

## ECUACIONES DE LA RECTA

## EJERCICIOS

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,5) y tiene la dirección del vector  $\vec{u} = (2, -4)$  en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc:  $2x+y-11=0$ )
- Ídem para el punto A(3,1) y  $\vec{u} = (4, -2)$  (Soluc:  $x+2y-5=0$ )
- Representar las siguientes rectas:
  - $2x+3y-7=0$
  - $x=3$
  - $y=2$
  - $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \end{cases}$
  - $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$
- Pasar a forma explícita las siguientes rectas y calcular sus pendientes:
  - $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1}$
  - $5x+3y+6=0$
  - $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2) y B(1,-4) en todas las formas posibles. (Soluc:  $3x-y-7=0$ )
- Determinar si el punto P(2,-1) pertenece a la recta  $3x-2y+5=0$ . ¿Y el punto (1,4)? (Soluc: NO; Sí)
- Dada la recta  $ax+5y+4=0$ , determinar  $a$  para que la recta pase por el punto (2,3) (Soluc:  $a=-19/2$ )
- Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.
  - Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)
- Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2, 1/3) y tiene igual pendiente que la recta que pasa por P(2,1) y Q(3,4) (Soluc:  $y - \frac{1}{3} = 3(x + 2)$ )
- Dada la recta que pasa por A(1,0) y B(3,4) se pide:
  - Hallar su forma paramétrica, continua, implícita, punto-pendiente y explícita. (Soluc:  $2x-y-2=0$ )
  - ¿Cuál es su pendiente? (Soluc:  $m=2$ )
  - ¿El punto (2,2) pertenece a dicha recta? (Soluc:  $(2,2) \in r$ )
- Ídem para la recta que pasa por A(-2,1) y B(4,5). ¿El punto (1,3) es de dicha recta?
- Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de  $120^\circ$  con la parte positiva del eje x. (Soluc:  $y - 1 = -\sqrt{3}(x - 2)$ )
- Dada la recta  $5x-3y+7=0$ , hallar la longitud de los segmentos que determina sobre los ejes. Hacer el dibujo. (Soluc:  $x=-7/5$ ,  $y=7/3$ )
- Hallar el área limitada por la recta  $5x+y-5=0$ , el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Hacer el dibujo. (Soluc:  $5/2 u^2$ )
- Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,1) y forma  $45^\circ$  con el eje  $OX^+$  (Soluc:  $y=x-2$ )

16. Resolver gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)  $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 33 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$

(Soluc: (1,3);  $\infty$  soluc;  $\nexists$  soluc)

17. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas  $2x+3y-4=0$  y  $x-y=0$  y por A(2,1) (Soluc:  $x-6y+4=0$ )

b) Ídem para las rectas  $3x+y-11=0$  y  $x+2y-7=0$  y el punto A(-1,2) (Soluc:  $y=2$ )

18. La recta  $y+2=m(x+3)$  pasa por el punto de intersección de las rectas  $2x+3y+5=0$  y  $5x-2y-16=0$ . Calcular m (Soluc:  $m=-1/5$ )

### RECTA $\perp$ A UNA DADA:

19. En cada apartado, hallar la recta  $\perp$  a la dada, por el punto que se indica:

a)  $x-2y+3=0$ ; P(2,1)

b)  $3x+2y+1=0$ ; P(1,-1)

c)  $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$ ; P(1,3)

d)  $y-4=2(x-1)$ ; P(1,1)

e)  $y=2x-5$ ; P(-2,3)

### POSICIÓN RELATIVA:

20. Dadas las rectas:

r:  $2x+3y-4=0$

s:  $x-2y+1=0$

t:  $3x-2y-9=0$

u:  $4x+6y-8=0$

v:  $2x-4y-6=0$

w:  $2x+3y+9=0$

¿Cuáles son coincidentes? ¿Cuáles son paralelas? (Soluc:  $r=u$ ;  $s//v$ ;  $r//w$ )

21. Ídem para las rectas

r:  $y=5x-3$

s:  $y=-x+2$

t:  $y=2x-1$

u:  $y=3x-2$

v:  $y=2x+13$

w:  $y=-x-3$

(Soluc:  $t//v$ ;  $s//w$ )

22. Comprobar, por dos métodos, si las siguientes rectas son paralelas, secantes o coincidentes:

a)  $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 3x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

(Soluc: paralelas; secantes; coincidentes)

23. Determinar m y p para que las rectas  $mx+3y+5=0$  y  $2x+6y-p=0$  sean coincidentes.

(Soluc:  $m=1$ ;  $p=-10$ )

24. a) Dadas las rectas  $3x-4y+1=0$  y  $mx+8y-14=0$  calcular m para que sean paralelas. (Soluc:  $m=-6$ )

b) Ídem para las rectas  $4x-3y+1=0$  y  $mx+6y+4=0$  (Soluc:  $m=-8$ )

25. Dada la recta r determinada por A(2,1) y  $\vec{u}=(a,4)$ , y la recta s determinada por B(-1,4) y  $\vec{v}=(5,3)$

a) Hallar a para que r y s sean paralelas (Soluc:  $a=20/3$ )

b) ¿Para qué valores de a son secantes? (Soluc:  $a \neq 20/3$ )

c) ¿Pueden ser coincidentes? (soluc: NO)

### RECTA // A UNA DADA:

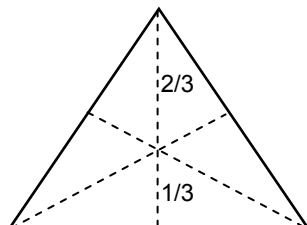
26. Calcular la ecuación de la recta paralela a  $3x+2y-4=0$  que pasa por el punto A(2,3)  
(Soluc:  $3x+2y-12=0$ )
27. La recta  $3x+ny-7=0$  pasa por el punto A(2,3) y es paralela a la recta  $mx+2y=13$ . Calcular **m** y **n**  
(Soluc:  $m=18$ ;  $n=1/3$ )
28. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2,3) y es: **a)** Paralela al eje x  
**b)** Paralela al eje y  
**c)** Paralela a la bisectriz del 1<sup>er</sup> cuadrante.  
**d)** Ídem del 2<sup>o</sup> cuadrante.  
**e)** Paralela a  $5x+2y=0$
29. Hallar la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta determinada por A(1,1) y B(-3,6)  
(Soluc:  $y = -\frac{5}{4}x$ )
30. Dadas las rectas  $r: x-2y+7=0$   
 $s: 2x+y+4=0$   
y el punto P(5,1), hallar las ecuaciones de los otros dos lados del paralelogramo formado por r, s y P. (Soluc:  $x-2y-3=0$  y  $2x+y-11=0$ )
31. **TEORÍA:** Responder, razonadamente, a las siguientes cuestiones:  
**a)** ¿Cómo son los vectores directores de dos rectas paralelas?  
**b)** Si se sabe que el vector director de una recta es (2,5), ¿podemos conocer su pendiente?  
**c)** Y si sabemos que la pendiente es 3, ¿podemos obtener un vector director?  
**d)** ¿Cuántos vectores directores puede tener una recta?  
**e)** Si una recta tiene por vector director (4,2) y otra tiene el (-2,-1), ¿pueden ser la misma?

### PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO:

32. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,3) y C(3,7) se pide:  
**a)** Mediante la fórmula correspondiente, hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad (Por curiosidad, se recomienda obtener la ecuación de dos medianas cualesquiera y comprobar que se cortan en dicho punto)  
**b)** Ecuaciones de dos alturas cualesquiera, y coordenadas del ortocentro.  
**c)** Ecuaciones de dos mediatrices cualesquiera, y coordenadas del circuncentro.  
**d)** Calcular la ecuación de la recta de Euler.  
**e)** Comprobar que el ortocentro dista el doble del centro de gravedad que el circuncentro.  
(Soluc: **a)**  $AB: x=3$ ;  $BC: 4x-3y-1=0$ ;  $G(3,11/3)$  **b)**  $AB: 2x+y-13=0$ ;  $BC: x-2y+1=0$ ;  $AC: x+3y-14=0$ ;  $O(5,3)$   
**c)**  $AB: 2x+y-8=0$ ;  $BC: x-2y+6=0$ ;  $AC: x+3y-14=0$ ;  $C(2,4)$  **d)**  $x+3y-14=0$ )
33. Hallar la ecuación de la recta  $\perp$  al segmento de extremos A(5,6) y B(1,8) en su punto medio.  
¿Cómo se llama dicha recta? (Soluc:  $2x-y+1=0$ ; mediatriz)
34. La recta  $3x-2y-6=0$  corta a los ejes en dos puntos A y B. Calcularlos y hallar la mediatriz de  $\overline{AB}$   
(Soluc:  $4x+6y+5=0$ )
- \* 35. Sabiendo que la recta  $2x-y+1=0$  es mediatriz de  $\overline{AB}$  y A(2,-3), calcular B [Soluc:  $B(-22/5, 1/5)$ ]
- ↕
36. Dada la recta  $x+y-3=0$  hallar el punto simétrico de P(-1,2) respecto a dicha recta.

- \* 37. Los puntos B(-1,3) y C(3,-3) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC. El punto A está en la recta  $x+2y-15=0$ . Calcular A

38. a) Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(3,1), B(0,2) y C(1,-2)  
b) Ídem para A(1,6), B(-5,8) y C(-3,-4) (Soluc:  $4x-5y+26=0$ ;  $7x+4y+3=0$ ;  $11x-y+29=0$ )



39. Demostrar que en un triángulo equilátero el baricentro está situado a una distancia de la base que es siempre  $1/3$  de la altura.

40. Los vértices de un triángulo son A(7,5), B(-8,3) y C(4,-5)

a) Hallar las medianas AB y AC y el baricentro.

b) Ídem para alturas y ortocentro.

c) Ídem para mediatrices y circuncentro.

d) Trazar sobre papel milimetrado las rectas y puntos notables anteriores, y comprobar que están alineados

41. Dado el triángulo de vértices A(2,1), B(5,-3) y C(7,13), hallar razonadamente, mediante cálculo vectorial, la ecuación de la bisectriz correspondiente al vértice A. (Soluc:  $x-8y+6=0$ )

**NOTA:** Cuando se aborde más adelante el cálculo de la distancia punto-recta, se verá otro método para hallar la bisectriz.

### ÁNGULO DE DOS RECTAS:

42. Calcular el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

- |                                    |                                |                                |  |  |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|--|--------------------------------|
| a) $2x-3y+4=0$                     | $5x-2y-3=0$                    | (Soluc: $\cong 34^\circ 31'$ ) | i) $3x-4y+2=0$                                 | $3x-4y+7=0$  | (Soluc: $0^\circ$ )            |
| b) $2x+3y-5=0$                     | $x-y+7=0$                      | (Soluc: $\cong 78^\circ 41'$ ) | j) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$               | $-2x+3y-5=0$   | (Soluc: $\cong 22^\circ 37'$ ) |
| c) $x-2y+4=0$                      | $3x-y-1=0$                     | (Soluc: $45^\circ$ )           | k) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4}$             | $3x+4y=0$  | (Soluc: $90^\circ$ )           |
| d) $y=2x-3$                        | $y=-2x+1$                      | (Soluc: $\cong 53^\circ 8'$ )  | l) $3x+4y-12=0$                                | $5x-12y+8=0$   | (Soluc: $\cong 59^\circ 30'$ ) |
| e) $y=3x-5$                        | $y=3x+2$                       | (Soluc: $0^\circ$ )            | m) $\begin{cases} x=3+t \\ y=5-2t \end{cases}$ | $\begin{cases} x=-3+4\lambda \\ y=-1+3\lambda \end{cases}$ | (Soluc: $\cong 79^\circ 42'$ ) |
| f) $-x+2y+1=0$                     | $3x+y+5=0$                     | (Soluc: $\cong 81^\circ 52'$ ) |  |  |                                |
| g) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$ | $\frac{x}{12} = \frac{y-3}{5}$ | (Soluc: $\cong 30^\circ 31'$ ) |  |  |                                |
| h) $-x+2y+5=0$                     | $2x-3y+4=0$                    | (Soluc: $\cong 7^\circ 8'$ )   |  |  |                                |

43. Hallar mentalmente cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares:

- |                |             |                         |
|----------------|-------------|-------------------------|
| a) $2x+3y-4=0$ | $4x+6y-8=0$ |                         |
| b) $2x+3y-4=0$ | $6x-4y+5=0$ |                         |
| c) $3x-2y+7=0$ | $4x+6y-3=0$ |                         |
| d) $x+y-8=0$   | $2x+3y+6=0$ | (Soluc: NO; Sí; Sí; NO) |

44. ¿Es perpendicular la recta  $2x+3y+4=0$  con otra que tenga de pendiente  $3/2$ ? (Soluc: Sí)

45. Determinar el parámetro  $m$  con la condición de que las rectas  $3x-4y+12=0$  sean perpendiculares.  
 $mx+8y-15=0$  (Soluc:  $m=32/3$ )

46. Determinar el valor de  $a$  para que las rectas  $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$  sean: a) Paralelas.  
(Soluc:  $a=1/3$ ;  $a=-1/2$ )  $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$  b) Perpendiculares.

47. Calcular los coeficientes **m** y **n** de las rectas  $mx-2y+5=0$   
 $nx+6y-8=0$   
sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto (1,4) (Soluc:  $m=3$ ;  $n=4$ )

48. Dada la recta de ecuación  $ax+by=1$ , determinar **a** y **b** sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta  $2x+4y=11$  y que pasa por el punto (1, 3/2) (Soluc:  $a=4$ ;  $b=-2$ )

49. Hallar el valor de **a** para que las rectas  $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$  y  $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + a\lambda \end{cases}$  formen  $45^\circ$

(Aviso: puede haber dos soluciones) (Soluc:  $a_1=6$ ,  $a_2=-2/3$ )

50. Sean las rectas r:  $3x+my+12=0$   
s:  $2x+y+n=0$

Determinar **m** y **n** sabiendo que forman un ángulo de  $60^\circ$  y que la recta **s** pasa por el punto (3,-5) (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Sol:  $m_1=24+15\sqrt{3}$  y  $n_1=-1$ ;  $m_2=24-15\sqrt{3}$  y  $n_2=-1$ )

51. Determinar la ecuación de la recta que pasando por A(5,-2) forme  $45^\circ$  con la que tiene por ecuación  $3x+7y-12=0$  (Advertencia: puede haber dos soluciones)

(Soluc:  $y + 2 = \frac{2}{5}(x - 5)$ ;  $y + 2 = -\frac{5}{2}(x - 5)$ )

52. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por P(2,-3), forma un ángulo de  $45^\circ$  con la recta  $3x-4y+7=0$  (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc:  $y + 3 = -\frac{1}{7}(x - 2)$ ;  $y + 3 = 7(x - 2)$ )

53. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto (-3,0) y forman con la recta de ecuación  $3x-5y+9=0$  un ángulo cuya tangente vale  $1/3$  (Soluc:  $y = \frac{2}{9}(x + 3)$ ;  $y = \frac{7}{6}(x + 3)$ )

#### d(P,r):

54. a) Calcular la distancia del punto P(1,2) a la recta  $3x-4y+1=0$  (Soluc:  $4/5$ )  
b) "" "" "" P(2,-1) a la recta  $3x+4y=0$  (Soluc:  $2/5$ )  
c) "" "" del origen a la recta  $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases}$  (Soluc:  $3/\sqrt{5}$ )  
d) "" "" "" a la recta  $y=4$  (Soluc:  $4$ )

55. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos A(-2,1) y B(3,-2) (Soluc:  $1/\sqrt{34}$ )

56. Hallar la distancia del punto (-1,1) a la recta que corta a los ejes  $OX^+$  y  $OY^+$  a las distancias 3 y 4 del origen. (Soluc:  $13/5$ )

56. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasando por el punto A(0,2) tiene de pendiente -1 (Soluc:  $\sqrt{2}$ )

- \* 57. Calcular las ecuaciones de las dos rectas que pasando por el punto A(1,-2) disten 2 unidades del punto B(3,1). Se recomienda hacer el dibujo. (Soluc:  $y + 2 = \frac{5}{12}(x - 1)$ ;  $x = 1$ )

#### d(r,s):

58. a) Hallar la distancia entre las rectas  $2x+3y-5=0$  y  $2x+3y+7=0$  (Soluc:  $12/\sqrt{13}$ )

- b)    ""    ""    ""    ""     $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$  y  $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{1}$  (Soluc:  $23/\sqrt{10}$ )
- c)    ""    ""    ""    ""     $3x-4y+16=0$  e  $y = \frac{3}{4}x - 1$  (Soluc: 4)
- d)    ""    ""    ""    ""     $3x-4y+16=0$  y  $2x-5y+2=0$  (Soluc: 0)

59. Dados los siguientes pares de rectas, hallar  $m$  para que sean paralelas y calcular su distancia:

- a)  $3x-4y+1=0$  (Soluc:  $m=-6$ ;  $d=6/5$ )  
 $mx+8y-14=0$
- b)  $4x-3y+1=0$  (Soluc:  $m=-8$ ;  $d=3/5$ )  
 $mx+6y+4=0$
- c)  $mx+y=12$  (Soluc:  $m=-4/3$ ;  $d=107/15$ )  
 $4x-3y=m+1$

### ÁREA DEL TRIÁNGULO:

60. a) Calcular el área del triángulo de vértices A(1,2), B(-1,4) y C(2,0) (Soluc:  $1 u^2$ )  
b)    ""    ""    ""    ""    A(2,-1), B(-5,1) y C(0,3) (Soluc:  $12 u^2$ )
61. Determinar el área del paralelogramo OABC y las ecuaciones de los lados AB y BC sabiendo que OA es la recta de ecuación  $x-2y=0$ , OC tiene de ecuación  $3x+y=0$  y las coordenadas de B son (3,5) (Soluc:  $14 u^2$ ; AB:  $3x+y-14=0$ ; BC:  $x-2y+7=0$ )

### Problemas varios:

62. TEORÍA: a) Si la distancia entre dos rectas es cero, ¿podemos afirmar que son secantes?  
b) Sean  $r(A, \vec{u})$  y  $s(B, \vec{u})$  dos rectas paralelas (por tener el mismo vector director).  
¿Es cierto que  $d(r,s)=d(A,B)$ ?  
c) ¿Cómo son las pendientes de dos rectas perpendiculares? ¿Y si las rectas son paralelas?
63. TEORÍA: Estudiar si los siguientes pares de rectas son la misma recta:  
a)  $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$      $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \end{cases}$      $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 + 7\lambda \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$      $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}$   
(Soluc: Sí, NO, NO)
- \* 64. Hallar la ecuación de las dos rectas paralelas de pendiente  $3/4$  que distan 2 unidades del punto (2,3) (Ayuda: se recomienda hacerlo en forma explícita)
- \* 65. Hallar las dos bisectrices del ángulo formado por  $r: 4x+3y-5=0$  y  $s: 3x+4y-2=0$ . Comprobar que se trata de dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que  $r$  y  $s$ .  
(Soluc:  $x-y-3=0$ ;  $x+y-1=0$ )
66. TEORÍA: Demostrar que cualquier mediana siempre separa dos triángulos de igual superficie.