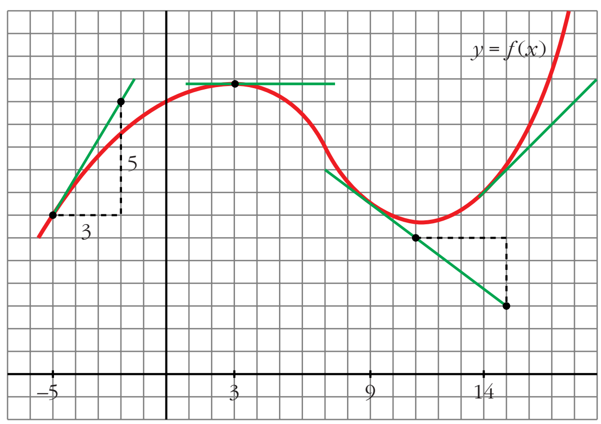
6 DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Página 152

Tangentes a una curva



■ **Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.**

$f'(3) = 0$; $f'(9) = \dfrac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

■ **Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.**

La derivada también es positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

■ **Di otro punto en el que la derivada sea cero.**

La derivada también es cero en $x = 11$.

■ **Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.**

La derivada también es negativa en $x = 4$, $x = 5$…

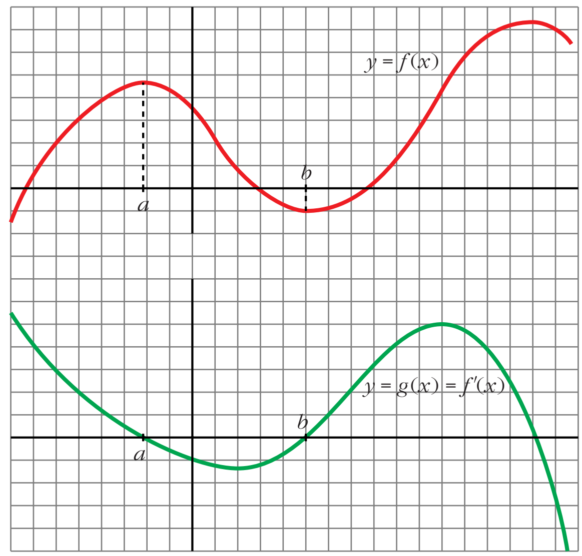
■ **Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".**

Por ejemplo, en el intervalo $[-5, 2]$ se cumple que, si $x \in [-5, 2]$, entonces $f'(x) > 0$.

Página 153

Función derivada

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



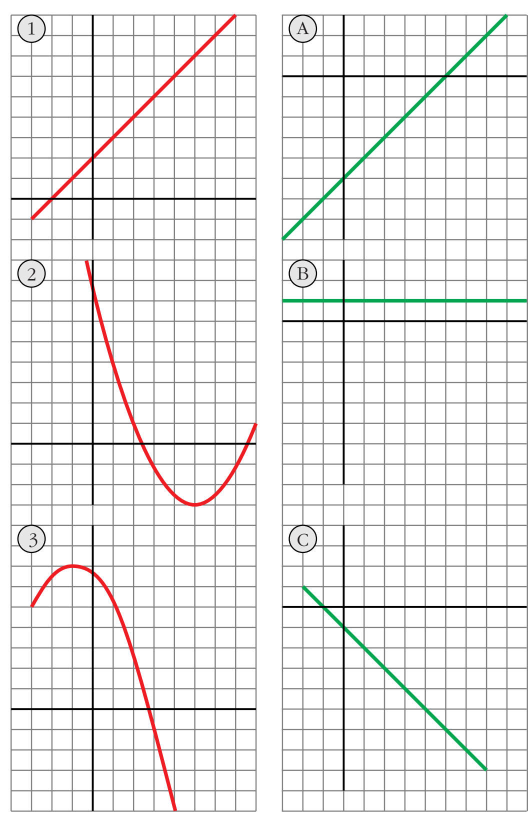
  - En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
  - La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
  - En general:

    $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

    $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

    $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

- **Las tres gráficas de abajo, A, B, y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2, y 3, pero en otro orden. Responde razonadamente cuál es la de cada cual.**



1) B

2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

Página 155

1. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en $x_0 = 2$?**

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1$

La funcón no es continua en $x = 2$, pues $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Por tanto, tampoco es derivable en $x = 2$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 8, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en $x_0 = 2$?**

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 8) = -4$

La función es continua, pues: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -4$.

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$f'(2^-) = -3 \ne f'(2^+) = 4$

Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Página 159

1. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

c) $f(x) = ln\,\dfrac{1 - x}{1 + x}$

d) $f(x) = \dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sen\sqrt{x + 1} \cdot cos\sqrt{x - 1}$

k) $f(x) = 7^{sen\,(x^2 + 1)}$

l) $f(x) = sen\,(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1 + x) - (1 - x) \cdot 1}{(1 + x)^2} = \dfrac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} = \dfrac{-2}{(1 + x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2} = \frac{-2(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)^2} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\ (1 - x) - ln\ (1 + x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{-1 - x - 1 + x}{1 - x^2} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1 + tg^2\,x)(1 + tg\,x) - (1 - tg\,x) \cdot (1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1 + tg^2\,x)[-1 - tg\,x - 1 + tg\,x]}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1 + tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1 + tg\,x)^2} \cdot (1 + tg^2\,x) = \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\,x)}{\sqrt{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = ln\ \sqrt{e^{tg\,x}} = ln\ e^{(tg\,x)/2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\ 3 = \dfrac{ln\ 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\big[log\,(sen\,x + log\,(cos\,x))\big]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\,x}{sen\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} + \frac{-sen\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10}\right] = \frac{2}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2 x - sen^2 x}{sen\,x \cdot cos\,x} =$$

$$= \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2 x - sen^2 x}{2sen\,x \cdot cos\,x} = \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{sen\,2x} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

De otra forma:

$$f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\,log\left(\frac{sen\,2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{\frac{sen\,2x}{2}} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

i) $f(x) = sen^2 x + cos^2 x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sen\sqrt{x+1} \cdot (-sen\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sen\sqrt{x+1} \cdot sen\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = 7^{sen\,(x^2+1)} \cdot ln\,7 \cdot D\big[sen\,(x^2+1)\big] = 7^{sen(x^2+1)} \cdot ln\,7 \cdot 2x \cdot cos\,(x^2+1)$

l) $$f'(x) = cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

m) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{sen\,x + x^2 + 1}} \cdot (cos\,x + 2x) = \frac{cos\,x + 2x}{2\sqrt{sen\,x + x^2 + 1}}$$

n) $$f'(x) = 2cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sen\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \frac{1 + 2(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{-2\,cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\;sen\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x-5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5-2x) \cdot sen\left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$$

2. **Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:**

a) $y = x^5$ **b)** $y = x \cos x$ **c)** $y = sen^2\, x + \cos^2 x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x \cos x$

$y' = \cos x - x\, sen\, x$

$y'' = -sen\, x - sen\, x - x \cos x = -2 sen\, x - x \cos x$

$y''' = -2\cos x - \cos x + x\, sen\, x = -3\cos x + x\, sen\, x$

c) $y = sen^2\, x + \cos^2 x + x = 1 + x$

$y' = 1;\ \ y'' = 0;\ \ y''' = 0$

3. **Calcula $f'(1)$ siendo: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60\,\sqrt[30]{x^{17}}}$$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. **Calcula $f'(\pi/6)$ siendo: $f(x) = (\cos^2 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x$**

$$f(x) = (\cos^2 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x = \cos 6x \cdot sen\, 6x = \frac{sen\, 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12\cos 12x}{2} = 6\cos 12x$$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \cos \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot \cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. **Calcula $f'(0)$ siendo: $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$**

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1)^2 = \frac{1}{2}\ln (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{4(2x+1)}{\sqrt{3}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} -$$

$$- \frac{8x+4}{\sqrt{3}} = \frac{-16x^3 - 24x^2 + (2\sqrt{3} - 24)x + \sqrt{3} - 8}{\sqrt{3}\,(2x^2+2x+2)}$$

Por tanto: $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}$

Página 160

1. Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\}$$

Las derivadas laterales existen y coinciden.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$

- Si $x \ne 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \rightarrow m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 164

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media (TVM) de las siguientes funciones en los intervalos: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h]**

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$

c) $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

¿En cuáles de ellas es constante la TVM? ¿Qué tipo de funciones son?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En [–3, –1] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En [0, 2] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En [2, 5] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En [1, 1 + h] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h} = -4$

b) $f(x) = 7x - 5$

En [–3, –1] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En [0, 2] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En [2, 5] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En [1, 1 + h] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{7h}{h} = 7$

c) $f(x) = 3$

En [–3, –1] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En [0, 2] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En [2, 5] → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En $[1, 1 + h]$ $\rightarrow$ $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En $[-3, -1]$ $\rightarrow$ $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En $[0, 2]$ $\rightarrow$ $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En $[2, 5]$ $\rightarrow$ $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{28}{3}$

En $[1, 1 + h]$ $\rightarrow$ $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2 \cdot (2h^2 - 1)}{h}$

La función b) $f(x) = 7x - 5$ es una función afín y la T.V.M. es constante.

La función c) $f(x) = 3$ es una función afín y la T.V.M. es 0 (constante).

2 **Halla la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[2, 2 + h]$ y, con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.**

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $[2, 2 + h]$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 0^-} (-h + 1) = 1$$

3 **Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{2}$ **b) $f(x) = x^2 - 4$** **c) $f(x) = (x - 5)^2$** **d) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x}$**

a) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3h/7)}{h} = \dfrac{3}{7}$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} = 6$

c) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = -4$

d) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{9h + 3h^2} = \dfrac{-2}{9}$

4 **Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2}$ **b) $f(x) = 3x^2 - 1$** **c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$** **d) $f(x) = x^2 - x$**

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{5h}{2}}{h} = \dfrac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 - 6xh}{h} = 6x$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{(x-2) \cdot (x+h-2) \cdot h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{(x-2) \cdot (x+h-2)} = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$

5 **Calcula, aplicando la definición de derivada, $f'(2)$, $f'(-1)$ y $f'(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.**

- $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2+h-1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1+h}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2+2h-2-h}{2(2+h)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{2(2+h)h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2(2+h)} = \dfrac{1}{4}$

- $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-1+h-1}{-1+h} - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1+h-1+2-2h}{(-1+h)h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{(-1+h)h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{-1+h} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

- $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x^2 + xh - x - x^2 + x - xh + h}{(x+h)x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{(x+h)xh} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{(x+h)x} = \dfrac{1}{x^2}$

6 **Comprueba, utilizando la definición de derivada, que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.**

Intentamos hallar $f'(0)$ usando la definición de derivada:

$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$. Por tanto, $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.

7 **Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo [2; 2,001] y comprueba que su valor está muy próximo a e^2.**

$$\text{T.V.M. } [2;\ 2{,}001] = \frac{f(2{,}001) - f(2)}{2{,}001 - 2} = \frac{e^{2{,}001} - e^2}{0{,}001} \simeq 7{,}3928$$

$e^2 \simeq 7{,}3891$. Los dos valores están muy próximos.

8 **Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, halla $f'(1)$ y $f'(3)$ utilizando la definición de derivada.**

- $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(1+h) - 3] - (-1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 2h - 3 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$

- $$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h - 1) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 1 - 2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Reglas de derivación

9 **Calcula la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x + 1}{(2 - x)^2}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$ **d)** $y = \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^4$

a) $$y' = \frac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

b) $$y' = \frac{(2 - x)^2 + (x + 1) \cdot 2(2 - x)}{(2 - x)^4} = \frac{x + 4}{(2 - x)^3}$$

c) $$y' = \frac{6x \cdot (x + \sqrt{x}) - 3x^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{9x^2 + 6x^2 \cdot \sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x})^2}$$

d) $$y' = \frac{-4}{10} \cdot \left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)^3 = \frac{-2}{5} \cdot \left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)^3$$

10 **Halla la derivada de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$ **b)** $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$ **c)** $y = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ **d)** $y = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

a) $$y' = \frac{3x^2 \cdot (x + 1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{x^2 \cdot (x + 3)}{(x + 1)^3}$$

b) $$y' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

c) $y' = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

d) $y' = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

11 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = e^{4x}(x-1)$ **b)** $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x}$ **c)** $y = \sqrt{2^x}$ **d)** $y = \ln(2x-1)$

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

12 **Deriva estas funciones:**

a) $y = \ln(x^2-1)$ **b)** $y = \ln\sqrt{1-x}$ **c)** $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$ **d)** $y = \operatorname{sen}^2 x^2$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2(1-x)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \dfrac{1 - x \cdot \ln x}{x \cdot e^x}$

d) $y' = 2x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 = 4x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2$

13 **Calcula la derivada de estas funciones:**

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

14 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{sen\ x^2}$ **c)** $y = \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ **d)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y = \log_2 1 - \log_2 x$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

b) $y' = \dfrac{2x \cdot \cos x^2}{3\sqrt[3]{sen^2\ x^2}}$

c) $$y' = \frac{\dfrac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{\dfrac{4}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} =$$

$$= \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$$

d) $$y' = \frac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

15 **Halla la derivada de:**

a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ **b)** $y = \ln \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

c) $y = \ln (sen \sqrt{e^x})$ **d)** $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

a) $y = \sqrt[4]{x^3} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \big(\ln x - \ln (x+1)\big)$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

c) $y' = \dfrac{e^{x/2} \cdot \cos \sqrt{e^x}}{2 \cdot sen \sqrt{e^x}}$

d) $$y' = \frac{\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1) \cdot (x+1)^3}}$$

Continuidad y derivabilidad

16 **Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican, y represéntalas:**

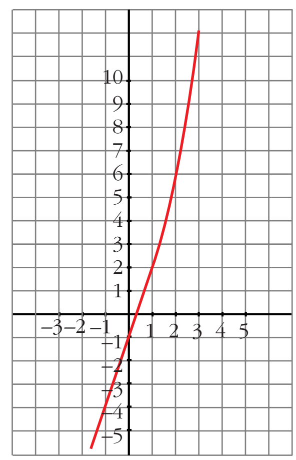
a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **en** $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **en** $x = 3$ **d)** $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

a) **Continuidad en** $x = 1$**:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Gráfico:



Derivabilidad en $x = 1$**:**

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 3 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ y } f'(1) = 3.$$

b) **Continuidad en** $x = 0$**:**

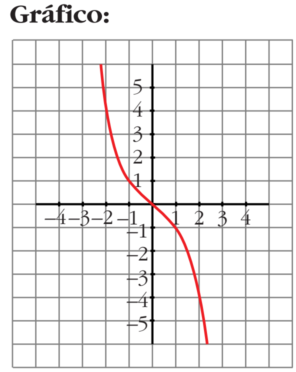
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad en $x = 0$**:**

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es derivable en } x = 0 \text{ y } f'(0) = 0.$$

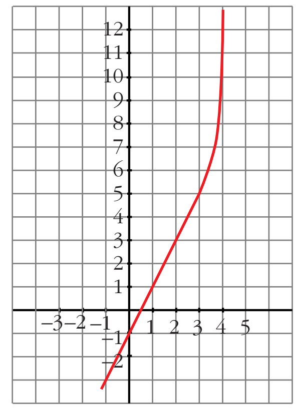
Gráfico:



c) **Continuidad en $x = 3$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 4) = 5 \\ f(3) = 5 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 3.$$

Gráfico:



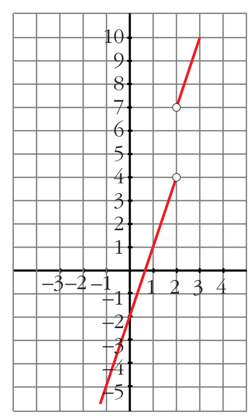
Derivabilidad en $x = 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 2 \\ f'(3^+) = 6 \end{array}\right\} \; f(x) \textit{ no } \text{es derivable en } x = 3.$$

d) **Continuidad en $x = 2$:**

Gráfico:



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x + 1) = 7 \end{array}\right\}$$

$f(x)$ no es continua en $x = 2$ (tiene una discontinuidad de salto finito).

Derivabilidad en $x = 2$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 2$, tampoco es derivable en ese punto.

17 **Comprueba que $f(x)$ es continua, pero no derivable, en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x - 1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = 3 \end{array}\right\}$ Como las derivadas laterales no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

18 S **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \ \ x < 0 \\ x^2 & \text{si} \ \ 0 \le x < 1 \\ x & \text{si} \ \ x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \ \ x < 0 \\ 2x & \text{si} \ \ 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \ \ x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

19 **Prueba que la función $f(x) = |x + 1|$ no es derivable en $x = -1$.**

Continuidad en $x = 2$:

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

$f(x)$ es una función continua, pues es la composición de dos funciones continuas. Su derivada, si $x \ne -1$, es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = -1$ son:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = -1 \\ f'(-1^+) = 1 \end{array} \right\}$$ No coinciden; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

20 **Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \ne 1$ $\to$ $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

En $x = 1$ $\to$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\}$$ $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Derivabilidad:

Si $x \ne 1$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right\}$$ No coinciden, luego, $f(x)$ *no* es derivable en $x = 1$.

21 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}}$$

Continuidad:

Si $x \neq 0$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0^-) = -1 \\ f'(-0^+) = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Coinciden, luego, } f(x) \text{ es derivable} \\ \text{en } x = 0. \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ es una función derivable.

22 **¿En qué puntos no es derivable la función $f(x) = |x^2 - 4|$?**

$f(x)$ es una función continua, pues es la composición de funciones continuas. La definimos a trozos:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si $x \neq -2$ y $x \neq 2$, $f'(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right\} f(x) \textit{ no} \text{ es derivable en } x = -2.$$

En $x = 2$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\} \quad f(x) \ \textit{no} \text{ es derivable en } x = -2.$$

Por tanto, $f'(x)$ no es derivable en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

PARA RESOLVER

23 **Dada** $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **:**

a) Calcula $f'(1)$ y $f'(3)$.

b) Comprueba que $f'(2^-) \ne f'(2^+)$.

Si $x \ne -2$: $f'(x)$ es una función continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = 5 \\ f(2) = 5 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Si $x \ne 2$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

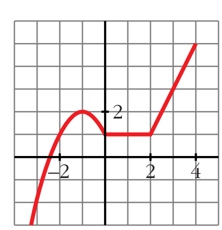
a) $f'(1) = 3$; $f'(3) = 6$

b) $\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 3 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\}$ no coinciden

24 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Observándola, di el valor de:**

$$f'(-1),\ f'(1) \ \text{y} \ f'(3)$$

¿En qué puntos no es derivable?



$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

25 **¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$$y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } \ x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le 4 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } \ x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } \ x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } \ x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \ \rightarrow \ y'(-4^-) = -2 \ne y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \ \rightarrow \ y'(-2^-) = -2 \ne y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$. Son dos puntos "angulosos".

26 S **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1x & \text{si } \ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \ne 2$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$, o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

Si $x \ne 2$ $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } \ x < 2 \\ 2x - b & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$$

En $x = 2$:

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

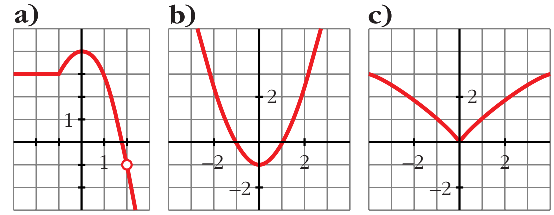
Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

Por tanto, para que $f'(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

27 **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.**

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

28 **S** **La función $f(x)$ está definida por:** $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$: $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^3 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0^-) = -1 \\ f'(-0^+) = a \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f'(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

29 **S** **La función $f(x)$ está definida de la siguiente manera:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$ $\to$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

En $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)\, f(0). \\ \text{No es continua en } x = 3. \end{array}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$. Es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x > 3 \end{cases}$$

En $x = 0$

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 0 \quad \to \quad$ No es derivable en $x = 0$.

En $x = 3$ $\to$ No es derivable pues no es continua.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$.

Página 166

30 **Averigua para qué valores de x es $f'(x) = 0$ en cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2(3x - 8)}{12}$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **d)** $f(x) = e^x(x - 1)$

a) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 8x^2}{12} \quad \to \quad f'(x) = \dfrac{9x^2 - 16x}{12}$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 9x^2 - 16x = 0 \quad \to \quad x(9x - 16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{16}{9} \end{cases}$$

b) $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x\,(x^2 + 1)$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 4x(x^2 + 1) = 0 \quad \to \quad x = 0$

c) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

d) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x \cdot 1 = e^x\ (x - 1 + 1) = e^x\ x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

31 **Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es igual a 0 en cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Debemos hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$ en cada caso:

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -4x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = -1$ Punto $(0, -1)$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^4 - 3x^2 = 0 \quad \to \quad x^2(x^2 - 3) = 0$

$x = 0 \quad \to \quad (0, 0)$

$x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{3} \quad \to \quad \left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \\ x = \sqrt{3} \quad \to \quad \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

c) $f'(x) = \dfrac{(4x - 3)(2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$

$= \dfrac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x^2 + 8x - 6 = 0 \quad \to \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 1 \quad \to \quad (1, -1) \\ x = 3 \quad \to \quad (3, -9) \end{cases}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \quad \to \quad (-1, -2) \\ x = 1 \quad \to \quad (1, 2) \end{cases}$

32 **Averigua si en las siguientes funciones existen puntos en los que $f'(x) = 0$:**

a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ **c)** $f(x) = ln\,(x + 1)$ **d)** $f(x) = 10 - (x - 2)^4$

a) $f'(x) = \dfrac{2(x + 1) - (2x - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{5}{(x + 1)^2}$

$f'(x) \neq 0$ para cualquier valor de x.

b) $f'(x) = \dfrac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1, -3) \\ x = 1 \rightarrow (1, 3) \end{cases}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \neq 0$ para cualquier valor de x.

d) $f'(x) = -4(x-2)^3$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 10)$

33 **Las siguientes funciones tienen algún punto donde la derivada no existe. Hállalos en cada caso:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = |x-3|$ **e)** $f(x) = \left|\dfrac{4x-5}{2}\right|$ **f)** $f(x) = |x^2 - 2x|$

a) $f(x) = x^{1/3} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)$ no existe si $x = 0$; es decir, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)$ no existe si $x = -2$; el dominio de $f(x)$ es $[-2, +\infty)$.
Por tanto, en los puntos en los que la función está definida, no es derivable en $x = -2$.

c) El dominio de la función es $[-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

En los puntos en los que $f(x)$ está definida, no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 3$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right\}$ Son distintas.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x+5}{2} & \text{si } x < \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{4x-5}{2} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{4} \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 5/4 \\ 2 & \text{si } x > 5/4 \end{cases}$

$f(x)$ es continuo en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = \dfrac{5}{4}$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

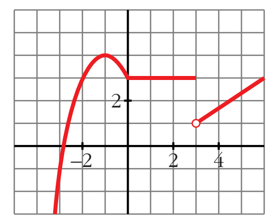
$$\left.\begin{array}{l} f'(5/4^-) = -2 \\ f'(5/4^+) = 2 \end{array}\right\}\ \text{Son distintas}$$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

$f(x)$ es continuo en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 0$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\}\ \text{Son distintas} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array}\right\}\ \text{Son distintas}$$

34 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Estudia su continuidad y derivabilidad.**



$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. En $x = 3$ presenta una discontinuidad de salto finito.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$. En $x = 0$ hay un punto anguloso (las derivadas laterales no coinciden) y en $x = 3$ no es continua, por tanto, no puede ser derivable.

35 **Considera la función:** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

Continuidad:

- **Si $x \ne 1$:** $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $-4 + m = -1 + n$.

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 1$:** $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x + n & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:** Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales han de coincidir, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}\ -3 = -2 + n$$

Uniendo las dos condiciones anteriores tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} -4+m=-1+n \\ -3=-2+n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} m=n+3 \\ n=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} m=2 \\ n=-1 \end{array}$$

36 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x \le 1 \\ x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x)=0$? Represéntala gráficamente.

Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2+2x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos en los que $f'(x) = 0$:

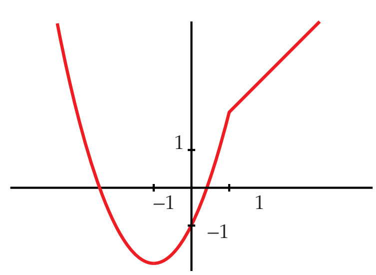
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \ \rightarrow \ f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

Gráfica de $f(x)$:



37 **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.
- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser} \\ -2 + a = -a + b, \text{ es decir: } b = 2a - 2. \end{array}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } b = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

38 **Calcula $f'(0)$, siendo $f(x) = ln \sqrt{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2x + 1}}$.**

☛ ***Aplica las propiedades de los logaritmos antes de derivar.***

Hallamos $f'(x)$ y después sustituimos en $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[ln\,(e^x + e^{-x}) - ln\,(2x + 1)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{2}{2x + 1}\right]$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} = (-2) = -1$$

39 **Halla la pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:**

a) $\boldsymbol{y = sen\ x\ cos\ x}$ **en** $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$ **b)** $\boldsymbol{y = x\ ln\ x}$ **en** $\boldsymbol{x = e}$

c) $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{e^x}}$ **en** $\boldsymbol{x = 0}$ **y** $\boldsymbol{x = 1}$ **d)** $\boldsymbol{y = e^{x^2 - 1}}$ **en** $\boldsymbol{x = 1}$

Debemos hallar la derivada en los puntos indicados en cada caso:

a) $y' = cos\,x \cdot cos\,x + sen\,x(-sen\,x) = cos^2x + sen^2x$

$$y' = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

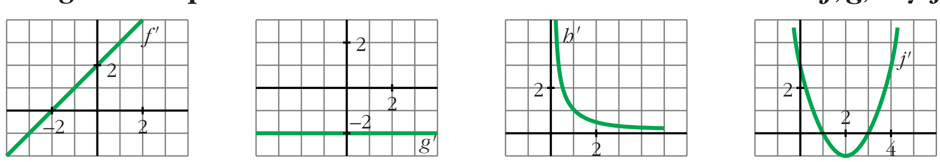
b) $y' = 1 \cdot ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x + 1;\ \ y'(e) = ln\,e + 1 = 1 + 1 = 2$

c) $y' = \dfrac{2x\,e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

$$y'(0) = 0;\ \ y'(1) = \frac{1}{e}$$

d) $y' = 2x\,e^{x^2 - 1};\ \ y' = (1) = 2$

40 **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones *f, g, h* y *j*:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

CUESTIONES TEÓRICAS

Página 167

41 **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula**
S **puede tener?**

¿Puede tener uno o ninguno?

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado.

Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto, con derivada nula.

S **Por ejemplo:**

$$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ Dos puntos}$$

$$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Un punto}$$

$$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0 \text{ para todo } x \;\rightarrow\; \text{Ninguno}$$

42 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

43 **Si una función tiene un punto anguloso en $x = a$, ¿qué podemos decir de $f'(a)$?**

$f'(a)$ no existe.

44 **Sea f una función de la que sabemos que:**

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -1 \qquad f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

¿Es f derivable en $x = 2$?

No, pues las derivadas laterales no coinciden.

45 **La función $f(x) = \sqrt{x-3}$ es continua en $x = 3$ y $f'(3) = +\infty$. ¿Cómo es la recta tangente a f en $x = 3$?**

Es una recta vertical.

46 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, halla $f'(x)$ y $f''(x)$ aplicando dos veces la definición de derivada.**

☛ ***Ten en cuenta que*** $f''(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$.

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(x+h)^2}{2} - \frac{x^2}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 + 2xh + h^2}{2} - \frac{x^2}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x + h}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

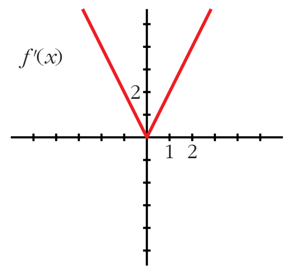
47 **Sea la función $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Halla $f'(x)$, $f''(x)$ y represéntalas.**

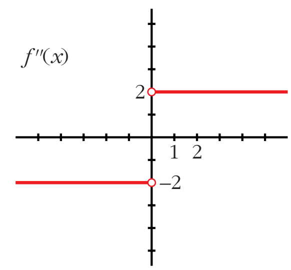
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ existe la derivada, pues $f(x)$ es continua, y, además, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ no existe la segunda derivada, $f''(0^-) \ne f''(0^+)$.





48 **Prueba que la función $f(x) = x + |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$.**

$$f(x) = \begin{cases} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \ne f'(3^+) = 2$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

49 **Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.**

$f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

$f''(x) = 2^2 \cdot e^{2x}$

…

$f''(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

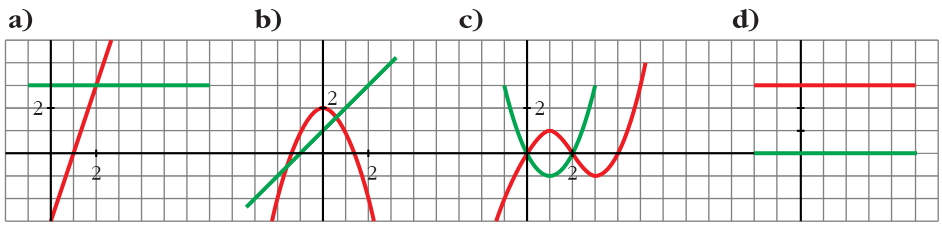
50 **Dada la función $f(x) = e^x + ln(1 - x)$, comprueba que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. ¿Será también $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x} \to f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1-x)^2} \to f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1-x)^3} \to f'''(0) = 1 - 2 = 1 \ne 0$$

51 **¿Cuál de estas gráficas representa la función f y cuál su derivada f'? Justifica tu respuesta.**



a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$. Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.

b) En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por (1, 0). Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.

d) La función es una recta de pendiente 0. Por tanto, su derivada es y = 0. Luego, estas gráficas sí representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera y la última son válidas.

52 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 0$. Calcula a, b y c.**

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\rightarrow\; 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \;\rightarrow\; 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}$$

Por tanto: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

53 **Determina el valor de k que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un solo punto en el que se verifique $f'(x) = 0$.**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + k) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + k)^2} = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + k)}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + k = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Tiene solución única cuando $4 - 4k = 0$, es decir, $k = 1$.

En tal caso, $f'(x) = 0$ solo en $x = 1$.

54 **Calcula a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto (0, 3) y verifique $f'(1) = -2$ y $f'(2) = 0$.**

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{lll} f(0) = 3 & \to & c = 3 \\ f'(1) = -2 & \to & 2a + b = -2 \\ f'(2) = 0 & \to & 4a + b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{array}$$

Por tanto: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

55 **Halla los puntos de la función $y = \dfrac{2x}{x-1}$ en los que la pendiente de la recta tangente es igual a –2.**

Buscamos los puntos en los que $f'(x) = -2$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = -2 \;\to\; \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \;\to\; -2 = -2(x-1)^2$$

$$(x-1)^2 = 1 \;\to\; x^2 - 2x + 1 = 1 \;\to\; x^2 - 2x = 0 \;\to\; x(x-2) = 0$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \;\to\; (0, 0) \\ x = 2 \;\to\; (2, 4) \end{array}$$

56 **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ -2x^3 + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - a & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Continuidad:**

Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-2x^3 + b) = 2 + b \\ f(-1) = 2 + b \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de ser $1 + a = 2 + b$.

En $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x^3 + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - a) = 1 - a \\ f(0) = 1 - a \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser $1 - a = b$.

Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a = 2 + b \\ 1 - a = b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array}$$

En este caso:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -2x^3 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si $a = 1$ y $b = 0$.

- **Derivabilidad:**

  Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ -6x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ e^x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

  En $x = -1$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -2 \\ f'(-1^+) = -6 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ } \textit{no} \text{ es derivable en } x = -1.$$

  En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ } \textit{no} \text{ es derivable en } x = 0.$$

58 **¿Existe algún punto en el que $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ no sea derivable? Justifica tu respuesta.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si} \quad x < 0 \\[2mm] \dfrac{1}{1 + x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - x} = 1 \\[3mm] \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x} = 1 \\[3mm] f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

  No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.