OPCIÓN A

1. La Agencia Espacial Europea lanzó el pasado 27 de Marzo dos satélites del Sistema de Navegación Galileo. Dichos satélites de masa 1,5 toneladas cada uno, orbitan ya a 22 322 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

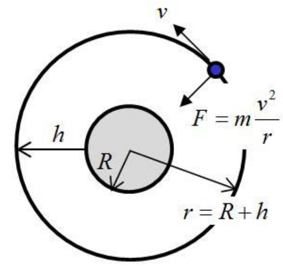
a) El valor de la velocidad orbital y el período de cada satélite

b) La energía que posee cada satélite en su órbita

c) La variación de energía potencial que experimentaron al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en dicha órbita

Datos: 1 tonelada = 1000 kg; $M_{TIERRA} = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; R_{TIERRA} = 6370 km.

a) La fuerza centrípeta que mantiene a cada satélite en su órbita es la fuerza de gravitación universal, que será la misma para cada uno de ellos por tener igual masa y estar a la misma distancia del centro de la Tierra. Igualamos para calcular la velocidad de los satélites (en la figura se representa uno de ellos).



$R = 6370$ km; $h = 22322$ km

$$F = m\frac{v^2}{r} = G\frac{M\cdot m}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.98\cdot 10^{24}}{(6370+22322)\cdot 10^3}} = 3728.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El periodo de cada satélite es el tiempo que tarda en recorrer la longitud de la órbita, una circunferencia de $(6370 + 22322)$km de radio dividida por su velocidad:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\,(6370+22322)\cdot 10^3}{3728.5} = 48351.2\text{ s} = 13.43\text{ h}$$

b) Energía mecánica de cada satélite: valor negativo (sistema ligado)

$$E = -G\frac{M\cdot m}{2r} = -6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.98\cdot 10^{24}\cdot 1500}{2\,(6370+22322)\cdot 10^3} = -1.04\cdot 10^{10}\text{ J}$$

c) Para cada satélite el incremento de energía potencial es la diferencia entre la energía potencial en la órbita y la energía potencial en la superficie:

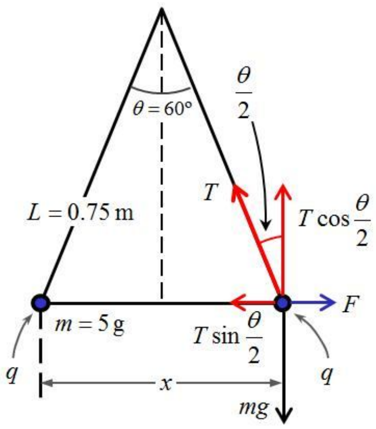
$$EP_{superf} = -G\frac{M\cdot m}{R} = -6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.98\cdot 10^{24}\cdot 1500}{6370\cdot 10^3} = -9.39\cdot 10^{10}\text{ J}$$

$$EP_{órbita} = -G\frac{M\cdot m}{r} = -6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.98\cdot 10^{24}\cdot 1500}{2\,(6370+22322)\cdot 10^3} = -2.09\cdot 10^{10}\text{ J}$$

$$\Delta EP = -GM\cdot m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) = (-2.09+9.39)\cdot 10^{10} = 7.31\cdot 10^{10}\text{ J}$$

OPCIÓN A

2. Dos pequeñas esferas de 5 g de masa cada una y la misma carga q, se cuelgan suspendidas del mismo punto mediante hilos iguales de masa despreciable e igual longitud L = 75 cm. Calcula cuál debe ser el valor de la carga para que los hilos formen entre sí 60º al alcanzar el equilibrio. ¿Cuál es entonces el valor de la fuerza de repulsión entre las bolitas y la tensión de cada hilo?
Dato: k = 9·10^9 N·m^2·C^{-2}; g= 9,8 m/s^2



Para mantenerse en equilibrio tanto la suma de fuerzas horizontales como verticales actuando sobre cada bolita debe ser cero.
Fuerzas verticales sobre cada bolita: su peso dirigido hacia abajo debe ser compensado por la componente vertical de la tensión:

$$mg = T\cos\frac{\theta}{2} \quad T = \frac{mg}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 9.8}{\cos 30º} = 5.66\cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

La situación es simétrica, la tensión en ambos hilos es la misma.
Fuerzas horizontales: la componente horizontal de la tensión puede calcularse una vez conocida ésta:

$$T\sin\frac{\theta}{2} = 0.057\cdot\sin 30 = 2.83\cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

Véase que se mantendrá el equilibrio que indica el enunciado si esta componente horizontal es igual a la fuerza de repulsión, por lo tanto $F = T\sin\frac{\theta}{2} = 2.83\cdot 10^{-2}$ N
El origen de la fuerza F que acabamos de calcular es la repulsión electrostática entre las cargas, que se producirá por ser las dos del mismo signo. Sea q el valor absoluto de esa carga; entonces, teniendo en cuenta que la distancia entre las cargas en equilibrio es $x = 2L\sin\frac{\theta}{2}$ y de acuerdo con la ley de Coulomb tenemos:

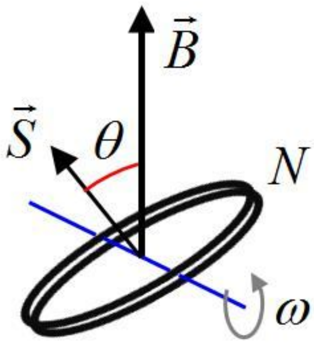
$$F = k\frac{q^2}{x^2} \rightarrow q = x\sqrt{\frac{F}{k}} = 2L\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{F}{k}}$$

$$q = 2\cdot 0.75\sin 30º\sqrt{\frac{5.66\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^{9}}} = 1.33\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

Observación: el valor de q que hemos calculado es el valor absoluto; las dos cargas pueden ser ambas positivas o ambas negativas.

OPCIÓN A

3. Una bobina de 300 espiras circulares de 2 cm de radio gira en un campo magnético uniforme de 0,5 T. ¿Cuál debería ser su frecuencia para inducir una fuerza electromotriz máxima de 12 V?



El flujo magnético a través de las N = 300 espiras de la bobina es $\Phi = \vec{B} \cdot N\vec{S}$.
Cuando la bobina gira dentro del campo magnético con velocidad angular ω, la relación entre el ángulo θ que forman $\vec{B}$ y el vector superficie $\vec{S}$ es $\theta = \omega t$ y la fuerza electromotriz inducida es (Faraday)

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -NBS\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = NBS\omega \sin \omega t$$

La fuerza electromotriz máxima es

$$\epsilon_{max} = NBS\omega \rightarrow \omega = \frac{\epsilon_{max}}{NBS}$$

Relación entre frecuencia f y ω $\rightarrow$ $\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon_{max}}{NBS}$

$$f = \frac{12}{2\pi \cdot 300 \cdot 0.5 \cdot \pi \cdot 0.02^2} = 10.13 \text{ Hz}$$

4. Una conocida marca de electrodomésticos, lanza al mercado una nueva lavadora a la que caracterizan como "silenciosa" argumentando que el nivel de intensidad emitido por la misma es de 49dB. ¿cuál será la intensidad de ese sonido en W/m^2?. Compara la misma con el sonido de llamada de un teléfono cuyo timbre es de 70dB.
Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Lavadora $\rightarrow$ $L_1 = 49 = 10 \log\frac{I_1}{I_0} \rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{4.9} = 7.94 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Teléfono $\rightarrow$ $L_2 = 70 = 10 \log\frac{I_2}{I_0} \rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{5} = 10^{-5}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Relación de intensidades: $\rightarrow$ $I_2/I_1 = 126$

Se observa una intensidad más de cien veces mayor en el timbre del teléfono, por lo que efectivamente la lavadora puede considerarse silenciosa.

OPCIÓN A

5. Se sabe que la frecuencia umbral del potasio es 4,5·10^{14} Hz. Calcula la velocidad máxima con que los electrones de dicho metal son emitidos, al hacer incidir sobre la placa un haz de frecuencia 6·10^{14} Hz
Datos: h = 6,63·10^{-34} J·s; m$_{electrón}$ = 9,1·10^{-31} kg

La energía recibida de la radiación (hf) se emplea en desligar los electrones (hf_0) y en imprimirles energía cinética $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

$$hf = hf_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

La velocidad máxima que pueden adquirir será

$$v = \sqrt{\frac{2h(f - f_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34}(6.0 - 4.5) \cdot 10^{14}}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = 4.68 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

6.- Se estudia la refracción en el laboratorio, haciendo incidir un rayo de luz desde el aire sobre una superficie de vidrio. Anotamos en una tabla los ángulos de incidencia y de refracción que vamos obteniendo. Calcula el índice de refracción del vidrio. ¿En qué ley física nos basamos para hacerlo?

$\hat{\imath}$	$\hat{r}$
20º	**12º**
30º	**18º**
40º	**23º**
50º	**29º**

La ley de la refracción o ley de Snell $n_i \sin i = n_r \sin r$ establece la relación entre los ángulos de incidencia y refracción cuando la luz pasa de un medio a otro. En este caso para el paso del aire (índice n_i = 1) al vidrio (índice n_r = n) tenemos $n = \frac{\sin i}{\sin r}$

Calculamos los senos de los ángulos y calculamos valores de *n*. Después hacemos la media.

i	*r*	sen *i*	sen *r*	*n*
20	12	0,3420	0,2079	1,65
30	18	0,5000	0,3090	1,62
40	23	0,6428	0,3907	1,65
50	29	0,7660	0,4848	1,58
			Promedio =	1,62

OPCIÓN B

1. Una onda armónica transversal de amplitud 4 cm y longitud de onda 2 cm se propaga a través de un medio elástico a 25 cm/s en el sentido negativo del eje X. La elongación del punto x = 0 en el instante t = 0 es 4 cm.

a) Calcular el período y escribir la ecuación de esta onda.

b) ¿Cuál es la máxima velocidad de vibración que alcanza un punto cualquiera del medio elástico en que se propaga la onda?

c) Calcula el desfase entre dos puntos separados 0,5 cm.

a) Periodo y ecuación de onda

A = 4 cm; λ = 2 cm; v = 25 cm/s $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2}{25} = 0.08 \text{ s} \rightarrow f = 12.5 \text{ Hz}$

Parámetros de la onda $\omega = \frac{2\pi}{T} = 25\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.02} = 100\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \delta)$ $\sin\delta = \frac{y(0,0)}{A} = \frac{4 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 1 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$ rad

$y(x,t) = 0.04\sin\left(100\pi x + 25\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ con x, y en m, t en s.

b) Vibración de los puntos del medio

$\dot{y}(x,t) = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(kx + \omega t + \delta)$ Valor máximo $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{máx} = |-A\omega| = \pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) Desfase entre dos puntos separados $\Delta x = 0.5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$\Delta\phi = \frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi = \frac{5\cdot 10^{-3}}{0.02} 2\pi = \frac{\pi}{2}$ rad (un cuarto longitud de onda)

OPCIÓN B

2. Un protón es acelerado con una diferencia de potencial de 10^4 V y seguidamente se introduce en el interior de un campo magnético de 5 T donde describe una trayectoria circular en sentido horario.

a) Calcular la velocidad del protón a la entrada del campo magnético.

b) Determinar la dirección inducción magnética y valor del radio de la trayectoria.

c) Si hubiéramos introducido un electrón en el mismo acelerador y con las mismas condiciones, ¿qué radio tendría su órbita?

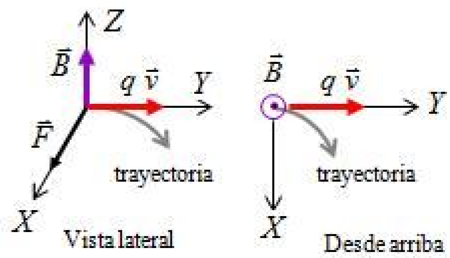
Datos: $m_{protón}$ = 1,673·10^{-27} kg; $m_{electrón}$ = 9,1·10^{-31} kg; $|q_{electrón}|$ = $|q_{protón}|$ = 1,6·10^{-19} C

a) La energía adquirida gracias a la ddp a la que se somete se convierte en energía cinética. Esto nos permite calcular su velocidad a la entrada del campo magnético:

$$E = q \cdot \Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\cdot\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\cdot 10^4}{1.673\cdot 10^{-27}}} = 1.38 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) El hecho de que el protón describa una trayectoria circular, que está confinada en un plano, implica que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí.

Puesto que la carga del protón es positiva, la fuerza magnética que actúa sobre él tendrá el mismo sentido que el producto vectorial dado por $q\vec{v} \times \vec{B}$.



Tomemos el eje Y positivo como la dirección y sentido de la velocidad del protón entrante en el campo magnético (inducción magnética $\vec{B}$).

Si elegimos el eje Z como el eje perpendicular con el que está alineado el campo magnético, para que el giro del protón tenga sentido horario visto desde arriba se requiere que el campo magnético esté dirigido en la dirección y sentido positivo del eje Z (regla de la mano derecha).

Radio de la trayectoria: el módulo de la fuerza magnética constituye la fuerza centrípeta que le hace describir su órbita, por lo tanto $F = qv \cdot B = m\frac{v^2}{R}$

Despejando $R = \frac{mv}{qB} = \frac{1.673\cdot 10^{-27}\cdot 1.38\cdot 10^6}{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 0.5} = 2.892 \cdot 10^{-3}$ m

c) Si en lugar de introducir un protón introdujésemos un electrón en este campo magnético, el giro sería antihorario visto desde arriba, por ser negativa la carga. Además, se cumpliría que $v_e = \sqrt{\frac{2q\cdot\Delta V}{m_e}}$ y $R = \frac{m_e v_e}{qB}$, por lo que el radio de la órbita del electrón puede expresarse en función de la masa (lo único que varía) siendo todo lo demás igual: $R_e = \sqrt{\frac{2m_e\cdot\Delta V}{q\cdot B^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}\cdot 10^4}{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 5^2}} = 6.76 \cdot 10^{-5}$ m

OPCIÓN B

3. Si la masa de un satélite es 100 veces menor que la masa del planeta alrededor del cual orbita, y el radio del satélite es 4 veces más pequeño; ¿qué relación guardan las velocidades de escape de un objeto desde ambas superficies?

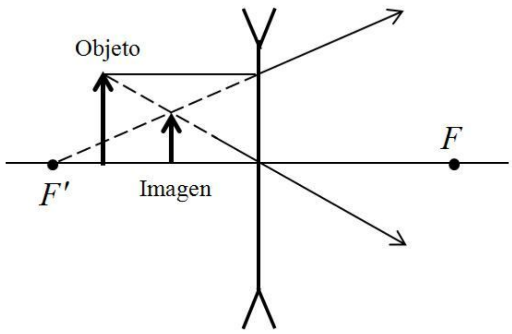
Velocidad de escape:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \rightarrow \; v_P = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} \quad \rightarrow \; v_S = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S}} \quad \rightarrow \; \frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{M_P}{R_P}\frac{R_S}{M_S}} = \sqrt{\frac{M_P}{M_S}\frac{R_S}{R_P}}$$

De acuerdo con el enunciado $\frac{M_P}{M_S} = 100$ y $\frac{R_S}{R_P} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{v_P}{v_S} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{25} = 5$

La velocidad de escape desde la superficie del planeta será 5 veces mayor que la velocidad de escape desde la superficie del satélite.

4. Se examina un pequeño objeto a través de una lente divergente. El objeto está colocado entre la lente y el foco. Realizar un esquema de rayos y explicar de qué tipo es la imagen que se forma.



La imagen se forma en el punto, situado a la izquierda de la lente, en que concurren las prolongaciones de los rayos refractados (indicadas con trazo discontinuo). Por lo tanto es una imagen **virtual**. Véase además que es derecha (igual orientación que el objeto) y menor que éste.

5. Se dispone de una muestra de 10^{20} núcleos de radioisótopos, con un período de semidesintegración de 8,02 días. ¿Cuántos núcleos quedarán después de 20 días?

Conociendo el periodo de semidesintegración calculamos la constante radiactiva:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{8.02} = 0.0864 \text{ dia}^{-1}$$

Núcleos que quedan al cabo de *t* = 20 días

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = 10^{20} e^{-0.0864t} = 1.77 \cdot 10^{19} \text{ núcleos}$$

6. Con el objetivo de calcular experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad en el laboratorio del instituto, construimos un péndulo simple colgando una bolita de un hilo de 120 cm de longitud y haciéndola oscilar. Tras separar la bolita de su posición de equilibrio, y una vez estabilizadas las pequeñas oscilaciones, se mide el tiempo que tarda en efectuar 10 oscilaciones completas. Realizada cuatro veces la experiencia, conseguimos los resultados que aparecen en la tabla. Determina con ellos el valor que se obtiene de la aceleración de la gravedad.

EXPERIENCIA	TIEMPO (s)
1	21,8
2	22,1
3	21,9
4	22,0

Periodo de un péndulo simple: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ Longitud *L* = 1,20 m

Aceleración de la gravedad en función de longitud y periodo $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

Experiencia	t 10 osc (s)	T (s)	g (m/s^2)
1	21,8	2,18	9,97
2	22,1	2,21	9,70
3	21,9	2,19	9,88
4	22,0	2,2	9,79
		Promedio =	9,83