fijos exactamente se obtiene eligiendo los k elementos fijos de cualquier manera entre los n y obligando a que la permutación de los restantes n - k elementos sea descolocada, luego:

$$d\,(n;\,k) = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k} \qquad [2]$$

siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n!}$ el número combinatorio n sobre k.

Con las fórmulas [1] y [2] podríamos ahora determinar las desordenaciones para n = 5 y n = 6 elementos (cartas, letras, etc.).

n	d_n	d(n; 1)	d(n; 2)	d(n; 3)	d(n; 4)	d(n; 5)	d(n; 6)
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

2. A continuación mostramos los razonamientos que permiten obtener las expresiones del enunciado.

Para n > 2 se verifica: $d_n = (n-1) \cdot \left[d_{n-1} + d_{n-2} \right]$

Demostración:

Euler comenzó con n letras ***a, b, c, d, e…*** Al recolocarlas de forma que ninguna de ellas vuelva a su posición original, encontramos que hay n – 1 posibilidades para la primera letra, ya que no puede ser la ***a***. No importa cuál de las otras n – 1 letras ocupe el primer lugar, ya que se aplicaría un razonamiento similar.

En aras de la sencillez, Euler asumió que la primera letra de su nueva disposición fuera la ***b*** y que "cualquiera que fuera el número de posibilidades que uno encuentra cuando la letra ***b*** ocupa la primera posición, éstas se multiplicarían por n – 1 para dar…". Aquí, Euler, aplica el principio de multiplicación.

Por tanto, la nueva permutación empieza con la letra ***b***. Esto llevó a Euler a considerar dos casos: uno en el que la letra ***a*** figura en segunda posición y otro en el que no es así.

Caso 1.
Bajo este supuesto, nuestra secuencia comienza con ***ba…*** Estamos por tanto obligados a colocar las n – 2 letras restantes ***c, d, e…*** de forma que ninguna ocupe a su posición original. Pero éste es el mismo problema con el que empezamos aunque "reducido en dos". Utilizando la notación anterior, hay d_{n-2} formas de hacer esto.

Caso 2.
Aquí indicamos que la primera letra es ***b*** y la segunda no es ***a***. El reto es volver a colocar las letras ***a, c, d, e…*** en las n – 1 posiciones a la derecha de ***b*** de forma que ni ***c*** ocupe la tercera posición, ni ***d*** a la cuarta, ni ***e*** a la quinta. Más aún, debe ocurrir también que ***a*** no ocupe la segunda posición, ya que estamos en el Caso 2 en el que **a** no puede seguir a ***b***, por que si lo hiciera estaríamos en el Caso 1.

Por tanto, sin contar la letra ***b*** inicial, vemos que el número de permutaciones es exactamente el número de disposiciones de las n – 1 letras ***a, c, d, e, f…*** en las que ninguna ocupa su lugar original. Esto fue llamado antes d_{n-1}.
Por tanto, según los Casos 1 y 2, hay $d_{n-1} + d_{n-2}$ reordenamientos que empiezan por ***b***. Y como hemos visto que hay n – 1 posibilidades para esa primera posición, el número total de permutaciones de n letras sin dejar ninguna en su posición inicial es:

$$d_n = (n-1)\cdot\left[d_{n-1} + d_{n-2}\right]$$

Nota:
Euler descubrió una segunda relación iterativa:

para $n \geq 2$, $\mathbf{d_n = n \cdot d_{n-1} + (-1)^n}$ [1]

a partir de los valores obtenidos para n = 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

También dedujo esta última relación de la anterior y viceversa.

Veamos la prueba para la segunda expresión.

Para n ≥ 1 se verifica:

$$d_n = n!\cdot\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Demostración:

Realizamos la prueba por el método de inducción.

Si n = 1, $d_1 = 0$ que es $1!\cdot\left[1 - \frac{1}{1!}\right]$.

Consideramos que el resultado se cumple para n = k y veamos que es cierto para n = k + 1..

Por la segunda fórmula [1] de iteración de Euler,

$$d_{k+1} = (k+1)\cdot d_k + (-1)^{k+1} =$$

$$=(k+1)\cdot\left(k!\cdot\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}\right]\right)+(-1)^{k+1}=$$

$$=(k+1)!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right]$$

y la expresión se cumple.

Con este resultado, se ve inmediatamente que el número de desplazamientos de un grupo de seis objetos es:

$$d_6=6!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right]=720-720+360-120+30-6+1=265$$

que es exactamente el resultado que encontramos antes.

De forma análoga, podemos calcular directamente (sin necesidad de iteración) que d_{12} = 176 214 841.

UNIDAD 12: Probabilidad

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 292

1. Un test consta de cuatro preguntas a las que hay que contestar verdadero (V) o falso (F). Si una persona contesta al azar, escribe todas las posibles respuestas que puede obtener.

Utilizando la notación: verdadero (V) o falso (F), las posibles respuestas son:

{(VVVV), (VVVF), (VVFV), (VFVV), (FVVV), (VVFF), (VFVF), (FVFV), (VFFV), (FVVF), (FFVV), (VFFF), (FVFF), (FFVF), (FFFV), (FFFF)}

2. Lanzamos dos dados al aire y anotamos la suma de los puntos de sus caras superiores. ¿Qué es más probable obtener suma 7 u obtener suma 8?

Los sucesos asociados a suma 7 son {(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)} y los asociados a suma 8 son {(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)}.

Por tanto, es más probable sacar suma 7.

3. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara y cruz al lanzar dos monedas?

La probabilidad de obtener cara y cruz es 1/2 · 1/2 · 2 = 1/2

4. Una urna tiene 12 bolas blancas y 8 negras. Sacamos dos bolas, una detrás de otra y devolviendo la primera a la urna, halla la probabilidad de sacar una bola de cada color.

La probabilidad de obtener una bola de cada color es $\frac{12}{20} \cdot \frac{8}{20} \cdot 2 = \frac{12}{25}$

5. En un conservatorio de música el 60% de los alumnos estudian piano, el 50% violín y el 30% ninguno de estos instrumentos. ¿Qué probabilidad hay de elegir un alumno que estudie piano y violín a la vez?

El 70% estudian alguno de estos instrumentos. Por tanto hay un 40% que estudian ambos a la vez.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 307

1. Número irracional. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

La solución queda:

Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{ con a, b } \in \text{ Z y primos entre sí.}$$

De esta igualdad obtenemos: $a = b\sqrt{3}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2 = 3b^2$.

De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces a también lo es.

Podemos escribir a = 3m con $m \in Z$ y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 3b^2$ obtenemos:

$(3m)^2 = 3b^2 \quad \Rightarrow \quad 9m^2 = 3b^2 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 = b^2$

Como b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, b también los es.

Con esto hemos llegado a que a y b son múltiplos de 3. Este resultado contradice el hecho de que a y b son primos entre si. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Implicación lógica. Demuestra que si P $\Rightarrow$ Q, entonces no Q $\Rightarrow$ no P.

Tiene que ser no P, pues si fuera P entonces sería Q, y como dice no Q, no puede ser P.

Veamos que las tablas de verdad de ambas proposiciones coinciden:

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	no Q	no P	no Q $\Rightarrow$ no P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Es una ley lógica $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (no\ Q \Rightarrow no\ P)$, denominada “contraposición”.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 309

1. Una caja tiene 12 bombones, de los cuales 2 son de chocolate blanco y el resto de chocolate negro. Si se cogen 4 bombones al azar y sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que los cuatro sean de chocolate negro.

Si llamamos N a obtener un bombón de chocolate negro, la probabilidad buscada es:

$$P(NNNN) = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{132} = 0{,}4242.$$

2. Una caja contiene 94 tornillos bien construidos y 6 defectuosos. Si se escogen al azar cinco tornillos de la caja, ¿cuáles son las probabilidades de que (i) ninguno sea defectuoso, (ii) todos sean defectuosos e (iii) por lo menos uno sea defectuoso? Da dos grupos de respuestas, uno para extracciones con reemplazamiento y otro para extracciones sin reemplazamiento.

En los casos de las extracciones con reemplazamiento, las probabilidades pedidas son:

(i) $P(ninguno\ defectuoso) = \left(\frac{94}{100}\right)^5 = 0{,}7339.$

(ii) $P(todos\ defectuosos) = \left(\dfrac{6}{100}\right)^5 = 0{,}000\ 000\ 778.$

(iii) $P(por\ lo\ menos\ uno\ sea\ defectuoso) = 1 - \left(\dfrac{94}{100}\right)^5 = 0{,}2661.$

En los casos de las extracciones sin reemplazamiento, las probabilidades pedidas son:

(i) $P\ (ninguno\ defectuoso) = \dfrac{\binom{94}{5}}{\binom{100}{5}} = \dfrac{54\ 891\ 018}{75\ 287\ 520} = 0{,}7291.$

(ii) $P\ (todos\ defectuosos) = \dfrac{\binom{6}{5}}{\binom{100}{5}} = \dfrac{6}{75\ 287\ 520} = 0{,}000\ 000\ 0797.$

(iii) $P(por\ lo\ menos\ uno\ sea\ defectuoso) = 1 - \dfrac{\binom{94}{5}}{\binom{100}{5}} = 1 - 0{,}7291 = 0{,}2709.$

3. Diez amigas están paseando por el parque y encuentran un lugar donde pueden sentarse 4 de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos amigas, por ejemplo Ángela y Berta se sienten juntas?

Los casos posibles son $V_{10,\,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Los casos favorables son $6 \cdot V_{8,\,2} = 6 \cdot 8 \cdot 7 = 336$

La probabilidad de que Ángela y Berta se sienten juntas es: $\dfrac{6 \cdot V_{8,\,2}}{V_{10,\,4}} = \dfrac{336}{5040} = \dfrac{1}{15} = 0{,}0667.$

4. Escribimos, al azar, códigos de 6 signos utilizando rayas y puntos como lo hace el alfabeto Morse. ¿Cuál es la probabilidad de escribir un código con 3 rayas y 3 puntos?

Los casos posibles son $VR_{2,\,6} = 2^6 = 64$.

Los casos favorables son $PR_6^{3,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$

La probabilidad de escribir un código con 3 rayas y 3 puntos es: $\dfrac{PR_6^{3,\,3}}{VR_{2,\,6}} = \dfrac{20}{64} = 0{,}3125.$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 312

1. Encuentra el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Distribución por sexo de los hijos en familias de tres hijos.

b) Suma de los puntos obtenidos al extraer una ficha de un domino.

c) Extracción de dos Cds de una caja que contiene siete en buen estado y tres defectuosos.

Los espacios muestrales pedidos son:

a) E = {(vvv), (vvm), (vmv), (mvv), (vmm), (mvm), (mmv), (mmm)}, siendo v, varón y m, mujer.

b) E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

c) E = {DD, DB, BD, BB} siendo D, defectuoso y B en buen estado.

2. Consideremos el experimento aleatorio de tirar dos dados cúbicos al aire y anotar la suma de los puntos de sus caras superiores. Sean los sucesos: A = "obtener suma múltiplo de 5"; B = "obtener suma mayor que 8" y C = "obtener por suma un número primo". Halla:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cap B \cap C$ **c)** $A \cup B$ **d)** $\overline{A} \cap C$

Los sucesos pedidos tienen por elementos los siguientes:

a) $A \cap B$ = "obtener suma múltiplo de 5 y mayor de 8" = {(4, 6), (6, 4), (5, 5)}.

b) $A \cap B \cap C$ = "obtener suma múltiplo de 5 y mayor de 8 y suma número primo" = {φ}.

c) $A \cup B$ = "obtener suma múltiplo de 5 o mayor de 8" = {(1,4), (2,3), (3,2), (3,6), (4,1), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

d) $\overline{A} \cap C$ = "obtener suma no múltiplo de 5 y número primo" =

= {(1,1), (1,2), (1,6), (2,1), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)}.

3. En el espacio muestral E = {A, B, C}. ¿Cuál de las siguientes funciones es una probabilidad?

a) P (A) = $\frac{1}{3}$**, P (B) =** $\frac{1}{2}$**, P (C) =** $\frac{1}{6}$ **c) P (A) =** $\frac{1}{4}$**, P (B) =** $\frac{1}{2}$**, P (C) =** $\frac{5}{8}$

b) P (A) = 1, P (B) = $-\frac{1}{5}$**, P (C) =** $\frac{1}{5}$

a) Es una probabilidad porque verifica los 3 axiomas.

b) No es una probabilidad pues falla el 2º axioma ya que P (B) = $-\frac{1}{5} < 0$

c) No es una probabilidad pues falla el 1º axioma ya que P (A) + P (B) + P (C) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8} = \frac{11}{8} \neq 1$.

4. En la prueba final de una carrera de atletismo participan cuatro atletas que denotamos por M, C, R y S y solo uno de ellos puede ser el ganador. La probabilidad de que gane M es doble de la de que gane C, la probabilidad de que gane C es triple de la de que gane R y la probabilidad de que gane S es la misma que la de que gane R. ¿Cuál es la probabilidad de ganar C?

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

P (M) = 2 · P (C); P (C) = 3 · P (R) y P (S) = P (R).

Como P (M) + P (C) + P (R) + P (S) = 1, entonces: 6 · P (R) + 3 · P (R) + P (R) + P (R) = 1 y se obtiene:

$$P(R) = \frac{1}{11} = 0{,}0909$$

Por lo tanto, P (C) = $\frac{3}{11} = 0{,}2727$.

5. Un dado tetraédrico esta trucado de modo que la probabilidad de obtener cualquier número es la misma excepto la de obtener un 4 que es doble de cualquiera de las demás. Halla la probabilidad de obtener un cuatro.

Como P (1) + P (2) + P (3) + P (4) = 1 y haciendo P (1) = x, obtenemos:

$$x + x + x + 2x = 1, \text{ es decir, } x = \frac{1}{5}.$$

Por tanto, P (4) = $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

6. En las familias de cuatro hijos, atendiendo al sexo de estos, halla las siguientes probabilidades:

a) Encontrar una familia con dos varones y dos mujeres.

b) Tener una familia con al menos dos varones.

c) Encontrar una familia con una mujer como máximo.

a) P (2 varones y 2 mujeres) = $\frac{6}{16}$ = 0,375

b) P (al menos 2 varones) = $\frac{11}{16}$ = 0,6875

c) P (como máximo 1mujer) = $\frac{5}{16}$ = 0,3125

7. Sean A y B dos sucesos tales que P (A) = $\frac{1}{4}$, P (B) = $\frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$. Halla:

a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(\overline{A \cap B})$ **c)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ **d)** $P(A \cap \overline{B})$

a) $P\left(A \cap B\right)$ = P (A) + P (B) - $P\left(A \cup B\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$

b) $P\left(\overline{A \cap B}\right)$ = $1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$

c) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ = $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\,(A \cup B) = \frac{7}{12}$

d) $P\left(A \cap \overline{B}\right)$ = P (A) - $P\left(A \cap B\right)$ = $\frac{1}{12}$

8. Lanzamos tres monedas al aire. Halla la probabilidad de no obtener ninguna cara y la de obtener dos caras y una cruz.

El espacio muestral asociado al experimento de lanzar tres monedas al aire es:

E = {(ccc), (ccx), (cxc), (xcc),(cxx), (xcx), (xxc), (xxx)} siendo c = cara y x = cruz.

Las probabilidades pedidas son:

P (no obtener ninguna cara) = P (tres cruces) = $\frac{1}{8}$.

P (obtener 2 caras y 1 cruz) = $\frac{3}{8}$.

9. Se consideran dos sucesos incompatibles X e Y asociados a un determinado experimento aleatorio y tal que P (X) = $\frac{2}{5}$ y P (Y) = $\frac{1}{2}$. Halla:

a) $P\left(X \cup Y\right)$ **b)** $P\left(X \cup \overline{Y}\right)$ **c)** $P\left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right)$ **d)** $P\left(\overline{X \cup Y}\right)$

Como los sucesos son incompatibles se verifica que $P\left(X \cap Y\right) = 0$. Utilizando las propiedades de la probabilidad y las leyes de Morgan obtenemos:

a) $P\left(X \cup Y\right)$ = P (X) + P (Y) - $P\left(X \cap Y\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

b) $P\left(X \cup \overline{Y}\right)$ = $P\,(X) + P\,(\overline{Y}) - P\left(X \cap \overline{Y}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - P\,(X) = \frac{1}{2}$

c) $P\left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right)$ = $P\,(\overline{X \cap Y}) = 1$

d) $P\left(\overline{X \cup Y}\right)$ = $1 - P\,(X \cup Y) = \frac{1}{10}$

10. El 75% de los alumnos de un instituto practican algún deporte, el 30% tocan un instrumento musical y el 15% hacen deporte y tocan un instrumento musical. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno que no realiza ninguna de estas actividades? ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno que practique algún deporte y no toque ningún instrumento musical?

Llamamos D a hacer deporte y M a instrumento musical. Las condiciones del enunciado son:

P (D) = 0,75; P (M) = 0,30 y $P\left(D \cap M\right) = 0{,}15$

Utilizando las propiedades de la probabilidad obtenemos:

La probabilidad de elegir un alumno que no realiza ninguna de estas actividades, es:

$$P\left(\overline{D} \cap \overline{M}\right) = P(\overline{D \cup M}) = 1 - (0{,}75 + 0{,}30 - 0{,}15) = 0{,}10$$

La probabilidad de elegir un alumno que practique algún deporte y no toque ningún instrumento musical, es:

$$P\left(D \cap \overline{M}\right) = P\,(D) - P\,(D \cap M) = 0{,}75 - 0{,}15 = 0{,}60$$

11. Una urna tiene 12 monedas de oro, 8 de plata y 5 de cobre. Halla la probabilidad de que al extraer dos monedas, una detrás de la otra y sin devolver la primera a la urna, salgan del mismo material.

P (dos de igual material) = P (dos oro) + P (dos plata) + P (dos cobre) =

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{208}{600} = \frac{26}{75} = 0{,}347$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 313

12. De una baraja española de 40 cartas sacamos 3 cartas una detrás de la otra y sin reintegrar las cartas al mazo. Halla las siguientes probabilidades:

a) De sacar tres bastos.

b) De sacar dos bastos y una espada.

c) De sacar una carta de cada palo.

a) P (tres bastos) = $\dfrac{V_{10,3}}{V_{40,3}} = \dfrac{720}{59280} = 0{,}012$

b) P (dos bastos y una espada) = $\dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{10}{38} \cdot 3 = \dfrac{2700}{59280} = 0{,}046$

c) P (una de cada palo) = $\dfrac{V_{10,1} \cdot V_{10,1} \cdot V_{10,1}}{V_{40,3}} \cdot V_{4,3} = \dfrac{12000}{59280} = 0{,}2024$

13. Una bolsa tiene 8 bolas blancas, 6 rojas y 12 negras. Extraemos dos bolas al azar, una detrás de la otra y devolviendo la primera a la bolsa, halla la probabilidad de que:

a) Ambas sean blancas.

c) Ambas sean del mismo color.

b) Una sea blanca y la otra negra.

d) Ambas sean de distinto color.

a) $P\text{ (dos bolas blancas)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{8}{26} = \frac{16}{169} = 0{,}0947$

b) $P\text{ (una blanca y una negra)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{12}{26} \cdot 2 = \frac{48}{169} = 0{,}2840$

c) $P\text{ (dos bolas de distinto color)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{8}{26} + \frac{6}{26} \cdot \frac{6}{26} + \frac{12}{26} \cdot \frac{12}{26} = \frac{61}{169} = 0{,}3609$

d) $P\text{ (dos bolas blancas de distinto color)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{6}{26} \cdot 2 + \frac{8}{26} \cdot \frac{12}{26} \cdot 2 + \frac{6}{26} \cdot \frac{12}{26} \cdot 2 = \frac{108}{169} = 0{,}6391$

14. Una urna de elecciones tiene 40 papeletas en blanco, 75 nulas y 60 válidas. Extraemos tres papeletas sin reintegrar las primeras a la urna. Halla la probabilidad:

a) De sacar tres papeletas válidas.

b) De sacar una papeleta de cada tipo.

a) P (tres papeletas válidas) = $\frac{60}{175} \cdot \frac{59}{174} \cdot \frac{58}{173} = \frac{236}{6055} = 0{,}0390$

b) P (una de cada tipo) = $\frac{40}{175} \cdot \frac{75}{174} \cdot \frac{60}{173} \cdot 6 = 0{,}2050$

15. Lanzamos un dado en forma de icosaedro. ¿Son independientes los sucesos obtener múltiplo de cinco y sacar múltiplo de cuatro?

Las probabilidades pedidas son:

P (múltiplo de 5) = 1/5; P (múltiplo de 4) = 1/4 y P (múltiplo de 5 y de 4) = 1/20

Por lo tanto, esos sucesos son independientes pues:

P (múltiplo de 5 y de 4) = P (múltiplo de 5) · P (múltiplo de 4)

16. Determina si los sucesos A y B son dependientes o independientes, compatibles o incompatibles, siendo:

a) P (A) = $\frac{2}{5}$**, P (B) =** $\frac{3}{4}$ **y** $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$ **b) P (A) =** $\frac{1}{3}$**, P (B) =** $\frac{1}{2}$ **y** $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$**.**

a) $P(A \cap B)$ = P (A) + P (B) - $P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{17}{20} = \frac{3}{10}$ y como $P(A \cap B)$ = P (A) · P (B), estos sucesos son compatibles e independientes.

b) $P\left(A \cap B\right)$ = P (A) + P (B) - $P\left(A \cup B\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = 0$ y como $P\left(A \cap B\right)$ $\neq$ P (A) $\cdot$ (B), estos sucesos son incompatibles y dependientes.

17. Disponemos de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas rojas y 3 azules; la urna B contiene 3 bolas rojas y 5 azules. Lanzamos el dado al aire y si el número obtenido es mayor que 4 sacamos bola de la urna A y en caso contrario de la B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola azul?

La probabilidad es P (bola azul) = $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} = 0{,}5417$

18. Un cofre metálico tiene 9 monedas de 1 € y 12 de 2 €; otro de madera tiene 6 monedas de 2 € y 8 de 1 €. Se elige un cofre y se sacan sucesivamente dos monedas. Halla:

a) La probabilidad de sacar dos monedas de 2 €.

b) La probabilidad de sacar dos monedas del mismo valor.

c) La probabilidad de sacar dos monedas de distinto valor.

a) P (2 monedas de 2€) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}2396$

b) P (2 monedas igual valor) = P (2 monedas de 1 €) + P (2 monedas de 2 €) =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}4759$$

c) P (2 monedas distinto valor) = 2 · (1 moneda de 2 € y 1 moneda de 1 €) =

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{12}{20} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} = 0{,}5209$$

Otra forma de hacer este apartado es: P (2 monedas distinto valor) = 1 – P (2 monedas igual valor).

19. Dos amigos juegan a obtener la puntuación más alta lanzando cada uno su dado, el uno es blanco y el otro es verde. El dado blanco tiene cuatro caras con la puntuación 4 y dos caras con la puntuación 6. El dado verde tiene dos caras con la puntuación 4, tres caras con puntuación 6 y la otra con puntuación 2. ¿Qué amigo crees que tiene más probabilidad de ganar?

P (ganar el del dado blanco) = P (4 blanco y 2 verde) + P (6 blanco y 4 verde o 2 verde) =

$$= \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{36} = 0{,}2778$$

P (ganar el del dado verde) = P (4 blanco y 6 verde) = $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = 0{,}3333$

Tiene más posibilidades de ganar el del dado verde.

20. La probabilidad de que un tirador haga blanco en una diana es 2/3 y que su amigo haga blanco en la misma diana es 4/5. Lanzan los dos un dardo cada uno sobre la diana, halla la probabilidad de que ambos hagan blanco ¿Y de que solo haga blanco uno de ellos?

Las probabilidades pedidas son:

a) $P\ (ambos\ acierten) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = 0{,}5333$.

b) $P\ (uno\ solo\ nbos\ acierte) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$

21. Un banco tiene dos sistemas de alarma. La probabilidad de que funcione la primera es 0,4, de que funcione la segunda es 0,3 y de que se funcionen ambas es 0,15. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna de las dos funcione? ¿Y de que no funcione ninguna de las dos? ¿Y de que solo funcione una de ellas?

Llamamos A y B a los sistemas de alarma. Tenemos que P (A) = 0,4; P (B) = 0, 3 y P (A $\cap$ B) = 0,15.

Las probabilidades pedidas son:

P (alguna funcione) = $P\left(A \cup B\right) = P\ (A) + P\ (B) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}55$

P (no funcione ninguna) = $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

P (solo funcione una) =

$$= P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\ (A) + P\ (B) - 2 \cdot P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 + 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}15 = 0{,}4$$

22. Una persona se presenta a una prueba de selección para obtener un trabajo en una auditoria. La prueba consiste en responder a un tema elegido entre 4 temas. Esta persona se sabe 50 de los 80 temas que le piden, ¿qué probabilidad tiene de conseguir el puesto?

La probabilidad pedida es:

$$P\left(conseguir\ el\ puesto\right) = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{80}{4}} = 0{,}1456$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 314

1. Un cartero reparte 3 cartas aleatoriamente entre sus 3 destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las 3 cartas llegue a su destino correcto.

La probabilidad es P (al menos una de las tres) = 2/3.

2. Los dos sucesos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, 0,5. La probabilidad de que ocurran los dos a la vez es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos?

La probabilidad pedida es:

$$P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = P\,(\overline{X \cup Y}) = 1 - P\left(X \cup Y\right) = 1 - \left[P\,(X) + P\,(Y) - P\,(X \cap Y)\right] = 0{,}3$$

3. Se presentan tres partidos políticos (A, B y C) a unas elecciones con un único partido ganador. La probabilidad de que gane B es el doble de la probabilidad de que gane A, mientras que la probabilidad de que gane C es el triple de la probabilidad de que gane B, ¿Qué probabilidad tiene C de ganar las elecciones?

Tenemos que P (B) = 2 · P (A); P(C) = 3 · P (B) = 6 · P (A).

Como sabemos que P (A) + P (B) + P (C) = 1; entonces P (A) = 1/9 de modo que P (C) = 2/3.

4. En una localidad hay solamente dos supermercados, A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos. Se elige un ciudadano al azar, halla la probabilidad de que:

a) Compre en alguno de estos supermercados.

b) No compre en ninguno de estos supermercados.

c) Compre solamente en uno de estos supermercados.

a) La probabilidad de que compre en alguno de estos supermercados es:

$$P\left(A \cup B\right) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B) = 0{,}81$$

b) La probabilidad de que no compre en ninguno de estos supermercados es:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\,(\overline{A \cup B}\,) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$$

c) La probabilidad de que compre solo en uno de estos supermercados es:

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\,(A) + P\,(B) - 2\,P\,(A \cap B) = 0{,}69$$

5. La probabilidad de que un alumno de Bachillerato apruebe Matemáticas es 0,5, de que apruebe Inglés es 0,375 y de que no apruebe ninguna es 0,25.

a) Halla la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.

b) Calcula la probabilidad de que apruebe las dos asignaturas.

Tenemos que $P\left(\overline{M} \cap \overline{I}\right) = P\,(\overline{M \cup I}) = 0{,}25$. Las probabilidades pedidas son:

a) P (al menos una de las dos) = $P\left(M \cup I\right) = 0{,}75$

b) P (apruebe ambas) = $P\left(M \cap I\right) = P\,(M) + P\,(I) - P\,(M \cup I) = 0{,}125$

6. A tres amigos les toca en un sorteo una sola entrada para un espectáculo musical. Para decidir quién se queda con la entrada la ponen en una bolsa con dos tarjetas en blanco y los tres van sacando, uno detrás de otro, un papel de la bolsa. ¿Quién tiene ventaja, el primero que saca, el segundo o el tercero?

Las probabilidades de cada uno son:

P (1º) = 1/3; P (2º) = 2/3 · 1/2 = 1/3 y P (3º) = 2/3 · 1/2 · 1 = 1/3. Ninguno tiene ventaja.

7. Disponemos de dos llaveros uno de metal con 8 llaves grandes y 4 llaves pequeñas y otro de plástico con 6 llaves grandes y 2 pequeñas. Sacamos una llave, al azar, del llavero de metal y sin mirarla la metemos en el de plástico. Después sacamos una llave del llavero de plástico. Halla la probabilidad de sacar una llave grande.

La probabilidad es P (llave grande del llavero de plástico) = $\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{9}+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{9}=0{,}7407$

8. Una urna tiene 6 bolas blancas y n bolas negras. Extraemos dos bolas de la urna, una detrás de la otra y sin devolver la primera a la urna. Halla el número de bolas negras si sabemos que la probabilidad de extraer dos bolas blancas es 1/3.

Llamamos n a las bolas negras que hay en la urna. Sabemos que $\frac{6}{6+n}\cdot\frac{5}{5+n}=\frac{1}{3}$; resolviendo esta ecuación obtenemos que n = 4. La urna tiene 4 bolas negras.

9. Andrés va andando al Instituto. La probabilidad de que un día determinado llueva es 1/5. Si no llueve, la probabilidad de que no llegue puntual a clase es 2/9 y si llueve la probabilidad de que no llegue puntual es 2/7. Halla la probabilidad de que un día determinado no llegue puntual a clase.

La probabilidad es P (no puntual) = $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9}=0{,}2730$

10. En una determinada Universidad el 60% de los estudiantes de la facultad de Económicas son chicas y el 55% de los estudiantes de la facultad de Derecho son chicos. Se elige, al azar, un estudiante de cada facultad para que representen a las mismas ante el rectorado de la universidad. Halla el porcentaje de que:

a) Ambos sean chicas.

b) Sean un chico y una chica.

Los porcentajes pedidos son:

a) P (ambas chicas) = 0,60 · 0,45 = 0,27; luego en el 27% de los casos son las dos chicas.

b) P (un chico y una chica) = 0,40 · 0,45 + 0,60 · 0,55 = 0,51; luego en el 51% de los casos son un chico y una chica.

11. Sean A y B dos sucesos independientes. Sea P (A) = $\frac{3}{7}$ y $P\left(A\cup B\right)=\frac{5}{7}$. Halla P (B) y $P\left(\overline{A}\cap B\right)$.

Como A y B son independientes entonces $P\left(A\cap B\right)=P\,(A)\cdot P\,(B)=\frac{3}{7}\cdot P\,(B)$ y además:

$$P\left(A \cup B\right) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{3}{7} + P\,(B) - \frac{3}{7} \cdot P\,(B) \Rightarrow P\,(B) = \frac{1}{2}$$

y $P\left(\overline{A} \cap B\right)$ = P (B) - $P\left(A \cap B\right) = \frac{2}{7}$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 315

La paradoja del cumpleaños

Una *paradoja* es un enunciado que tiene apariencia verdadera pero que, analizándolo en detalle, lleva a una situación que contradice el sentido común. La teoría de la probabilidad es un campo de las matemáticas extremadamente rico en paradojas. Algunas paradojas reciben el nombre de su creador: Bertarnd, Blyth, Yule-Simpson, Monty Hall, etc. y otras el del tema al que hacen referencia.

Entre estas últimas una de las paradojas más conocidas y curiosas es la paradoja del cumpleaños, aunque en sentido estricto no es una paradoja ya que no presenta contradicción lógica, pero si es una paradoja en el sentido de que es una verdad matemática que contradice la intuición común.

Su enunciado puede ser uno de los siguientes:

● ***¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de n personal al menos dos de ellas cumplan años el mismo día?***

● ***¿Cuál es el número mínimo de personas que tiene que haber para que el porcentaje de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día sea mayor del 50%?***

Si se plantean estas preguntas a un grupo de personas piensan que la probabilidad es pequeñísima a no ser que hubiera en el grupo al menos 360/2 = 180 personas y así la posibilidad de encontrar al menos dos que cumplan años el mismo día será un número mayor que el 50%. Pero en la realidad con menos personas ya se cumple el enunciado, esta es la razón de que se considere una paradoja que contradice lo que la intuición nos indica.

Investiga sobre esta paradoja y haz un estudio matemático de la misma.

Consideramos el año de 365 días, no tenemos en cuenta los años bisiestos ni las personas que son mellizas. Estos serían otros problemas.

a) Vamos a solucionar el primer enunciado:

Llamamos A al suceso "al menos dos cumplen los años el mismo día" y vamos a considerar el suceso contrario $\overline{A}$ es decir el suceso "no existen dos personas que cumplan años el mismo día"

Vamos a simplificar el problema para verlo mejor:

● Supongamos que tenemos n = 1 persona. P (A) = 0

● Supongamos que tenemos n = 2 personas. $P(\overline{A}) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365} = \frac{V_{365,\,2}}{VR_{365,\,2}}$; $P(A) = 1 - \frac{V_{365,\,2}}{VR_{365,\,2}}$

● Supongamos que tenemos n = 3 personas. $P(\overline{A}) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365} = \frac{V_{365,\,3}}{VR_{365,\,3}}$; $P(A) = 1 - \frac{V_{365,\,3}}{VR_{365,\,3}}$

● Supongamos que tenemos n = 5 personas. $P(\overline{A}) = \frac{V_{365,\,5}}{VR_{365,\,5}}$; $P(A) = 1 - \frac{V_{365,\,5}}{VR_{365,\,5}}$

● Para n personas: $P(\overline{A}) = \frac{V_{365,n}}{VR_{365,n}}$; $P(A) = 1 - \frac{V_{365,\,n}}{VR_{365,\,n}} = \frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$

Esta es la fórmula que nos da la probabilidad de que en un grupo de n personas al menos dos de ellas cumplan años el mismo día.

b) A partir de la fórmula anterior mediante un programa de ordenador construimos la siguiente tabla:

Personas	5	10	15	20	23	25	27	30	40	50	80
Probabilidad	0,027	0,117	0,25	0,411	0,507	0,569	0,627	0,814	0,891	0,97	0,999

Y la gráfica que se ajusta a ella es:

Por lo cual el número mínimo de personas que tiene que haber para que la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es sea mayor del 50% es de 23 personas.

UNIDAD 13: Probabilidad condicionada

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 316

1. Lanzamos un dado al aire y observamos su cara superior. Si sabemos que ha salido número par, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido un 6?

La probabilidad es P (salga 6/ par) = 1/3.

2. Una caja de herramientas tiene 20 tacos de 6 mm, 21 de 8 mm y 12 de 9 mm. Sacamos sin mirar dos tacos y salen uno de 9 mm y otro de 8mm. Después se saca otro taco ¿es más probable que sea de 6, de 8 o de 9 mm?

Es igual de probable que salga un taco de 6 mm o uno de 8 mm, con probabilidad $\frac{20}{51} = 0,3922$ y esta probabilidad es mayor que la probabilidad de que salga de 9 mm, que es $\frac{11}{51} = 0,2157$.

3. Disponemos de dos barajas una española de 40 cartas y la otra francesa de 52 cartas. Elegimos una baraja al azar y sacamos una carta. Halla la probabilidad de sacar un rey.

La probabilidad es P (rey) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{52} = \frac{23}{260} = 0,0885$.

4. A un examen de acceso a la Universidad acuden 120 alumnos de un instituto y 80 alumnos de un colegio. La probabilidad de pasar el examen los alumnos del instituto es del 85% y los del colegio 80%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda el examen?

4. La probabilidad es P (suspende) = $\frac{120}{200} \cdot \frac{15}{100} + \frac{80}{200} \cdot \frac{20}{100} = \frac{17}{100} = 0,17$.

5. Una urna tiene 8 bolas rojas y 6 bolas blancas. Se saca una bola al azar y se sustituye por tres del mismo color, después se saca otra bola, ¿cuál es la probabilidad de que esta última sea blanca?

La probabilidad es P (blanca) = P (1ª roja) · P (2ª blanca) + P (1ª blanca) · P (2ª blanca) =

$$= \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{16} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{16} = \frac{3}{7} = 0,4286$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 327

1. Matrices. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**. Demuestra que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.**

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 vemos que la igualdad es cierta, pues A = 3^{0} · A.

● Para n = 2 calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$.

● Suponemos que es cierta para n = p: $A^p = 3^{p-1} \cdot A$, hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, es decir, hemos de probar que $A^{p+1} = 3^p \cdot A$.

Para ello calculamos esta matriz $A^{p+1} = A^p \cdot A = 3^{p-1} \cdot A \cdot A = 3^{p-1} \cdot 3 \cdot A = 3^p \cdot A$, que es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

2. Múltiplo de 5. Demuestra que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de n.

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 vemos que la igualdad es cierta, pues $1^5 - 1 = 0$ es múltiplo de 5.

● Para n = 2, tenemos $2^5 - 2 = 30$, que se múltiplo de 5.

● Suponemos que es cierta para n = p, $p^5 - p$ es múltiplo de 5.Hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, es decir, hemos de probar que $(p + 1)^5 - (p + 1)$ es múltiplo de 5.

Para ello operamos y obtenemos:

$$(p + 1)^5 - (p + 1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 = (p^5 - p) + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p)$$

La última expresión es suma de dos múltiplo de 5, por tanto, es múltiplo de 5.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

3. Suma de cubos. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 la igualdad es cierta: $1^3 = \frac{1^2\,(1+1)^2}{4}$.

● Para n = 2, la igualdad es cierta: $1^2 + 2^3 = \frac{2^2\,(2+1)^2}{4}$.

● Suponemos que es cierta para n = p, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 = \frac{p^2\,(p+1)^2}{4}$$

Hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, hemos de probar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

Para ello, utilizamos lo anterior y obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2\,(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 =$$

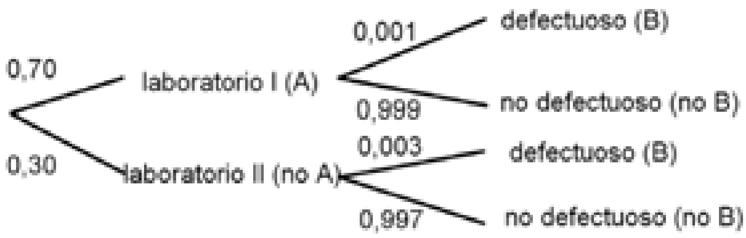
$$= (p+1)^2 \left(\frac{p^2}{4} + p + 1 \right) = \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 329

1. Dos laboratorios I y II, que trabajan para una misma marca comercial, fabrican medicamentos que presentan algún defecto con probabilidades del 1 por mil y del 3 por mil respectivamente. Un hospital se abastece de medicamentos que provienen el 70% del laboratorio I y el 30% del laboratorio II. En una investigación realizada en el hospital se observa un medicamento y resultó ser defectuoso. ¿Qué probabilidad hay de que provenga del laboratorio I?

Con la información del enunciado podemos construir el diagrama de árbol:



Esta información puede colocarse en la tabla de contingencia:

	Laboratorio I	Laboratorio II
defectuoso	0,0007	0,0009
no defectuoso	0,6993	0,2991

La probabilidad pedida es:

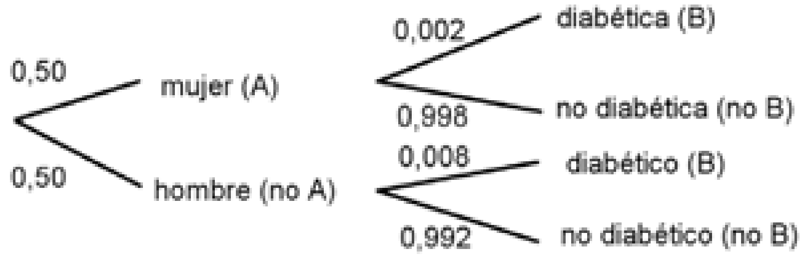
$$P(laboratorio\ I\ si\ defectuoso) = \frac{0{,}0007}{0{,}0007 + 0{,}0009} = 0{,}4375$$

Esta probabilidad, y otras, pueden verse en la imagen que sigue.

	A	B	C	D	E	F	G
1	TABLA DE CONTINGENCIA					PROBABILIDADES TOTALES	
2		Lab I	Lab II	TOTAL		P(Lab I)=	0,7000
3	defectuoso	0,0007	0,0009	0,0016		P(Lab II)=	0,3000
4	no defectuoso	0,6993	0,2991	0,9984		P(defec)=	0,0016
5	TOTAL	0,7	0,3	1		P(no defec)=	0,9984
6							
7	PROBABILIDADES CONDICIONADAS						
8	P(Lab I si defec)=	0,4375		P(defec si Lab I)=	0,0010		
9	P(Lab II si defec)=	0,5625		P(no defec si Lab I)=	0,9990		
10	P(Lab I si no defec)=	0,7004		P(defec si Lab II)=	0,0030		
11	P(Lab II si no defec)=	0,2996		P(no defec si Lab II)=	0,9970		

2. En cierta región se ha hecho un estudio sobre la diabetes y se ha encontrado que 8 de cada mil hombres y una de cada 500 mujeres padece diabetes. Se elige una persona al azar y se sabe que presenta diabetes. ¿Qué probabilidad hay de que se trate de una mujer?, ¿y que se trate de un hombre?

Con la información del enunciado podemos construir el diagrama de árbol:



Esta información puede colocarse en la tabla de contingencia:

	mujer	hombre
diabético	0,001	0,004
no diabético	0,499	0,496

Las probabilidades pedidas son:

$$P(mujer\ si\ diabética) = \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}004} = 0{,}2$$

$$P(\text{hom}bre\ si\ diabético) = \frac{0{,}004}{0{,}001 + 0{,}004} = 0{,}8$$

Esta probabilidad, y otras, pueden verse en la imagen que sigue.

	A	B	C	D	E	F	G
1	TABLA DE CONTINGENCIA					PROBABILIDADES TOTALES	
2		mujer	hombre	TOTAL		P(mujer)=	0,5000
3	diabético	0,001	0,004	0,005		P(hombre)=	0,5000
4	no diabético	0,499	0,496	0,995		P(diabét)=	0,0050
5	TOTAL	0,5	0,5	1		P(no diabét)=	0,9950
6							
7	PROBABILIDADES CONDICIONADAS						
8	P(mujer si diabét)=	0,2000		P(diabét si mujer)=	0,0020		
9	P(hombre si diabét)=	0,8000		P(no diabét si mujer)=	0,9980		
10	P(mujer si no diabét)=	0,5015		P(diabét si hombre)=	0,0080		
11	P(hombre si no diabét)=	0,4985		P(no diabét si hombre)=	0,9920		

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 332

1. Sean los sucesos A y B tales que P (A) = $\frac{1}{5}$, P (B) = $\frac{2}{3}$ y $P\left(A \cup B\right) = \frac{3}{5}$. Halla:

a) $P\left(A/B\right)$ **b)** $P\left(\overline{A}/B\right)$ **c)** $P\left(B/\overline{A}\right)$

Las probabilidades pedidas son:

a) $P\left(A/B\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{5}$

b) $P\left(\overline{A}/B\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \dfrac{\frac{2}{3}-\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

c) $P\left(B/\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{\frac{2}{3}-\frac{4}{15}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{2}$

2. Sean X e Y dos sucesos tales que P(X) = $\frac{4}{9}$, P (Y / X) = $\frac{1}{2}$ y P(X $\cup$ Y) = $\frac{13}{18}$.

a) Halla P (X ∩ Y).

b) Halla P (Y).

c) ¿Son dependientes o independientes los sucesos X e Y?

Las probabilidades son:

a) $P\left(Y/X\right) = \dfrac{P\,(Y \cap X)}{P\,(X)} \quad \Rightarrow \quad P\,(Y \cap X) = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

b) P (Y) = P (X $\cup$ Y) + P (X $\cap$ Y) – P(X) = $\frac{1}{2}$

c) Como P (X $\cap$ Y) = P (X) · P (Y), los sucesos X e Y son independientes.

3. Extraemos una ficha de un dominó y sumamos los puntos que aparecen en ella. Sabiendo que suman 6 puntos ¿cuál es la probabilidad de que aparezca un 2?

La probabilidad es P (un 2/ con suma 6) = $\frac{P\left(un\ 2\ y\ suma\ 6\right)}{P\left(suma\ 6\right)} = \frac{\frac{1}{28}}{\frac{4}{28}} = \frac{1}{4}$

4. De una baraja española de 52 cartas extraemos 3 cartas, una detrás de otra y sin devolver la anterior a la baraja. Halla la probabilidad de que salgan:

a) Dos oros y un basto.

b) Tres figuras.

c) Tres cartas de distinto palo.

Las probabilidades son:

a) P (2 oros y 1 basto) = $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} \cdot 3 = \frac{3}{68} = 0{,}0441$

b) P (3 figuras) = $\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{10}{50} = \frac{11}{1105} = 0{,}0100$

c) P (3 cartas de distinto palo) = $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50} \cdot 24 = \frac{169}{425} = 0{,}3976$

5. Lanzamos dos dados al aire y anotamos los números de sus caras superiores. Si se sabe que en uno de ellos salió un 5, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de sus puntos, en valor absoluto, sea 2?

La probabilidad es P (diferencia 2/ ha salido un 5) = $\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11} = 0{,}1818$

6. ¿Son independientes los sucesos sacar figura y sacar una copa al sacar una carta de una baraja española de 40 cartas?

Tenemos que P (sacar figura) = 12/40; P (sacar copa) = 10/40 y P (sacar figura $\cap$ copas) = 3/40.

Como P (sacar figura $\cap$ copas) = P (sacar figura) · P (sacar copa), entonces los sucesos son independientes.

7. En un parque de atracciones hay, un día determinado, doble número de mujeres que de hombres. Hay niños, jóvenes y adultos que se distribuyen según la siguiente tabla:

	NIÑOS	JÓVENES	ADULTOS	TOTAL
MUJERES	80		50	
HOMBRES		30		
TOTAL			70	300

a) Completa la tabla en tu cuaderno.

b) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un niño o una niña?

c) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre adulto?

a) La tabla queda como sigue imponiendo las condiciones del problema:

	NIÑOS	JÓVENES	ADULTOS	TOTAL
MUJERES	80	70	50	200
HOMBRES	50	30	20	100
TOTAL	130	100	70	300

b) La probabilidad es P (niño) = 130/300 = 0,4333

c) La probabilidad es P (hombre adulto) = 20/300 = 0,0667

8. En la escuela de idiomas de cierto país hay una clase con 38 alumnos de los cuales 26 hablan español como primera lengua y de ellos 8 no son sudafricanos. El resto de alumnos hablan inglés como primera lengua y de ellos 10 no son sudafricanos. Se elige un alumno al azar y es sudafricano ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés como primera lengua?

Hacemos esta tabla con los datos del problema:

	Sudafricanos	No sudafricanos	TOTAL
Español	18	8	26
Inglés	2	10	12
TOTAL	20	18	38

La probabilidad es P (habla inglés/ sudafricano) = 2/20 = 0,1

9. En un club deportivo el 56% de los socios practican natación. Sabiendo que los 2/5 de los socios son mujeres y que de ellas nadan el 40%. Halla:

a) La probabilidad de elegir un socio que sea mujer y no nade.

b) La probabilidad de elegir una persona no nadadora.

c) Sabiendo que hemos elegido un hombre ¿cuál es la probabilidad de que sea nadador?

Hacemos esta tabla con los datos del problema:

	Natación	**No natación**	**Total**
Mujeres	16	24	40
Hombres	40	20	60
Total	56	44	100

Las probabilidades pedidas son:

a) P (mujer y no natación) = 24/100 = 0,24

b) P (persona no nadadora) = 44/100 = 0,44

c) P (nadador/ hombre) = 40/60 = 0,6667

10. Una empresa compra 120 ordenadores de los que 50 son Mac y el resto PC. Hay 12 que no funcionan de los que 3 son PC. Halla:

a) La probabilidad de elegir un ordenador que sea Mac y funcione.

b) La probabilidad de elegir un ordenador que funcione.

c) Sabiendo que hemos elegido un ordenador que funciona ¿cuál es la probabilidad de que sea PC?

Hacemos esta tabla con los datos del problema:

	Mac	**PC**	**Total**
Funcionan	41	67	108
No funcionan	9	3	12
Total	50	70	120

Las probabilidades son:

a) P (Mac y funcione) = 41/120 = 0,3417

b) P (funciona) = 108/120 = 0,9

c) P (PC/ funciona) = 67/108 = 0,6204

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 333

11. Tres fabricas A, B, C producen respectivamente el 45%, el 30% y el 25% del total de cierta pieza de automóvil. Los porcentajes de piezas defectuosas en la producción son del 4%, el 5% y el 6% respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que cierta pieza no sea defectuosa?

La probabilidad es P (no defectuosa) = 0,45 · 0,96 + 0,30 · 0,95 + 0,25 · 0,94 = 0,952.

12. En una universidad hay 3 facultades Medicina, Veterinaria y Químicas. En total hay 2000 alumnos matriculados de los que 900 son chicos. En la facultad de Medicina hay un 20% del total de los alumnos y de ellos 50 son chicos. En la de Veterinaria hay 500 chicas y 350 chicos. Se elige un alumno al azar.

a) Halla la probabilidad de que sea una chica que estudie Químicas.

b) ¿Qué porcentaje de chicas estudian en la facultad de Veterinaria?

c) Si hemos elegido un alumno de Medicina, ¿probabilidad que sea una chica?

Completamos la tabla con los datos del problema:

	Medicina	Veterinaria	Químicas	Total
Chicas	350	500	250	1100
Chicos	50	350	500	900
Total	400	850	750	2000

Las probabilidades pedidas son:

a) P (Chica de Químicas) = 250/2000 = 0,125.

b) P (En Veterinaria % de chicas) = 500/1100 = 0,4545; el 45,45% de las chicas estudian Veterinaria.

c) P (Chica/Medicina) = 350/400 = 0,875.

13. Un establecimiento comercial dispone en el almacén de 300 unidades del producto A, 600 del producto B y 100 del producto C. La probabilidad de que una unidad sea defectuosa sabiendo que es del producto A es 0,2, de que lo sea sabiendo que es del producto B es 0,15 y que seas defectuosa sabiendo que procede de C es 0,3. Sabiendo que hemos elegido una unidad defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que proceda de C?

La probabilidad es $P\left(C/Defec\right)=\dfrac{0{,}1\cdot 0{,}3}{0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}15}=0{,}1667$

14. En una Universidad hay 400 estudiantes de los que 100 son chicos. Hay 110 que hablan francés de los que 105 son chicas. Elegida una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico que no hable francés? Si hemos elegido un estudiante que no habla francés ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Con los datos del problema completamos este cuadro:

	Chicos	Chicas	Total
Hablan francés	5	105	110
No hablan francés	95	185	290
Total	100	300	400

Las probabilidades son:

P (chico que no hable francés) = 95/400 = 0,2375.

P (chica/no francés) = 185/290 = 0,6379.

15. En una clase hay 7 calculadoras gráficas y 3 programables. La probabilidad de que en una sesión de trabajo se agoten las pilas en las primeras es 0,05 y en las segundas 0,02.

a) Elegida una calculadora al azar, halla la probabilidad de que se agoten las pilas.

b) Sabiendo que a una calculadora que no se le han agotado las pilas, ¿qué probabilidad hay de que fuera una calculadora gráfica?

Las probabilidades son:

a) P (se agoten las pilas) = $\frac{7}{10}\cdot 0,05+\frac{3}{10}\cdot 0,02=0,041$

b) P (gráfica/no se han agotado las pilas) = $\frac{0,7\cdot 0,95}{0,959}=0,6934$

16. El Ayuntamiento de una ciudad ha inaugurado una nueva piscina cubierta. Se pasa una encuesta a 2000 personas sobre si las instalaciones de la piscina son o no adecuadas. A un 35 % de los encuestados no les parecen adecuadas. De los 2000 encuestados, 1600 viven habitualmente en la ciudad. Además, el porcentaje de los que viven en la ciudad y les han parecido adecuadas es del 60 %.

a) Si se elige una encuesta ¿cuál es la probabilidad de que le parezca adecuada la piscina y viva en la ciudad?

b) Si hemos elegido una encuesta de una persona que no vive habitualmente en la ciudad ¿cuál es la probabilidad de que no le parezcan adecuadas las instalaciones de la piscina?

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

	Viven habitualmente	No viven habitualmente	Total
Adecuadas	960	340	1300
No adecuadas	640	60	700
Total	1600	400	2000

Las probabilidades pedidas son:

a) P (Adecuada y viva) = $\frac{960}{2000}=0,48$

b) P (No adecuadas/ no vive) = $\frac{60}{400} = 0{,}15$

17. Un alumno va a clase el 85% de los días en autobús y el resto en coche con sus padres. Cuando va en autobús llega tarde a clase el 30% de los días. Cuando va con sus padres llega puntual 60% de los días. Halla:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día llegue tarde?

b) Si un día llega puntual ¿cuál es la probabilidad de que haya ido en autobús?

Las probabilidades son:

a) P (llegue tarde) = 0,85 · 0,30 + 0,15 · 0,40 = 0,315.

b) P (autobús/ llega puntual) = $\frac{0{,}85 \cdot 0{,}70}{1 - 0{,}315} = 0{,}8686$.

18. Una moneda esta trucada de forma que la probabilidad de sacar cara es triple que la de cruz. Lanzamos la moneda y si sale cara sacamos una bola de una caja que contiene 10 bolas rojas y 6 blancas y si sale cruz sacamos una bola de otra urna que contiene 8 bolas rojas y 5 blancas. Lanzamos la moneda al aire, halla:

a) La probabilidad de sacar una bola blanca.

b) Sabiendo que hemos sacado una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber sacado cara al lanzar la moneda?

Con las condiciones del problema sabemos que P (cara) = 0,75 y P (cruz) = 0,25. Entonces:

a) P(sacar bola blanca) = $0{,}75 \cdot \frac{6}{16} + 0{,}25 \cdot \frac{5}{13} = 0{,}3774$

b) P (cara/ sacado bola blanca) = $\frac{0{,}75 \cdot \frac{6}{16}}{0{,}377} = 0{,}7452$

19. En un almacén de frutas hay tres contenedores que contienen piezas buenas y defectuosas. En el primero un 8% son defectuosas, en el segundo un 7% y en el tercero un 9%. La probabilidad de elegir una fruta del primer contenedor o del segundo es la misma y de elegirla del tercero es el doble de las anteriores. Elegida una fruta al azar resulta que esta buena, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del tercer contenedor?

19. Las probabilidades del enunciado son:

P (1º contenedor) = P (2º contenedor) = 1/4 y P (3º contenedor) = 2/4

La probabilidad pedida es:

$$P\left(3º\ /\ buena\right) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}91}{0{,}25 \cdot 0{,}92 + 0{,}25 \cdot 0{,}93 + 0{,}5 \cdot 0{,}91} = 0{,}4959$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 334

1. Se estima que el 8% de la población española padece diabetes. Una nueva prueba diagnostica correctamente el 95% de los pacientes que sufren esta enfermedad, pero produce un 3% de falsos positivos. Sabiendo que una persona ha dado positivo en dicha prueba, ¿qué probabilidad hay de que realmente sea diabético?

La probabilidad es P (Diabético/ +) = $\frac{0,08 \cdot 0,95}{0,08 \cdot 0,95 + 0,92 \cdot 0,03} = 0,7336$

2. Los dos sucesos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, 0,5. La probabilidad de que ocurra uno de ellos sabiendo que ha ocurrido el otro es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos?

2. Sean A y B los sucesos que verifican P (A) = P (B) = 0,5 y P(A/B) = 0,3. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$$

La probabilidad pedida es:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [0,5 + 0,5 - 0,15] = 0,15$$

3. En una granja hay patos de dos tipos con pico rojo o con pico amarillo. Se observa que el 40% son machos con pico amarillo; el 20% de todos tienen el pico rojo mientras que el 35% de los que tienen el pico rojo son machos.

a) Elegido un pato al azar, halla la probabilidad de que sea macho.

b) Si el pato elegido es una hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

	Pico rojo	**Pico amarillo**	**Total**
Machos	7	40	47
Hembras	13	40	53
Total	20	80	100

Las probabilidades son:

a) P (Macho) = $\frac{47}{100} = 0,47$

b) P (Pico rojo/ Hembra) = $\frac{13}{53} = 0,245$

4. Si el ocupante de un coche sufre un choque frontal a 80 km/h sin llevar puesto el cinturón de seguridad suele ser mortal en el 98% de los casos. Según datos de la Dirección General de Tráfico, el 88,3% de los

usuarios de coche utilizan cinturón, elemento que reduce a la mitad el riesgo de muerte en un accidente. Si una persona sufre un accidente que no le cuesta la vida a 80 km/h, ¿qué probabilidad hay de que llevara puesto el cinturón de seguridad?

La probabilidad es P (Cinturón/ no muere) = $\dfrac{0{,}883 \cdot 0{,}51}{0{,}883 \cdot 0{,}51 + 0{,}117 \cdot 0{,}02} = 0{,}9948$

5. Un test para detectar si una persona es portadora del virus VIH da positivo en el 94% de las personas que son portadoras del virus y en el 10% de las personas que no son portadoras. Sabemos que en la realidad el 0,5% de las personas son portadoras del virus. Si se elige al azar una persona y el resultado del test que se le ha aplicado ha sido positivo, ¿cuál es la probabilidad de que en la realidad esa persona sea portadora del virus?

La probabilidad pedida es P (portadora virus / positivo) = $\dfrac{0{,}005 \cdot 0{,}94}{0{,}005 \cdot 0{,}94 + 0{,}995 \cdot 0{,}10} = 0{,}0451$

6. Calcula $P(\overline{A}/B)$, sabiendo que $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \dfrac{5}{12}$

Utilizando las propiedades de la probabilidad y la definición de probabilidad condicionada obtenemos:

$P(A \cap B)$ = P (A) + P (B) - $P(A \cup B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{6}$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

7. En una empresa el 72,5% de los trabajadores tienen teléfono móvil. De estos el 70% tienen tablet. Por otro lado el 33,3% de los que no tienen teléfono móvil si tienen tablet.

a) ¿Qué tanto por ciento tienen ambos aparatos?

b) ¿Qué tanto por ciento tienen tablet?

c) Si un trabajador elegido al azar no dispone de tablet, ¿qué probabilidad hay de que tenga teléfono móvil?

Los porcentajes pedidos son:

a) Tienen ambos aparatos: 0,725 · 0,70 = 0,5075, es decir el 50,75%.

b) Tienen tablet: 0,725 · 0,7 + 0,275 · 0,333 = 0,5991, es decir el 59,91%.

c) La probabilidad pedida es P (Teléfono móvil/No tablet) = $\dfrac{0{,}725 \cdot 0{,}30}{1 - 0{,}5991} = 0{,}5425$. Por tanto, la probabilidad de que no teniendo tablet si tenga teléfono móvil es 0,5425.

8. Los miembros de una sociedad de Amigos del Camino de Santiago son el 30% españoles, el 60% franceses y el resto de otras nacionalidades. Los franceses de la sociedad son peregrinos en la proporción de uno de cada mil, los españoles en la proporción de uno de cada cien, mientras que el resto de los miembros de la sociedad es peregrino en la proporción de uno de cada diez mil. Se elige al azar un miembro de la sociedad

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea peregrino?

b) Si el miembro elegido resultó ser peregrino del Camino de Santiago, ¿qué es más probable que sea español o que sea francés o que pertenezca a otras nacinalidades?

Las probabilidades son:

a) P (peregrino) = 0,3 · 0,01 + 0,6 · 0,001 + 0,1 · 0,0001 = 0,00361.

b) Sabiendo que el miembro elegido es peregrino, las probabilidades de que sea español, francés o de otras nacionalidades son:

P (Español / peregrino) = $\frac{0,3 \cdot 0,01}{0,00361} = 0,8310$

P (Francés / peregrino) = $\frac{0,6 \cdot 0,001}{0,00361} = 0,16628310$

P (Otras nacionalidades / peregrino) = $\frac{0,1 \cdot 0,0001}{0,00361} = 0,0028$

Observamos que es más probable que sea español.

9. El pasado invierno una ciudad disponía de una vacuna para proteger a la población frente al virus de la gripe. Si una persona se ha vacunado, la probabilidad de que se infecte con el virus es de 0,1; sin la vacuna, dicha probabilidad es de 0,3. El 40% de la población se vacunó.

a) Halla la probabilidad de que una persona elegida al azar se infecte con el virus.

b) Si la persona elegida al azar se ha infectado con el virus ¿cuál es la probabilidad de que esté vacunada?

c) Si la persona elegida al azar no esta infectada con el virus, ¿cuál es la probabilidad de que no esté vacunada?

9. Las probabilidades pedidas son:

a) P (se infecte con el virus) = P (vacunado) · P (infecte con virus/ vacunado) + P (no vacunado) · P (infecte con virus/ no vacunado) = 0,40 · 0,1 + 0,60 · 0,3 = 0,22

b) P (vacunada / infectada con el virus) = $\frac{0,40 \cdot 0,1}{0,22} = 0,1818$

c) P (no vacunada / no infectada con el virus) = $\frac{0,60 \cdot 0,7}{0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,7} = 0,5383$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 335

El albinismo

El albinismo es un trastorno genético y hereditario, que produce una alteración en la producción y metabolismo de la melanina, lo que da lugar a una ausencia total o parcial de este pigmento que es el responsable del color de la piel, cabello y ojos.

El albinismo aparece en los seres humanos y en otros seres vivos tanto animales como vegetales. Uno de los animales albinos más conocido es el gorila "Copito de Nieve" que fue durante muchos años la estrella del zoo de Barcelona y murió en 2003 habiendo vivido unos 40 años. Hoy en día se ha visto que varios de sus bisnietos no son albinos.

El albinismo en los seres humanos es un carácter mendeliano simple. Designamos con a el gen albino y con n el no albino. El gen n es dominante, de modo que padres con genes n, no pueden tener un hijo albino, a menos que ambos sean (na).

Supongamos que en una gran población la proporción de genes no albinos, n, es p y la proporción de genes albinos, a, es q = 1 – p.

1. Suponiendo que el albinismo no es un factor en la selección matrimonial ni en el número de hijos, estudia qué proporción de individuos de la próxima generación serán albinos.

2. Si los albinos se casaran sólo con albinos, ¿qué probabilidad de individuos de la próxima generación serían albinos?

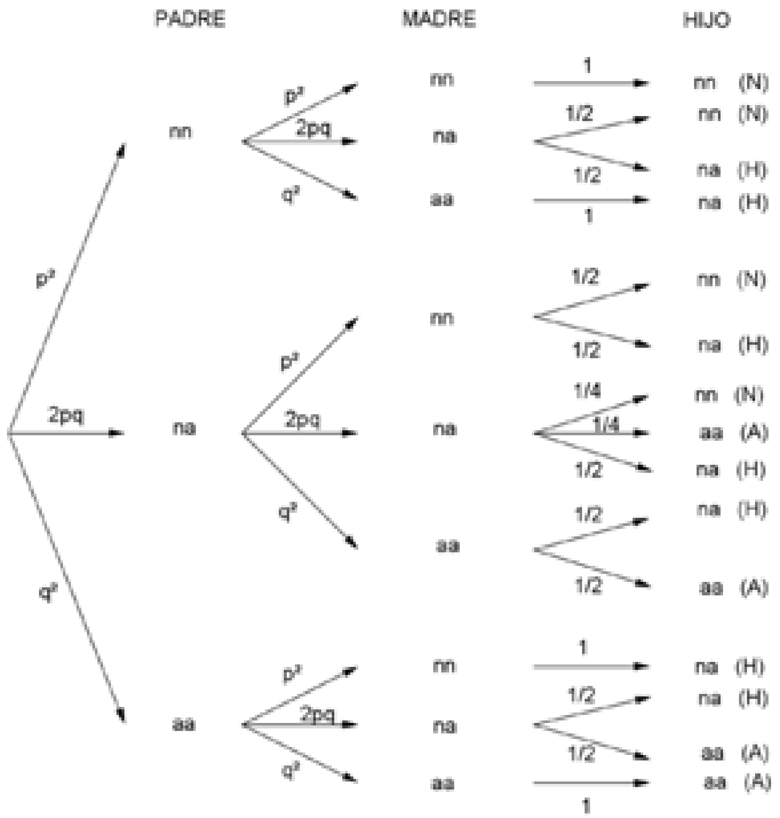
1.. Las personas podemos ser:

(n, n), que llamaremos "Normal" (N)
(n, a), que llamaremos "Híbrido" (H)
(a, a), que llamaremos "Albino" (A)

Del enunciado podemos interpretar que:

- La probabilidad de que una persona de la muestra sea (n, n) es p^2.
- La probabilidad de que una persona de la muestra sea (n, a) es 2pq.
- La probabilidad de que una persona de la muestra sea (a, a) es q^2.

Recogiendo en un diagrama de árbol toda la información, tenemos:



La probabilidad de que un individuo de la próxima generación sea Normal (N), Híbrido (H) o Albino (A), la obtenemos sumando los productos de las probabilidades de los caminos que terminan en N, H o A, respectivamente.

Por ejemplo, la probabilidad de que una persona sea albina es:

$$P\ (\text{Albina}) = 2pq \cdot 2pq \cdot \frac{1}{4} + 2pq \cdot q^2 \cdot \frac{1}{2} + q^2 \cdot 2pq \cdot \frac{1}{2} + q^2q^2 \cdot 1 = q^2 \cdot (p+q)^2 = q^2$$

que es la probabilidad pedida en el apartado 1º.

Si hacemos una tabla de contingencia y calculamos la probabilidad de que una persona de la próxima generación sea N, H o A, observaremos que la probabilidad es la misma que en la generación de la muestra.

	NORMAL	**HÍBRIDO**	**ALBINO**
nn,nn	p^4	0	0
nn,na	$2 \cdot 2p^3q\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2p^3q\frac{1}{2}$	0
nn,aa	0	$2p^2q^2 \cdot 1$	0
na,na	$4p^2q^2\frac{1}{4}$	$4p^2q^2\frac{1}{2}$	$4p^2q^2\frac{1}{4}$ (*)
na,aa	0	$2 \cdot 2pq^3\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2pq^3\frac{1}{2}$
aa,aa	0	0	$q^4 \cdot 1$

	p^2	**2pq**	**q^2**

En cada casilla de la tabla hemos puesto la probabilidad del suceso definido por la fila y la columna en la que se encuentra. Por ejemplo, en la casilla indicada con (*) tenemos la probabilidad de que los padres sean ambos na y el hijo Albino.

Debajo de cada columna hemos puesto la suma de los números de la misma, que es la probabilidad de que un individuo en la próxima generación sea Normal, Híbrido o Albino, respectivamente.

2. Suponemos ahora que los albinos se casan sólo con albinos.

Los matrimonios ahora pueden ser nn con nn, nn con na, na con na y aa con aa, y los albinos sólo pueden nacer de matrimonios como los dos últimos.

Un albino (aa) se casa con un (aa) con probabilidad 1. Como los (nn) y (na) sólo se casan entre ellos, veamos la probabilidad de cada uno de los matrimonios. Para ello determinemos la proporción de persona (n, a) y (n, n) entre la población de no albinos.

Si H es el número de personas de la muestra, tenemos:

p^2H es el número de personas de la muestra que son (n, n)

2pqH es el número de personas de la muestra que son (n, a).

La suma p^2H + 2pqH es el número de personas no albinas, luego:

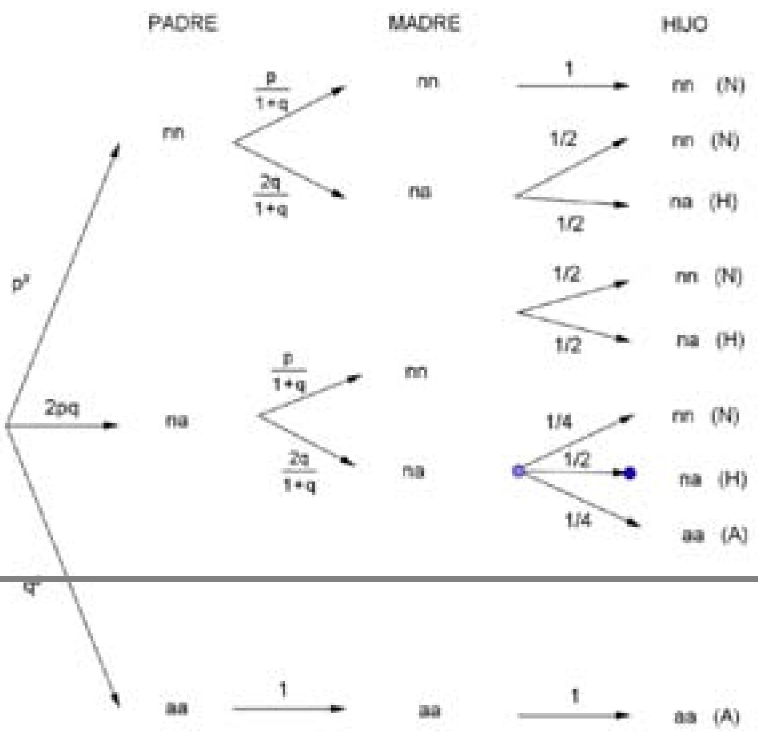
- La proporción de personas (n, n) entre la población no albina es:

$$\frac{p^2H}{p^2H+2pqH}=\frac{p}{p+2q}=\frac{p}{1+q}$$

- Y la proporción de personas (n, a) entre la población no albina es:

$$\frac{2pqH}{p^2H+2pqH}=\frac{2q}{1+q}$$

Recogiendo la información en un diagrama de árbol, como anteriormente, tenemos:



Al igual que antes, la probabilidad de que un individuo de la próxima generación sea albino, la obtenemos sumando los productos de las probabilidades de los caminos que terminan en A.

$$P\ (Albino) = 2pq \cdot \frac{2q}{1+q} \cdot \frac{1}{4} + q^2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2q^2}{1+q}$$

Podemos hacer también una tabla de contingencia que nos proporcione las probabilidades de que un elemento de la próxima generación sea N, H o A.

	NORMAL	**HÍBRIDO**	**ALBINO**
nn,nn	$\frac{p^3}{1+q}$	0	0
nn,na	$2 \cdot \frac{2p^2q}{1+q} \cdot \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{2p^2q}{1+q} \cdot \frac{1}{2}$	0
na,na	$\frac{4pq^2}{1+q} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4pq^2}{1+q} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{4pq^2}{1+q} \cdot \frac{1}{4}$
aa,aa	0	0	q^2

Sumando cada una de las columnas, obtenemos:

$$P\ (Normal) = \frac{p^3 + 2p^2q + pq^2}{1+q} = \frac{p(p+q)^2}{1+q} = \frac{p}{1+q}$$

$$P\ (Híbrido) = \frac{2p^2q + 2pq^2}{1+q} = \frac{2pq(p+q)}{1+q} = \frac{2p}{1+q}$$

$$P\ (Albino) = \frac{pq^2}{1+q} + q^2 = \frac{q^2(p+q+1)}{1+q} = \frac{2q^2}{1+q}$$

UNIDAD 14: Estadística inferencial. Muestreo. Estimación puntual y por intervalos

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 336

1. En una ciudad de 20 000 habitantes quieren pasar una encuesta sobre la opinión de los ciudadanos acerca de la construcción de un parking. ¿Cómo escogerían a 500 habitantes de esa ciudad para pasarles la encuesta?

Mediante muestreo aleatorio simple. Asignando un número del 00000, 00001, 00002, …, hasta el 20000 a cada uno de los ciudadanos y después con una tabla de números aleatorios se sacan los 500 que vamos a elegir.

2. La probabilidad de que un alumno apruebe Economía es 0,8. En un grupo de 22 alumnos ¿cuál es la probabilidad de que al menos 20 aprueben Economía?

Estamos ante una distribución binomial B (22; 0,8). Hallamos la probabilidad:

$$P\left(X \geq 20\right) = P\ (X = 20) + P\ (X = 21) + P\ (X = 22) = 0{,}1545.$$

3. Una empresa produce varillas ortopédicas. Las longitudes de las mismas siguen una normal de media 19 cm. y desviación típica 5 mm. Los cirujanos exigen que la longitud de las varillas ha de estar entre 18,5 cm. y 19,5 cm ¿Qué porcentaje de varillas de esta empresa se ajustan a estas medidas?

La longitud de las varillas se ajusta a una normal N (19; 0,5). Tenemos que: P (18,5 < X < 19,5) = 0,6827. Es decir, el 68,27% de las varillas se ajusta a las medidas exigidas.

4. En una distribución normal de media 12 y desviación típica 2 se sabe que P(X < a) = 0,1587. Halla el valor de a.

Estamos ante una distribución normal N (12, 2).
Mediante las condiciones del enunciado obtenemos:

$$P\ (X < a) = P\left(Z < \frac{a-12}{2}\right) = 0{,}1587, \text{ entonces; } P\left(Z < \frac{12-a}{2}\right) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

de modo que utilizando la tabla de la normal N (0, 1) obtenemos $\frac{12-a}{2}$ = 1, es decir, a = 10.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 361

1. Negativo y positivo. Analiza la última falacia y encuentra el error que nos lleva a al igualdad – 1 = 1.

El error cometido está en el paso:

$$2 \cos 210º \cdot \cos 90º = 2 \cos 90º \cdot \cos (-30º) \Leftrightarrow \cos 210º = \cos 30º.$$

Simplificamos o dividimos por cos 90º = 0. Esta simplificación nos puede conducir a cualquier resultado, ya que:

Si a · 0 = b · 0 y simplificamos por 0, entonces a = b.

2. El mismo número. Analiza el razonamiento siguiente para demostrar: «todos los números son el mismo número» y encuentra el error:

$$\mathbf{a \neq b \Leftrightarrow a + b = t \Leftrightarrow (a + b) \cdot (a - b) = t \cdot (a - b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = ta - tb \Leftrightarrow a^2 - ta = b^2 - tb \Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ta + \frac{t^2}{4} = b^2 - tb + \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{a} = b - \frac{t}{2} \Leftrightarrow a = b$$

En este caso el error lo cometemos en el paso:

$$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{2} = b - \frac{t}{2}$$

La raíz cuadrada de una expresión tiene dos raíces, opuestas, y tomamos la que nos conviene para crear el error.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 362

1. Calcula veinte números aleatorios:
a) Entre 0 y 1.
b) Entre 0 y 1; redondeados con cuatro cifras decimales.
c) Entre 10 y 25.
d) Enteros entre 3 y 15.
e) De la distribución normal N(0, 1)
f) De la distribución normal N(10, 2).

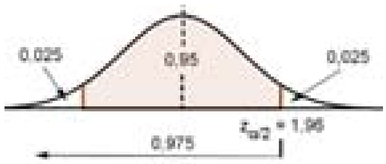
1. Los distintos números aleatorios pueden verse en la tabla que sigue.

	A	B	C	D	E	F
1	a)	b)	c)	d)	e)	f)
2	0,676999557	0,3619	12,68848412	8	2,081714706	9,085064189
3	0,795021401	0,3623	23,76185703	6	-0,309151679	9,480357263
4	0,694230407	0,8912	14,14641495	14	0,57190471	12,63625471
5	0,176998511	0,0062	13,03534633	9	-0,152770345	9,789429548
6	0,707523092	0,3082	11,69939014	5	0,718883534	5,931356984
7	0,310924779	0,7514	24,74153758	6	-0,638064719	12,46710656
8	0,105602506	0,4074	17,23693024	12	-0,086965864	9,820790787
9	0,112847693	0,3607	18,29620357	3	-0,055854967	12,35378076
10	0,606468982	0,3429	21,4604154	6	-1,086602771	7,500973053
11	0,596630047	0,16	14,7459197	7	1,203736122	6,477491873
12	0,187766511	0,4423	22,3915043	5	0,279643754	9,217813407
13	0,821392133	0,1314	24,19633083	11	0,226031729	12,19285006
14	0,570238654	0,2657	16,81973469	5	-1,008933079	9,549011493
15	0,969824501	0,7029	19,16681734	5	1,266173916	9,899965312
16	0,934876275	0,3199	17,03584406	4	0,560394768	10,36954906
17	0,450160599	0,369	11,55229726	13	-0,390749205	11,09013202
18	0,997754375	0,6673	13,61677296	5	-0,851815129	11,10248535
19	0,943726792	0,3118	23,19711971	7	-0,349960111	9,20877668
20	0,367809035	0,9776	22,40417143	4	0,58822373	8,404458167
21	0,57708387	0,8819	20,23678356	7	-0,368407812	7,2328463

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 363

2. Según los datos de cierta comunidad autónoma relativos al impuesto sobre la renta, en el pasado ejercicio fiscal la contribución media fue de 4000 euros. En una muestra de 500 declaraciones del año en curso, elegidos al azar, la contribución media ha sido de 4120 euros, con una desviación típica de 1200 euros. Obtén intervalos de confianza para la contribución media con una confianza del 95% y del 99%.

a) A una confianza del 95% le corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ pues:



Los intervalos de confianza para la media tienen la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(4120 - 1{,}96 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}; 4120 + 1{,}96 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}\right) = (4014{,}82; 4225{,}18).$$

Para obtener el intervalo de confianza en la calculadora seguimos los pasos:

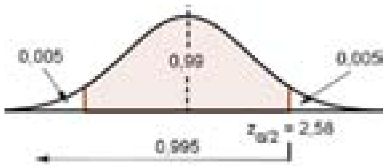
- En la tecla **STAT** activamos el menú **TEST**, y dentro de es último **7: ZIntervalo…** Aparece la pantalla de la primera imagen de la izquierda. En ella seleccionamos **Est** (**Stats**) e introducimos el valor de la desviación típica σ del problema, en este caso 1200; el valor de la media muestral, 4120; el tamaño de la muestra, n = 500 y en **Nivel-C** (**C-Level**) el nivel de confianza elegido, en este caso .95.

- Activamos la orden **Calcular** (**Calculate**) pulsando **ENTER**. Obtenemos el intervalo de confianza para la media poblacional, (4014,8; 4225,2); acompañado de la media muestral $\bar{x}$ = 4120.000 y el tamaño muestral n = 500.000.

ZIntervalo
Entr : Dat **Est**
σ : 1200
$\bar{x}$ = 4120
n : 500
Nivel-C : .95
Calcular

ZIntervalo
(4014.8, 4225.2)
$\bar{x}$ = 4120.000
n = 500.000

A una confianza del 99% le corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}58$ pues:



El intervalo de confianza es:

$$\left(4120 - 2{,}58 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}; 4120 + 2{,}58 \cdot \frac{1200}{\sqrt{500}}\right) = (3981{,}54; 4258{,}46).$$

Para obtener el intervalo de confianza en la calculadora seguimos los pasos:

- En la tecla **STAT** activamos el menú **TEST**, y dentro de es último **7: ZIntervalo…** Aparece la pantalla de la primera imagen de la izquierda. En ella seleccionamos **Est** (**Stats**) e introducimos el valor de la desviación típica σ del problema, en este caso 1200; el valor de la media muestral, 4120; el tamaño de la muestra, n = 500 y en **Nivel-C** (**C-Level**) el nivel de confianza elegido, en este caso .99.

- Activamos la orden **Calcular** (**Calculate**) pulsando **ENTER**. Obtenemos el intervalo de confianza para la media poblacional, (3981,8; 4258,2); acompañado de la media muestral $\overline{x}$ = 225.000 y el tamaño muestral n = 60.000.

ZIntervalo
Entr : Dat **Est**
σ : 1200
$\overline{x}$ = 4120
n : 500
Nivel-C : .99
Calcular

ZIntervalo
(3981.8, 4258.2)
$\overline{x}$ = 4120.000
n = 500.000

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 366

1. En una gran urbanización viven 400 personas y desean extraer una muestra aleatoria de 40 personas. Explica cómo deben elegir la muestra utilizando muestreo aleatorio simple.

Se asigna un número a cada una de las 400 persona y con una tabla de números aleatorios se eligen las 40 personas de la muestra.

2. Los asistentes a un concierto son jóvenes un 55%, adultos un 30% y el resto ancianos. ¿Cómo extraer una muestra de 180 asistentes para hacer un estudio sobre el grado de satisfacción de las obras escuchadas?

Elegimos la muestra mediante muestreo estratificado. Los estratos son los jóvenes, los adultos y los ancianos. Tomamos x jóvenes, y adultos y z ancianos:

$$\frac{x}{55} = \frac{y}{30} = \frac{z}{15} = \frac{180}{100}$$

Operando, obtenemos: x = 99 jóvenes; y = 54 adultos y z = 27 ancianos.

3. En la siguiente tabla se pueden ver el número de libros que hay en las estanterías de cada uno de los departamentos de un colegio:

Departamento	Lengua	Matemáticas	Idiomas	Ciencias	Historia	Educación física
Nº de libros	860	680	560	460	745	235

Se quiere seleccionar una muestra, mediante muestreo aleatorio estratificado, de 590 libros para formar una biblioteca de alumnos en el centro. Halla el número de libros a elegir en cada departamento.

Elegimos la muestra mediante muestreo estratificado y obtenemos:

$$\frac{L}{860} = \frac{M}{680} = \frac{I}{560} = \frac{C}{460} = \frac{H}{745} = \frac{EF}{235} = \frac{590}{3540}$$

Hallando las incógnitas, obtenemos: 143 libros de Lengua, 113 de Matemáticas, 93 de Idiomas, 77 de Ciencias, 124 de Historia y 39 de Ecuación física.

4. Consideremos la población formada por los elementos 1, 2, 3, 4 y 5.

a) Construye todas las muestras, sin reemplazamiento, de tamaño 2.

b) Halla la media de la población y la desviación típica de la población

c) Halla la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

a) En la tabla tenemos las 20 muestras sin reemplazamiento de tamaño 2 que podemos obtener:

Elementos	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 1	2, 3	2, 4	2, 5	3, 1	3, 2	3, 4	3, 5
Media muestral	1,5	2	2,5	3	1,5	2,5	3	3,5	2	2,5	3,5	4

Elementos	4, 1	4, 2	4, 3	4, 5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4
Media muestral	2,5	3	3,5	4,5	3	3,5	4	4,5

b) La media de la población μ = 3 y la desviación típica de la población σ = 1,41.

c) La media de la distribución muestral de medias es $\mu_{\bar{x}}$ = 3 y la desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\bar{x}}$ = 0,87.

5. Los pesos de los estudiantes de un centro escolar se distribuyen normalmente con media de 68 kg. y desviación típica de 0,15 kg. Si tomamos muestras de 25 estudiantes halla la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

La media de la distribución muestral de medias es $\mu_{\bar{x}}$ = 68 kg y la desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}15}{\sqrt{25}} = 0{,}03$ kg.

6. Se sabe que el número de días de permanencia de los enfermos en una clínica sigue una distribución normal de media 7,5 días y varianza 16 días. Elegimos al azar una muestra de 64 enfermos. Encuentra la media y la varianza de la distribución muestral de medias.

La media de la distribución muestral de medias es $\mu_{\bar{x}}$ = 7,5 días y la desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\bar{x}} = \frac{4}{\sqrt{64}} = 0{,}5$ días, por lo que la varianza es $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0{,}25$.

7. Sabemos que la distribución muestral de medias para muestras de tamaño 36 tiene varianza 16. Halla la desviación típica de la población original.

Sabemos que $\frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 4$; por lo que σ = 24

8. El tiempo de espera de los pacientes que usan ortodoncia en la consulta de un odontólogo sigue una normal de media 15 minutos y desviación típica 8 minutos.

a) Si hay citadas 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera sea mayor de 12 minutos?

b) Si, un día de muchas urgencias, hay citadas 9 personas, ¿cuál es la probabilidad de que sean atendidos en menos de 18 minutos?

La distribución muestral de medias es normal $N\left(15; \frac{8}{\sqrt{4}}\right) = N\left(15; 4\right)$. La probabilidad pedida es:

P $\left(\overline{X} > 12\right)$ = 0,7734.

b) En este caso la distribución muestral de medias es normal $N\left(15; \frac{8}{\sqrt{9}}\right) = N\left(15; \frac{8}{3}\right)$. La probabilidad pedida es: P $\left(\overline{X} < 18\right)$ = 0,8697.

9. En un hospital el peso de los recién nacidos se ha distribuido según una normal de media 3,3 kgs. y desviación típica 0,2 kgs. Halla la probabilidad de que en una muestra de tamaño 121 el peso de los recién nacidos sea menor de 3 250 gramos.

La distribución muestral de medias es normal $N\left(3,3; \frac{0,2}{\sqrt{121}}\right) = N\left(3,3; 0,018\right)$. La probabilidad pedida es:

P $\left(\overline{X} < 3,250\right)$ = 0,0027.

10. Una empresa fabrica bombillas con una duración media de 1800 horas y desviación típica de 60 horas. Esta empresa vende todos los días 500 cajas de 50 bombillas cada una.

a) ¿En cuántas cajas cabe esperar que la media de duración de las bombillas sea mayor de 1810 horas?

b) La probabilidad de que una muestra al azar de 36 bombillas tenga una duración mayor de 1810 horas.

a) La duración media de las pilas es normal N (1800; 60). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(1800; \frac{60}{\sqrt{50}}\right) = N\left(1800; 8,49\right)$. Hallamos la probabilidad P $\left(\overline{X} > 1810\right)$ = 0,1194, es decir, el 11,94% de las cajas que corresponde a 59,7 ≈ 60 cajas.

b) La distribución muestral de medias es normal $N\left(1800; \frac{60}{\sqrt{36}}\right) = N\left(1800; 10\right)$. La probabilidad pedida es

P $\left(\overline{X} > 1810\right)$ = 0,1587

11. En unas elecciones se pregunta por la intención de voto y 120 de 400 se muestran partidarios de votar al partido A. ¿Cuál es la probabilidad de que voten a este candidato entre un 25% y un 35%?

Del enunciado obtenemos el parámetro p = $\frac{120}{400} = 0{,}3$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}3;\ \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{400}}\right) = N\left(0{,}3;\ 0{,}0229\right)$.

Hallamos la probabilidad pedida: $P\left(0{,}25 < \hat{p} < 0{,}35\right) = 0{,}971$.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 367

12. En una región se sabe que 2 de cada 3 accidentes son producidos por animales en la calzada. Halla la probabilidad de que en los próximos 100 accidentes en esta región:

a) Sean producidos por animales más del 60%.

b) Sean producidos por animales menos del 70%.

c) El número de accidentes producidos por animales este entre el 40% y el 80%.

Del enunciado obtenemos el parámetro p = $\frac{2}{3}$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(\frac{2}{3};\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{100}}\right) = N\left(2/3,\ 0{,}0471\right)$.

Las probabilidades pedidas son:

a) $P\left(\hat{p} > 0{,}6\right) = 0{,}9215$

b) $P\left(\hat{p} < 0{,}7\right) = 0{,}7604$

c) $P\left(0{,}4 < \hat{p} < 0{,}8\right) = 0{,}9977$

13. Se supone que la temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37 ºC y varianza 0,64 ºC. En una muestra de 400 personas halla:

a) La probabilidad de que la temperatura media del cuerpo sea menor de 36,9 ºC.

b) La probabilidad de que la temperatura media del cuerpo este comprendida entre 36,95 ºC y 37,05 ºC.

La temperatura media del cuerpo humano es normal N (37; 0,8). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(37; \frac{0,8}{\sqrt{400}}\right) = N\left(37; 0,04\right)$.

Las probabilidades son:

a) $P\left(\overline{X} < 36,9\right) = 0,0062$.

b) $P\left(36,95 < \overline{X} < 37,05\right) = 0,7887$.

14. Una compañía de seguros hace una encuesta a 200 personas sobre su disponibilidad de seguro de hogar resultando que 150 tenían contratado un seguro de hogar. ¿En cuántas personas de una muestra de 400 cabe esperar que al menos el 70% tengan seguro de hogar?

Del enunciado obtenemos el parámetro p = $\frac{150}{200} = 0,75$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,75; \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{400}}\right) = N\left(0,75; 0,0217\right)$.

Hallamos la probabilidad $P\left(\hat{p} > 0,7\right) = 0,9894$, es decir, el 98,94% de las personas que son 396 personas.

15. El cociente intelectual de los alumnos de un centro escolar se distribuye con media 110 y desviación típica desconocida. Halla la desviación sabiendo que el 15,87% de las muestras de 64 alumnos tienen un cociente intelectual medio inferior a 108.

El cociente intelectual es normal N (110 ; σ). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(110; \frac{\sigma}{\sqrt{64}}\right)$.

Sabemos que $P\left(\overline{X} < 108\right)$ = 0,1587. De aquí obtenemos:

$$P\left(Z < \frac{108-110}{\frac{\sigma}{8}}\right) = 0,1587 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z < \frac{110-108}{\frac{\sigma}{8}}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\frac{\sigma}{8}} = 0,9998 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 16$$

16. Supongamos que la talla media de los peces de una piscifactoría es de 30 cm con una desviación típica de 3 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 81 peces la talla media esté entre 29 cm. y 32 cm? ¿En cuántos peces de una muestra de 169 peces la talla media es superior a 30,5 cm?

La talla media de los peces es normal N (30; 3). La distribución muestral de medias también es normal $N\left(30; \frac{3}{\sqrt{81}}\right) = N\left(30, 1/3\right)$.

La probabilidad pedida es $P\left(29 < \overline{X} < 32\right) = 0,9987$.

En este caso a distribución muestral de medias es normal $N\left(30; \frac{3}{\sqrt{169}}\right) = N\left(30, 3/13\right)$.

La probabilidad pedida es $P\left(\overline{X} > 30,5\right) = 0,0151$, es decir, 3 peces.

17. Supongamos que la cantidad de agua recogida cada día en un determinado pantano sigue una distribución normal de desviación típica 3 l. Se elige una muestra aleatoria y se obtienen las siguientes cantidades de agua: 12,3; 5,8; 7,6; 4,8; 7; 4,2; 9,5; 5; 13,4, 10,6. Encuentra el intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida en el pantano cada día con un nivel de confianza del 95%.

La media muestral es $\overline{x} = 8,02$. La cantidad de agua media recogida es normal N (8,02; 3). La distribución muestral de medias es también normal $N\left(8,02; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1.96$ El intervalo de confianza pedido es:

$\left(8,02 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}, 8,02 + 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(6,1606; 9,8794\right)$.

18. En un grupo de 60 estudiantes universitarios se observa que 48 tienen uno o ningún hermano. Halla el intervalo de confianza del 90% para la proporción de dichos estudiantes en ese grupo.

La proporción de hermanos es $p = \frac{48}{60} = 0,8$. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,8; \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{60}}\right) = N\left(0,8; 0,052\right)$.

Al nivel de confianza del 90% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,645. El intervalo de confianza pedido es:

$\left(0,8 - 1,645 \cdot 0,052 ; 0,8 + 1,645 \cdot 0,052\right) = (0,7145; 0,8855)$.

19. Un médico osteopata quiere estudiar la influencia de una dieta pobre en calcio en la osteoporosis. Para ello toma una muestra de 225 enfermos de osteoporosis y obtiene que la dieta media de calcio es 920 mg. Suponiendo que la toma de calcio en estos enfermos sigue una distribución normal de desviación típica 175 mg. Encuentra el intervalo de confianza al 99% para la cantidad media de calcio que toman estos enfermos.

La dieta media de calcio es normal N (920; 175). La distribución muestral de medias es también normal $N\left(920; \frac{175}{\sqrt{225}}\right)$.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(920 - 2,58 \cdot \frac{175}{\sqrt{225}}\,;\, 920 + 2,58 \cdot \frac{175}{\sqrt{225}}\right) = (889,9;\, 950,1).$$

20. En una ciudad se toma, al azar, una muestra de 250 jóvenes de menos de 30 años y se obtuvo que 50 no hablan inglés.

a) Halla, con una confianza del 98%, el intervalo para estimar la proporción de jóvenes que no hablan inglés.

b) Queremos repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,02 con el mismo nivel de confianza del 98%. ¿De cuántos jóvenes se compondrá la muestra?

La proporción de jóvenes que no hablan inglés es p = 0,2.

a) La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,2;\, \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2500}}\right)$.

Al nivel de confianza del 98% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,33. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(0,2 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{250}}\,;\, 0,2 + 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{250}}\right) = (0,1411;\, 0,2589).$$

b) El número, n, de elementos de la muestra será:

$$0,02 = 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}}$$, es decir, n = 2172 personas.

21. Un país quiere estimar el gasto medio de los turistas de playa con un error no superior a 30 €. Para ello toma una muestra de 81 turistas de playa. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 100 €. ¿Cuál es el máximo nivel de confianza con el que se realizará la estimación?

De los datos del problema podemos escribir la igualdad $30 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{100}{\sqrt{81}}$, de donde obtenemos que

$z_{\alpha/2}$ = 2,7. P (-2,7 < $z_{\alpha/2}$ < 2,7) = 0,993, de modo que el nivel de confianza es del 99,3%

22. Si estimamos que el 20% de los españoles no tienen acceso a Internet. Halla el error máximo que cometemos con una confianza del 99% si tomamos una muestra de 2025 españoles.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58.

El error es igual a $2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2025}}$ = 0,023. La cota de error máxima es 0,023.

23. Un centro de salud hace un estudio sobre la relación entre las pulsaciones de los hombres y de las mujeres. Para ello se toman muestras de 100 individuos cada una y se obtienen para los hombres una media de 79 pulsaciones por minuto con una desviación típica de 3,8 pulsaciones por minuto y para las mujeres una media de 80 pulsaciones por minuto con una desviación típica de 3,2 pulsaciones por

minuto. Al nivel de confianza del 98%, ¿son superiores las pulsaciones de los hombres respecto a las mujeres o al revés?

23. Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1,96$

Al nivel de confianza del 98% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2,33$

El intervalo de confianza para la diferencia de medias es:

$$\left(80 - 79 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{3,4^2}{100} + \frac{3,2^2}{100}},\ 80 - 79 + 2,33 \cdot \sqrt{\frac{3,4^2}{100} + \frac{3,2^2}{100}}\right) = (-0,0879;\ 2,0879)$$

Por tanto, $\mu_M - \mu_H \in (-0,0879;\ 2,0879)$ y esto indica que las pulsaciones de las mujeres son mayores que las de los hombres.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 368

1. La duración media de los ramos de flores puestos en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar a una distribución normal de desviación típica 10 horas. Se toma una muestra de 12 ramos de esas flores y se obtienen las siguientes duraciones en horas:

64, 58, 72, 66, 84, 50, 62, 74, 86, 52, 76, 62

Halla el intervalo de confianza al 99% para la duración media de los ramos de flores.

La duración media de los ramos de flores es normal sigue una distribución normal N (67,17; 11.03). Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2,58$. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(67,17 - 2,58 \cdot \frac{11,03}{\sqrt{12}}\ ;\ 67,17 + 2,58 \cdot \frac{11,03}{\sqrt{12}}\right) = (58,968;\ 75,372).$$

2. Una empresa hace un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros best seller que se venden en el mercado. Para ello elige una muestra de 324 libros encontrando un precio medio de 20 €. Se sabe que el precio de estos libros sigue una distribución normal de desviación típica 5€.

a) Halla el intervalo de confianza al 90% para el precio medio de estos libros.

b) Halla el error que se comete al estimar esa media con el intervalo anterior.

a) El precio medio de los libros sigue una distribución normal $N\left(20, \frac{5}{\sqrt{324}}\right)$.

Al nivel de confianza del 90% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1,645$. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(20 - 1,645 \cdot \frac{5}{\sqrt{324}}\ ;\ 20 + 1,645 \cdot \frac{5}{\sqrt{324}}\right) = (19,543;\ 20,457).$$

b) El error viene dado por $E = 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{324}} = 0{,}4569$

3. La estatura media de los niños de 10 años en España es de 135 cm con una desviación típica de 8 cm. Halla el tamaño de la muestra necesario para que el intervalo de confianza al 95% en el que se encuentra la media poblacional tenga una amplitud de 2cm. Libro ud 15 - 40

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos: $1 = 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}}$, es decir, n = 246 niños.

4. El número de horas diarias que los estudiantes de 2º de Bachillerato de una comunidad dedican a preparar Los exámenes finales durante las tres últimas semanas de curso sigue una distribución normal de media y desviación típica desconocidas. Para estimar el tiempo medio se toma una muestra de 256 estudiantes de ese curso y con un nivel de confianza del 98% se obtiene un intervalo de confianza de amplitud 3,6 minutos. Halla la desviación típica poblacional.

Al nivel de confianza del 98% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}33$

Siendo la amplitud del intervalo 3,6 entonces el error es 1,8. Por tanto, $1{,}8 = 2{,}33 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{256}}$ $\Rightarrow \sigma = 12{,}36$ este es el valor de la desviación típica poblacional.

5. Se lanza al aire una moneda 400 veces y se obtienen 160 veces cruz.

a) Halla el intervalo de confianza al 90% de la probabilidad de obtener cruz.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra que hemos de tomar para conseguir un error inferior a 0,04 con un nivel de confianza del 95%?

5. La proporción de cruces es p = 0,4. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}4, \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{400}}\right)$.

a) Al nivel de confianza del 90% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(0{,}4 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{400}}\,;\, 0{,}4 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{400}}\right) = (0{,}3597;\, 0{,}4403).$$

b) Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El número mínimo, n, de veces que lanzamos la moneda es:

$$0{,}04 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = 577.$$

6. Una empresa fabrica pantallas de ordenador cuya resolución sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 22 píxeles. Para una muestra de 196 pantallas se obtiene el intervalo de confianza (1276,34; 1283,66). Halla la resolución media de estas pantallas y el nivel de confianza con el que se ha obtenido.

La resolución media de estas pantallas es $\dfrac{1283,66+1276,34}{2} = 1280$ pixeles.

Hallamos el nivel de confianza mediante la igualdad: 1280 - $z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{22}{13} = 1276,34$; de donde $z_{\alpha/2}$ = 2,1627 que corresponde a un nivel de confianza del 96,92%

7. La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra de esa población para que con un nivel de confianza del 95% la proporción muestral y la poblacional no difieren en más de 0,02?

La proporción de población vacunada es p = 0,25. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}25,\ \sqrt{\dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{n}}\right)$

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96. Con las condiciones del problema obtenemos:

$$0{,}02 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = 1801$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1801 personas.

8. Un hospital hace un estudio sobre la relación entre enfermo de cáncer de pulmón y fumador. Obtiene que de 121 enfermos de cáncer de pulmón 42 eran fumadores. Halla el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 98%. Se sabe que esta proporción en la población es del 30%. ¿Esta proporción está incluida en el intervalo anterior?

8. La proporción de fumador y cáncer de pulmón es p = 42/121 = 0,347. La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0{,}347,\ \sqrt{\dfrac{0{,}347 \cdot 0{,}653}{121}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(0{,}347 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}347 \cdot 0{,}653}{121}}\ ;\ 0{,}347 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}347 \cdot 0{,}653}{121}}\right) = (0{,}2622;\ 0{,}4318).$$

Como podemos ver, el valor del 30% correspondiente a 0,3 está dentro de este intervalo.

9. Un fabricante de memorias USB afirma que la desviación típica de la duración media de las mismas es de 40 usos.

a) Tomamos una muestra de 60 USBs y con confianza del 95 % observamos que la duración media es de 600 usos. Encuentra el intervalo de confianza para la duración media poblacional.

b) ¿Para qué nivel de confianza el error máximo cometido en la estimación de la media poblacional con una muestra de 60 USBs es 10,12?

a) La duración media de estas memoria es normal N (600, 40). La distribución muestral de medias es también normal $N\left(600; \frac{40}{\sqrt{60}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 1,96. El intervalo de confianza pedido es:

$$\left(600 - 1{,}96 \cdot \frac{40}{\sqrt{60}}\,;\, 600 + 1{,}96 \cdot \frac{40}{\sqrt{60}}\right) = (589{,}88;\, 610{,}12).$$

b) Hallamos el nivel de confianza mediante la igualdad: $10{,}12 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{40}{\sqrt{60}}$; de donde $z_{\alpha/2}$ = 1,96 que corresponde a un nivel de confianza del 95 %.

10. La dureza media de cierto plástico se distribuye normalmente. Para estimar la dureza media se toma una muestra de tamaño 49 y con un nivel de confianza del 95% se sabe que esta entre 7,372 y 7,428. ¿Cuál es la dureza media de estas 49 muestras? ¿Cuánto vale la desviación típica poblacional?

La duración media es $\frac{7{,}372 + 7{,}428}{2} = 7{,}4$.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}$ = 2,58. Como $\frac{7{,}428 - 7{,}372}{2} = 2{,}58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$, de donde obtenemos $\sigma = 0{,}076$.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 369

Modelos de crecimiento poblacional

Analizamos alguno de los modelos propuestos para el estudio del crecimiento de los seres vivos (humanos, animales, plantas, microorganismos…).

1. Modelo de Malthus.

Thomas R. Malthus (1766-1834) publicó en el *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) el modelo que lleva su nombre y que se caracteriza por el crecimiento continuo o exponencial. La expresión matemática es:

$$y\,(t) = y_0 \cdot e^{rt}$$

En la fórmula anterior, y (t) es el número de individuos presentes en el tiempo t, y_0 el tamaño inicial de la población y r un parámetro que expresa el nacimiento o incorporación de nuevos individuos en cantidad constante, generación tras generación.

Comprueba que se cumple la relación y ´ (t) = r · y (t). Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de y_0 y el parámetro r, y analiza las gráficas resultantes.

2. Modelo de Verhults o ley logística.
Pierre F. Verhults (1804-1849) modificó, en 1838, el modelo de maltusiano considerando el hecho de que debe haber una tamaño máximo de la población o valor k, ya que el espacio (o el agua o los alimentos o medio ambiente) es limitado. Obtuvo la siguiente expresión:

$$y\,(t) = \frac{k \cdot y_0}{y_0 + (k - y_0) \cdot e^{-rt}}$$

Comprueba que se cumple la relación y ´ (t) = r · y (t) · (k – y (t)). Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de las variables k, r e y_0, analiza las gráficas resultantes. Compara los resultados obtenidos con el modelo anterior.

3. Otros modelos.
Existen otros modelos que estudian el crecimiento en situaciones más restringidas. Son el **modelo de Gompertz** y el **modelo de von Bertalanffy**. Busca sus expresiones matemáticas, representa gráficamente las funciones resultantes y analiza las gráficas obtenidas.

Busca contextos distintos de la Biología donde se apliquen alguno de estos modelos.

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre los modelos de crecimiento.

● AMELKIN, V. V. (2003). *Ecuaciones diferenciales en la práctica.* Editorial URSS. Moscú.

● LAHOZ-BELTRA, Rafael. (2010). *Las matemáticas de la vida.* RBA. Barcelona.

● MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid.

● STEWART, Ian. (2011). *Las matemáticas de la vida*. Crítica. Barcelona.

● http://www.ecologia.info/leyes.htm

● www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt