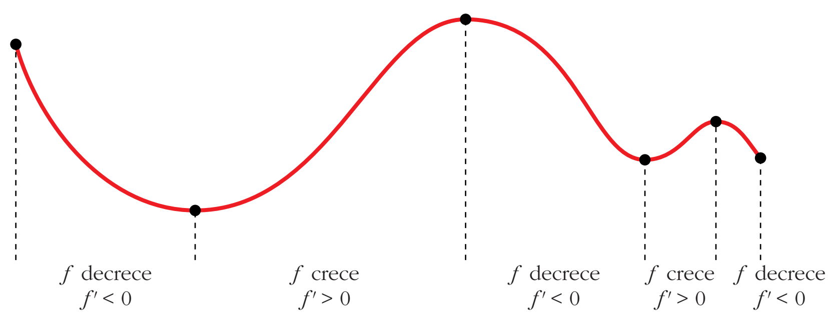
7 APLICACIONES DE LA DERIVADA

Página 168

Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

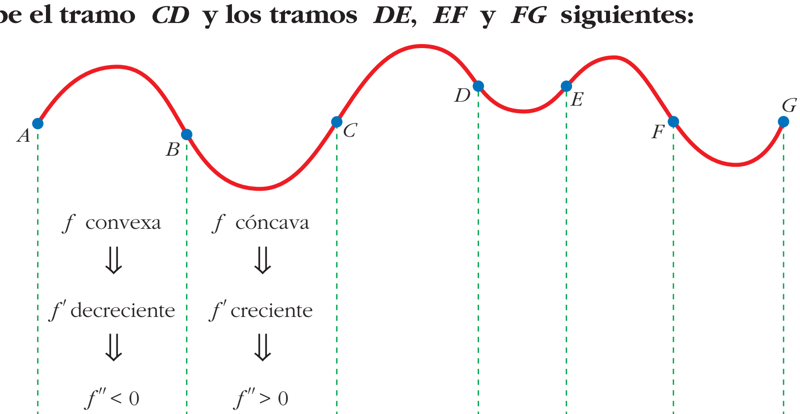
■ **Analiza la curva siguiente:**



Página 169

Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

■ **Describe el tramo *CD* y los tramos *DE*, *EF* y *FG* siguientes:**



$CD \to f$ convexa $\to f'$ decreciente $\to f'' < 0$

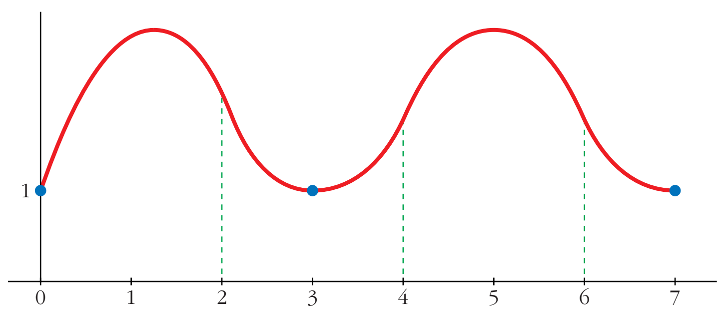
$DE \to f$ cóncava $\to f'$ creciente $\to f'' > 0$

$EF \to f$ convexa $\to f'$ decreciente $\to f'' < 0$

$FG \to f$ cóncava $\to f'$ creciente $\to f'' > 0$

■ **Dibuja la gráfica de una función, f, que cumpla las siguientes condiciones:**

- **La función está definida en [0, 7].**
- **Solo toma valores positivos.**
- **Pasa por los puntos (0, 1), (3, 1) y (7, 1).**
- **En el intervalo (1, 2), la función es convexa.**
- **En el intervalo (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En el intervalo (4, 6), f' es decreciente.**
- **En el intervalo (6, 7), f es cóncava.**



Página 170

1. Halla las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$ en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 4x + 3$ que sean paralelas a la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.

$$y = x^3 - 4x + 3$$

Calculamos la derivada:

$$y' = 3x^2 - 4$$

Si son paralelas a la bisectriz del 2º y 4º cuadrante, la pendiente es -1. Por tanto:

$$3x^2 - 4 = -1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$y(-1) = 6 \quad y(1) = 0$$

Recta tangente en $(-1, 6)$:

$$y = 6 - (x + 1) = -x + 5$$

Recta tangente en $(1, 0)$:

$$y = 0 - (x - 1) = -x + 1$$

Página 171

1. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:

a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \quad \rightarrow \quad y' > 0 \quad \rightarrow \quad f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \quad \rightarrow \quad y' > 0 \quad \rightarrow \quad f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \quad \rightarrow \quad y' < 0 \quad \rightarrow \quad f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 173

2. Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de ellos estudiando el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2) - 2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x - 6 - 2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x - 6) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \quad \text{En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \quad \text{En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo}$$

3. a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

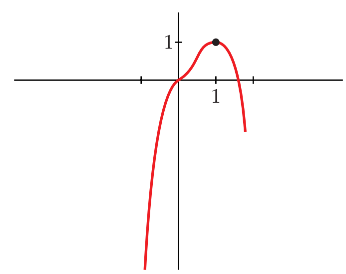
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (1, 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1; 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0, 0)$ hay un *punto de inflexión*.
- En $(1, 1)$ hay un *máximo relativo*.



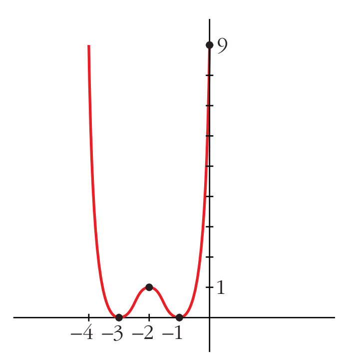
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-3, 0) \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un *mínimo relativo* en $(-3, 0)$, un *máximo relativo* en $(-2, 1)$ y un *mínimo relativo* en $(-1, 0)$.



Página 175

1. Estudia la curvatura de la función: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$; $f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\; f'''(0) \neq 0;\; f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 2)$$

$$\left(f'''(x) = 6;\; f'''(2) \neq 0\right)$$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 177

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

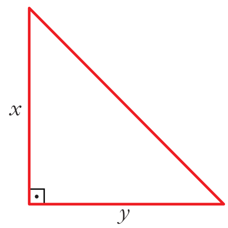
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \;\rightarrow\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\; (\text{no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. **De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$

$$\textit{Área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

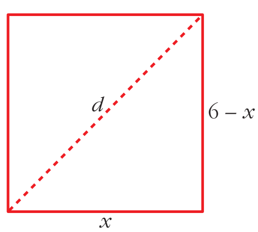
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 5 \;\rightarrow\; y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\; f(10) = 0;\; f(5) = \frac{25}{2};\; \text{y } f \text{ es continua. Luego, en } x = 5 \text{ está el máximo}\right)$.

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. **Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**



$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

Tenemos que minimizar la función:

$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

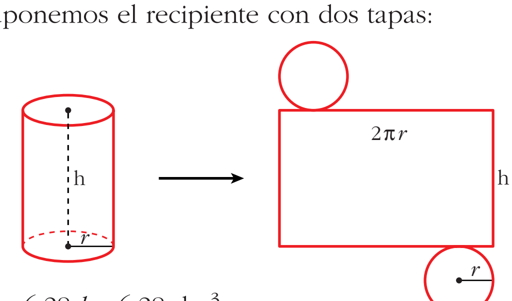
$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4,24$; y $f(x)$ es continua. Luego, en $x = 3$ hay un mínimo). El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$$\textit{Área total} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$V = 6,28\ l = 6,28\ dm^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot r^2 \cdot h = 6,28 \;\rightarrow\; h = \dfrac{6,28}{3,14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = h$

Así: $\acute{A}real\ total = 2\pi r\left(\frac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -2 + 2r^3 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$r = 1 \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$. El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 182

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:**

a) $y = \frac{1 - 3x^2}{2}$ **en** $x = 1$

b) $y = 0{,}3x - 0{,}01x^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x + 12}$ **en** $x = -3$

d) $y = \frac{1}{x}$ **en** $x = 2$

e) $y = \frac{x + 5}{x - 5}$ **en** $x = 3$

f) $y = sen^2\, x$ **en** $x = \frac{\pi}{2}$

g) $y = e^{-x}$ **en** $x = 0$

h) $y = sen\, x\, cos\, x$ **en** $x = \frac{\pi}{4}$

i) $y = ln\,(x + 1)$ **en** $x = 0$

j) $y = x\, ln\, x$ **en** $x = e$

a) • Ordenada en el punto: $x = 1 \quad \rightarrow \quad y = -1$

• Pendiente de la recta: $y' = -3x \quad \rightarrow \quad y'(1) = -3$

Recta tangente: $y = -1 - 3 \cdot (x - 1) = -3x + 2$

b) • Ordenada en el punto: $x = 10 \quad \rightarrow \quad y = 2$

• Pendiente de la recta: $y' = 0{,}3 - 0{,}02x \quad \rightarrow \quad y'(10) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

Recta tangente: $y = 2 + 0,1 \cdot (x - 10) = 0,1x + 1$

c) • Ordenada en el punto: $x = -3 \;\rightarrow\; y = 3$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 12}} \;\rightarrow\; y'(-3) = \dfrac{1}{6}$

Recta tangente: $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x + 3) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{2}$

d) • Ordenada en el punto: $x = 2 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-1}{x^2} \;\rightarrow\; y'(2) = \dfrac{-1}{4}$

Recta tangente: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} \cdot (x - 2) = \dfrac{-1}{4}x + 1$

e) • Ordenada en el punto: $x = 3 \;\rightarrow\; y = -4$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-10}{(x - 5)^2} \;\rightarrow\; y'(3) = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$

Recta tangente: $y = -4 - \dfrac{5}{2} \cdot (x - 3) = \dfrac{-5}{2}x + \dfrac{7}{2}$

f) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{2} \;\rightarrow\; y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = 2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x \;\rightarrow\; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Recta tangente: $y = 1$

g) • Ordenada en el punto: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = -e^{-x} \;\rightarrow\; y'(0) = -1$

Recta tangente: $y = 1 - 1 \cdot x = -x + 1$

h) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{4} \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = cos^2\, x - sen^2\, x \;\rightarrow\; y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

Recta tangente: $y = \dfrac{1}{2}$

i) • Ordenada en el punto: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{1}{x + 1} \;\rightarrow\; y'(0) = 1$

Recta tangente: $y = x$

j) • Ordenada en el punto: $x = e \;\rightarrow\; y = e$

• Pendiente de la recta: $y' = ln\, x + 1 \;\rightarrow\; y'(e) = 2$

Recta tangente: $y = e + 2 \cdot (x - e) = 2x - e$

2 S **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.**

Calculamos la pendiente de la recta $4x - 2y + 5 = 0$:

$$4x - 2y + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = 2x + \frac{5}{2} \;\rightarrow\; \text{Pendiente } 2.$$

$$y' = 2x + 4 = 2 \;\rightarrow\; x = -1$$

La recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por $(-1, -2)$:

$$y = -2 + 2 \cdot (x + 1) = 2x \;\rightarrow\; y = 2x$$

3 S **Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x - 1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

4 S **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4x - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

$$y' = 4 - 2x \begin{cases} y'(0) = 4 \;\; \text{pendiente en } (0, 0) \\ y'(4) = -4 \;\; \text{pendiente en } (4, 0) \end{cases}$$

Rectas tangentes:

En $(0, 0) \;\rightarrow\; y = 4x$

En $(4, 0) \;\rightarrow\; y = -4 \cdot (x - 4) = -4x + 16$

5 **Halla los puntos de tangente horizontal en las siguientes funciones y escribe la ecuación de la tangente en esos puntos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ **b)** $y = -x^4 + x^2$

c) $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \to y = 0 \\ x = 1/3 \to y = 4/27 \end{cases}$

b) $y' = -4x^3 + 2x = x \cdot (-4x^2 + 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = +\sqrt{2}/2 \to y = 1/4 \\ x = -\sqrt{2}/2 \to y = 1/4 \end{cases}$

c) $y' = \dfrac{6 \cdot (x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \to -6x^2 + 6 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \to y = 3 \\ x = -1 \to y = -3 \end{cases}$

d) $y' = \dfrac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{x^2} = 0 \to x^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \to y = -1 \\ x = -2 \to y = -9 \end{cases}$

6. **Dada la parábola** $y = -x^2 + 4x - 3$**:**

a) Halla la pendiente de la recta r **que une los puntos de la parábola de abscisas** $x = 0$ **y** $x = 3$**.**

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r **del apartado a).**

a) El punto de la parábola de abscisa $x = 0$ es el $(0, -3)$ y el de $x = 3$ es el $(3, 0)$.

Por tanto, la pendiente de la recta que los une es:

$$m = \frac{3 - 0}{0 - (-3)} = \frac{3}{3} = 1$$

La ecuación de la recta es $y = x - 3$.

b) Cualquier paralela a la recta r de a) será de la forma $y = x + k$. Como debe ser tangente a la parábola:

$$\left.\begin{aligned} y &= x + k \\ y &= -x^2 + 4x - 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x + k = -x^2 + 4x - 3 \\ &x^2 - 3x + (3x + k) = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (3 + k)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4k}}{2}$$

Para que la solución sea única, el discriminante tiene que ser nulo:

$$-3 - 4k = 0 \;\rightarrow\; -3 = 4k \;\rightarrow\; k = \frac{-3}{4}$$

Por tanto, la recta pedida es $y = x - \frac{3}{4}$ tangente a la parábola en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

7 **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$ **b)** $y = \frac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \frac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

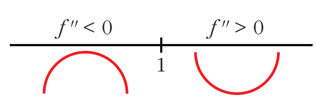
a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

No tiene ni máximos ni mínimos.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

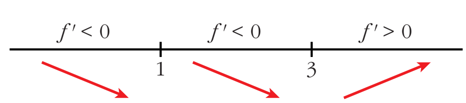


Hay un punto de inflexión en $(1, 29)$.

b) $y = \frac{3x^4 - 8x^3}{12}$

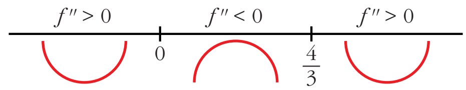
$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(2, \frac{-4}{3}\right)$.

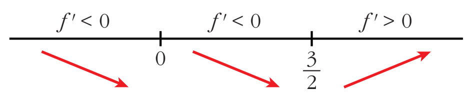
$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\frac{4}{3}, \frac{-64}{81}\right)$.

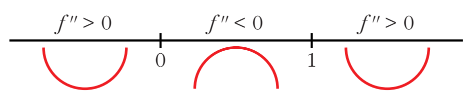
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3/2 \;\rightarrow\; y = -(27/16) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

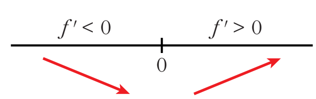
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$



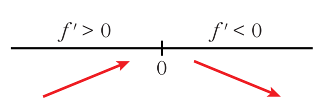
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

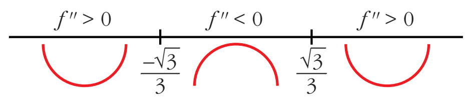
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$

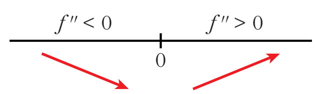


Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

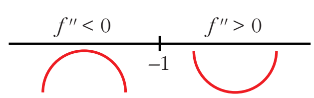
$y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

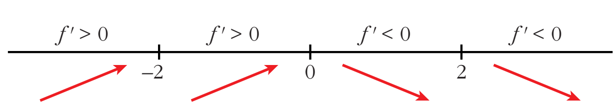
8 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximos o mínimos:**

a) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \dfrac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

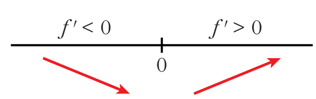
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

9 **Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)(x-4)}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

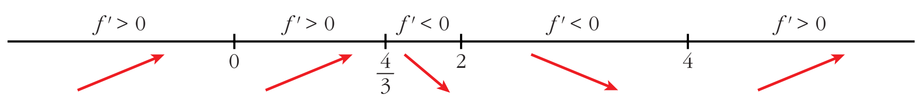
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x) - (8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2-16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

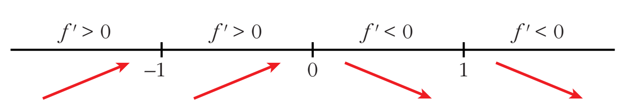
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

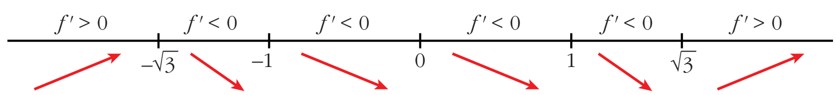
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

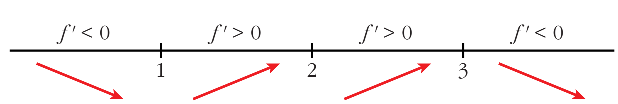
$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x) - (2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

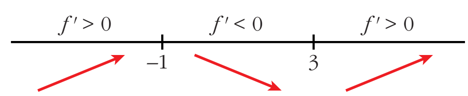
tiene un mínimo en (1, –1)

tiene un máximo en (3, –9)

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en (–1, 3)

tiene un máximo en (–1, 5)

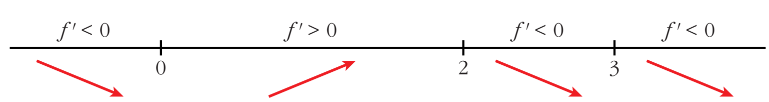
tiene un mínimo en (3, –27)

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3x - 6 = 0 \;\to\; x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en (0, 2)

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en (2, –2)

10 **Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

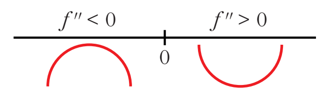
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

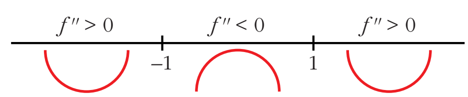
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

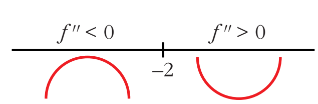
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\, e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\, e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \;\; (e^x \neq 0$ para todo $x)$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

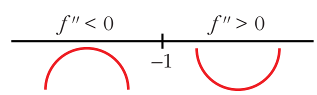
e) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x+1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

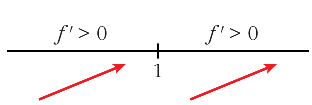
$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

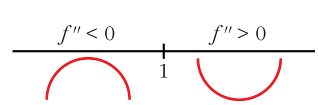
Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

11 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x-1)^3$ **b) $y = 2 + (x-1)^4$** **c) $y = 3 - (x-1)^6$**

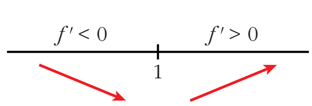
a) $f'(x) = 3(x-1)^2$; $f''(x) = 6(x-1)$

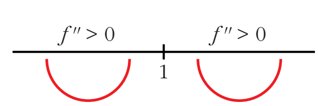




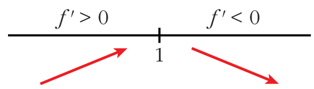
Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

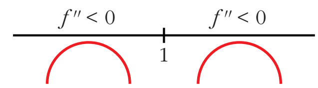
b) $f'(x) = 4(x-1)^3$; $f''(x) = 12(x-1)^2$





Hay un mínimo en $x = 1$.





Hay un máximo en $x = 1$.

Página 183

PARA RESOLVER

12 **Prueba que la recta $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto al de tangencia.**

$$y' = 3x^2 - 12x + 8$$

Veamos para qué valor de x tiene pendiente -1:

$$3x^2 - 12x + 8 = -1$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = -3 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 \end{cases}$$

El punto $(3, -3)$ verifica la ecuación.

Veamos los puntos de corte:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \;\rightarrow\; x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3 \;\rightarrow\; y = -3 \end{cases}$$

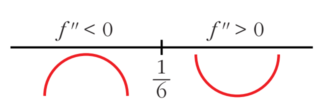
El otro punto de corte es $(0, 0)$.

13 **S** **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

- Ecuación de la recta tangente: $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

14 **S** **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2ax + b \;\;\rightarrow\;\; y'(2) = 2 \;\;\rightarrow\;\; 4a + b = 2 \\ \text{Pasa por } A(2, 1) \;\;\rightarrow\;\; y(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ \text{Pasa por } B(5, -2) \;\;\rightarrow\;\; y(5) = 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\}$$

Solución del sistema: $a = -1,\;\; b = 6,\;\; c = -7 \;\;\Rightarrow\;\; y = -x^2 + 6x - 7$

15 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a, b y c.**

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \;\;\rightarrow\;\; -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \;\;\rightarrow\;\; 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \;\; \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

16 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

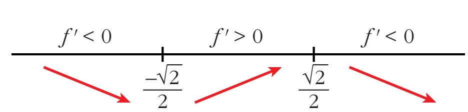
a) $f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\;\rightarrow\;\; a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \;\;\rightarrow\;\; 3a + b = -3 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} \;\; f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; -3(2x^2 - 1) = 0 \;\; \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

17 **S** **De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que:**

— Tiene un mínimo en $x = 2$.

— Su gráfica pasa por el punto (2, 2).

Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuánto vale la función en $x = 1$?

$f'(x) = 2x + a$

Además:

"Tiene un mínimo en $x = 2$" $\rightarrow$ $f'(2) = 0$ $\rightarrow$ $2 \cdot 2 + a = 0$ $\rightarrow$ $a = 4$

"Su gráfica pasa por (2, 2)" $\rightarrow$ $f(2) = 2$ $\rightarrow$ $2^2 + (-4) \cdot 2 + b = 2$ $\rightarrow$ $b - 4 = 2$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ $b = 6$

Por tanto: $f(1) = 1^2 + a + b = 1 + (-4) + 6 = 3$

18 **S** **Calcula p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto (–2, 1) y presente un mínimo en $x = -3$.**

$y = x^2 + px + q \rightarrow f'(x) = 2x + p$

$f(-2) = 4 - 2p + q = 1$

$f'(-3) = 2(-3) + p = 0 \rightarrow p = 6 \xrightarrow{(1)} 4 - 2 \cdot 6 + q = 1 \rightarrow q = 9$

Por tanto: $p = 6$ y $q = 9$

19 **Estudia los intervalos de crecimiento y de concavidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2}$ **b)** $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Signo de la derivada: $f' < 0$ | -1 | $f' > 0$ | 1 | $f' < 0$

$f''(x) = \dfrac{6x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$

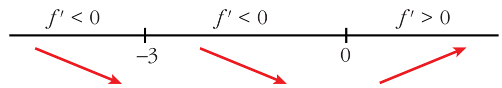
$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$

$f'' < 0$ $\cap$ | $-\sqrt{3}$ | $f'' > 0$ $\cup$ | 0 | $f'' < 0$ $\cap$ | $\sqrt{3}$ | $f'' > 0$ $\cup$

b) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10 \;\rightarrow\; f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = -3$

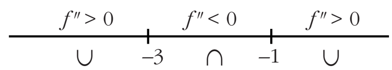
Signo de la derivada:



$f''(x) = 12x^2 + 48x + 36$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -3,\; x = -1$

Signo de la segunda derivada:



20 **Comprueba y justifica que la función $f(x) = e^{-3x}$ es siempre decreciente y cóncava.**

$f(x) = e^{-3x}$

$f'(x) = -3e^{-3x} < 0$ para cualquier valor de x

Por tanto, $f(x)$ es siempre decreciente.

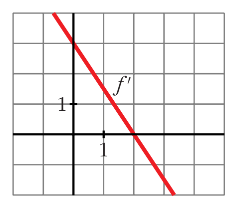
$f''(x) = -9e^{-3x} > 0$ para todo x

Así, $f(x)$ es cóncava en todo su dominio.

21 **Observando la gráfica de la función f', derivada de f, di:**

a) Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

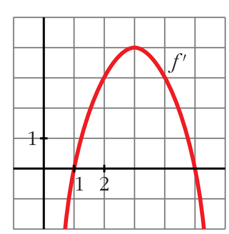
b) ¿Tiene f máximo o mínimo?



a) f es creciente $(f' > 0)$ en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente $(f' < 0)$ en $(2, +\infty)$

b) f tiene un máximo en $x = 2$.

22 **Esta es la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explica si $f(x)$ tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.**



$x = 1$: en este punto la función tiene un mínimo, porque pasa de ser decreciente$(f' < 0)$ a creciente $(f' > 0)$.

$x = 3$: en este punto f tiene un punto de inflexión, ya que $f''(3) = 0$.

$x = 5$: en este punto f tiene un máximo, pues pasa de ser creciente a decreciente.

23 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **:**

a) Halla su función derivada.

b) ¿Tiene f algún punto en el que $f'(x) = 0$?

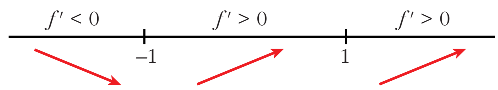
c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f.

d) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$.

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f'(x) = 0$ solo puede darse para $2x + 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = -1$

c) Signo de la derivada: 

d) La pendiente de la recta en $x = 0$ es: $m = f'(0) = 2$

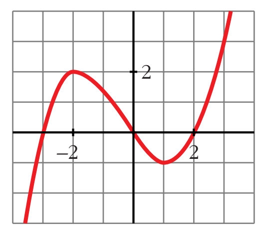
Por tanto:

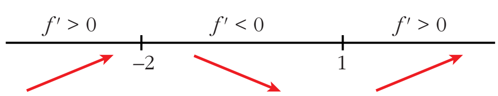
$y - f(0) = m(x - 0)$
$y - (-1) = 2(x - 0)$
$y = 2x - 1$

24 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**

a) Indica el signo que tendrá f' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$.

b) ¿En qué puntos la gráfica de f' cortará al eje OX?



a) 

b) En $x = -2$ y en $x = 1$

25 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 24x^2 + 72\,x - 15$ en su punto de inflexión.**

$y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$
$y' = 6x^2 - 48x + 72$
$y'' = 12x - 48$

El punto de inflexión será: $f''(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; 12x - 48 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 4 \;\; \rightarrow \;\; (4, 17)$

En ese punto, la pendiente de la recta tangente es: $m = f'(4) = -24$

Así, la ecuación de la recta pedida es:

$y - f(4) = m(x - 4)$
$y - 17 = -24(x - 4)$
$y = -24x + 113$

26 **Dada la curva $y = x^4 - 4x^3$:**

a) ¿Cuál es la función que nos da la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera?

b) Halla el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

a) La función pedida es la de su función derivada: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

b) Para ello hay que hallar el máximo de la funcón f':

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ y $x = 2$

Hallamos la tercera derivada:

$f'''(x) = 24x - 24$

$f'''(0) = -24 < 0 \quad \rightarrow$ (0, 0) es un máximo

$f'''(2) = 24 > 0 \quad \rightarrow$ (2, –16) es un mínimo

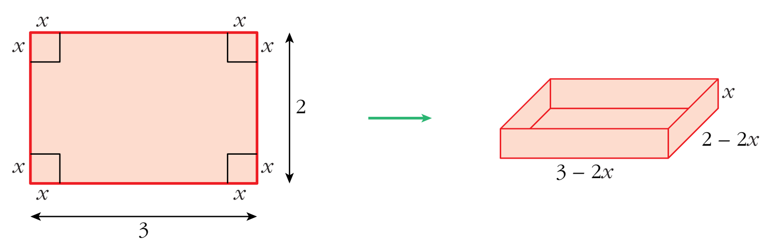
El punto pedido es el (0, 0).

Página 184

Problemas de optimización

27 **Con una cartulina rectangular de 2 m × 3 m se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0, 1)$$

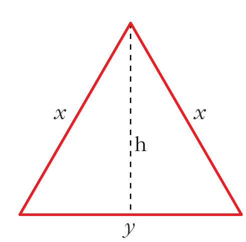
$$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6 - 20x + 12x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1{,}27 \text{ (no vale)} \\ 0{,}39 \end{cases}$$

$$V''(x) = -20 + 24x; \quad V''(0{,}39) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}39 \text{ es máximo.}$$

28 **S** **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**



Perímetro $= 2x + y = 30 \quad \rightarrow \quad y = 30 - 2x$

Altura $= \text{h} = \sqrt{x^2 - \dfrac{y^2}{4}}$

Área $= \dfrac{y \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$

$$= \frac{(30-2x)\cdot\sqrt{30x-225}}{2} = (15-x)\sqrt{30x-225} = \sqrt{(15-x)^2(30x-225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

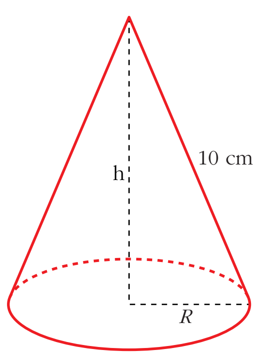
$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625-600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \;\; \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm^2.

29 Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



$$h^2 + R^2 = 100 \;\;\rightarrow\;\; R^2 = 100 - h^2$$

$$\textit{Volumen} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 100 - 3h^2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; h = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

$\left(f'(h) > 0 \right.$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

Luego, en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ hay un máximo$\left. \right)$.

Por tanto, el radio de la base será: $R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \;\;\rightarrow\;\; R = \sqrt{\frac{200}{3}}$

30 **Se sabe que el rendimiento, r en %, de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t) = 300t(1 - t)$ siendo $0 \le t \le 1$, t en horas.**

a) Explica cuándo aumenta y cuándo disminuye el rendimiento.

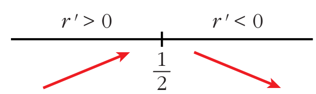
b) ¿Cuándo se anula?

c) ¿Cuándo es máximo?

$r(t) = 300t(1 - t)$, $0 \le t \le 1$, t en horas.

a) $r'(t) = 300 - 600t$

$r'(t) = 0 \quad \to \quad t = \dfrac{1}{2}$



$r(t)$ aumenta entre 0 y $\dfrac{1}{2}$, pues r es creciente.

$r(t)$ disminuye entre $\dfrac{1}{2}$ y 1, pues r es decreciente.

b) $r(t) = 0 \quad \to \quad 300t \cdot (1 - t) = 0 \quad \to \quad t = 0$ y $t = 1$

c) $r'(t) = 0 \quad \to \quad t = \dfrac{1}{2}$. (Es máximo pues $r' > 0$ a su izquierda y $r' < 0$ a su derecha).

31 **S** **Un comerciante compra artículos a 350 € la unidad y sabe que si el precio de venta es 750 €, vende 30 unidades al mes y que por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas de cada mes en 3 unidades. Determina el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante.**

Llamamos: x = nº de veces que se descuentan 20 €.

Así, el precio por unidad será de: $750 - 20x$, y por tanto se venderán $30 + 3x$ unidades al mes; luego el dinero obtenido por las ventas vendrá dado por la función:

$$f(x) = (750 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 1\,650x + 22\,500$$

Maximizar los beneficios es equivalente a maximizar esta función:

$$f'(x) = -120x + 1\,650$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\,650}{120} = 13{,}75$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

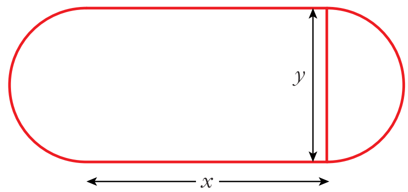
$$f''(x) = -120$$

$$f''(13{,}75) = -120 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 13{,}75 \text{ es máximo}$$

Por tanto, el precio de venta que hace máximos los beneficios es:

$$750 - 20 \cdot x = 750 - 20 \cdot 13{,}75 = 750 - 275 = 475 \text{ €/unidad}$$

32 **S** **Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de dicha pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.**



Perímetro de la pista $= 2x + \pi \cdot y = 200$

Despejamos: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

Área del rectángulo $= x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivamos:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 50 \text{ m} \quad \rightarrow \quad y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ \ A''(50) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50 \ \text{ es máximo}\right)$$

33 **S** **El saldo, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo viene dado por la función:**

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } \ 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t - 4) & \text{si } \ 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t - 8)^2 & \text{si } \ 8 \le t \le 12 \end{cases}}$$

Deduce razonadamente el valor de t en el que el capital fue máximo.

$$f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } \ 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t - 4) & \text{si } \ 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t - 8)^2 & \text{si } \ 8 \le t \le 12 \end{cases}$$

En el primer intervalo se trata de una función afín decreciente que alcanza el máximo valor en 0, $f(0) = 4$.

En el segundo intervalo tenemos otra función afín creciente, por lo que alcanza su máximo valor en 8^-, $f(8^-) = 3{,}36$.

En el tercer intervalo, derivamos:

$$f'(t) = 0{,}2 \cdot (t - 8)$$

Tiene un mínimo en $t = 8$, por lo que alcanza el máximo en el otro extremo del intervalo: $f(12) = 4{,}96$.

Por tanto, el capital fue máximo en $t = 12$.

34 **S** **Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. (Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora). La función que expresa dicho rendimiento es: $R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$ siendo t el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.**

a) Determina cuándo se produce el máximo rendimiento y cuándo se produce el mínimo rendimiento.

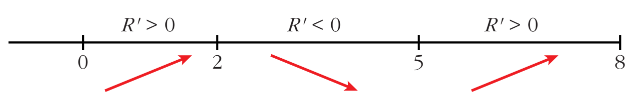
b) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

Vamos a suponer una jornada laboral de 8 horas; es decir:

$$R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3; \quad t \in [0, 8]$$

a) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2$

$$R'(t) = 0 \;\rightarrow\; 30 - 21t + 3t^2 = 0 \;\begin{cases} t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$



$R(0) = 0 \qquad R(2) = 26$

$R(5) = 12{,}5 \quad R(8) = 80$

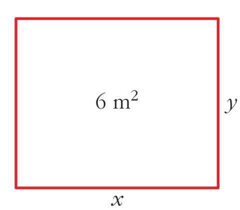
Hay un mínimo relativo en $t = 5$ y un máximo relativo en $t = 2$, pero el mínimo absoluto corresponde a $t = 0$ y el máximo absoluto a $t = 8$ horas.

b) $\text{T.V.M.}[2, 4] = \dfrac{R(4) - R(12)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 26}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$

35 **Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,5 € y el de tramo vertical 3 €.**

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



a) $\text{Área} = x \cdot y = 6 \;\rightarrow\; y = \dfrac{6}{x}$

Coste $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$$C = 5x + \frac{36}{x}$$

$$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68 \text{ m} \;\rightarrow\; y = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ m}$$

$$\left(C'' = \frac{72}{x^3};\; C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ es mínimo}\right)$$

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$ €

36 **Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de euros viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión:**

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5$$

a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.

b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5$$

a) $R'(x) = -0{,}002x + 0{,}4$

$R'(x) = 0 \quad \to \quad x = 200$ miles de €.

$(R''(x) = -0{,}002, \ \ R''(200) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 200$ es máximo)

Invirtiendo 200 000 € se obtiene la máxima rentabilidad.

b) $R(200) = 43{,}5$ miles de € = 43 500 €.

37 **Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Su precio $P(t)$, en miles de euros, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que este llevaba en el mercado por la función:**

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } \ 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } \ 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $P(t)$.

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo?

c) ¿Cuál fue la tasa de variación media del precio durante los últimos 6 años?

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } \ 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } \ 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) $P'(t) = \begin{cases} 8t & 0 < t < 2 \\ -5/2 & 2 < t < 8 \end{cases}$ (No existe $P'(2)$, pues $P'(2^-) \neq P'(2^+)$).

$P(t)$ es creciente en $0 < t < 2$ pues $P'(t) > 0$.

$P(t)$ es decreciente en $2 < t < 8$ pues $P'(t) < 0$.

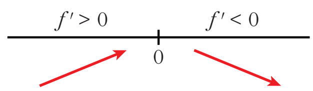
b) El máximo se alcanza en $t = 2$, $P(2) = 20$.

c) $\text{T.V.M.}[2, 8] = \dfrac{P(8) - P(2)}{8 - 2} = \dfrac{5 - 20}{6} = \dfrac{-15}{6} = \dfrac{-5}{2} = -2{,}5$

38 S **La función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$. ¿Puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3 \qquad f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

39 **S** **Una función f es decreciente en el punto a y derivable en él.**

¿Puede ser $f'(a) > 0$?

¿Puede ser $f'(a) = 0$?

¿Puede ser $f'(a) < 0$? Razónalo.

Si f es decreciente en $x = a$ y es derivable en él, entonces $f'(a) \leq 0$.

Lo probamos:

$$f \text{ decreciente en } a \;\rightarrow\; \text{signo de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signo de } (x - a) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Por tanto, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; es decir: $f'(a) \leq 0$

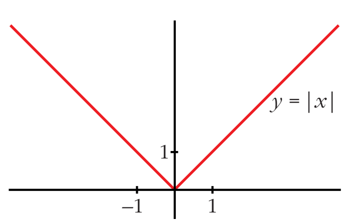
Ejemplo: $f'(a) = -x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y tenemos que:

$$f'(x) = -3x^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} f'(0) = 0 \;\; (\text{y } f(x) \text{ es decreciente en } x = 0) \\ f'(0) < 0 \;\; \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

40 **La función $|x|$ (valor absoluto de x), ¿presenta un mínimo relativo en algún punto? ¿En qué puntos es derivable? Razónalo.**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

Pero $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

41 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

42 De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \quad \rightarrow \quad f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

43 Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?

a) f tiene máximo o mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

44 S De una función $f(x)$ se sabe que:

$$f(1) = f(3) = 0; \quad f'(2) = 0; \quad f''(2) > 0$$

¿Qué puedes decir acerca de la gráfica de esta función?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = f(3) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(2) > 0 \end{array}\right\} \quad f \text{ tiene un mínimo en } x = 2.$$

45 S La representación gráfica de la función derivada de una función f, es una recta que pasa por los puntos (2, 0) y (0, 2).

Utilizando la gráfica de la derivada:

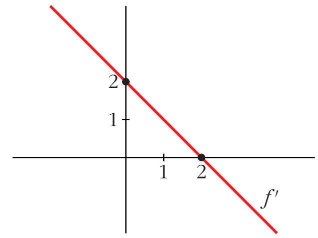
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Estudia si la función f tiene máximo o mínimo.

a) $x < 2 \rightarrow f' > 0 \rightarrow f$ creciente

$x > 2 \rightarrow f' < 0 \rightarrow f$ decreciente

b) $x = 2 \rightarrow f' = 0$ y tiene un máximo



46 **S** **Si la gráfica de la derivada de g es una parábola que corta al eje *OX* en (0,0) y (4, 0) y tiene por vértice (2, 1), ¿qué puedes decir del crecimiento y decrecimiento de g?**

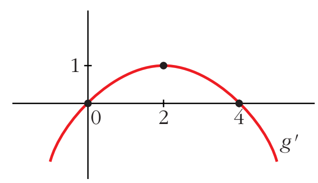
Determina si la función g presenta máximos o mínimos.

Si $x < 0 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

Si $0 < x < 4 \rightarrow g' > 0 \rightarrow g$ creciente

Si $x > 4 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

En $x = 0$ tiene un mínimo y en $x = 4$ un máximo.



47 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

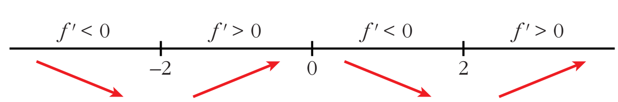
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \ne f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \ne f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.

- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en (0, 4).

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en (–2, 0) y otro en (2, 0). En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \ge 0$ para todo x.

48 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } \; x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } \; -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } \; x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } \; -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \ne f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \ne f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

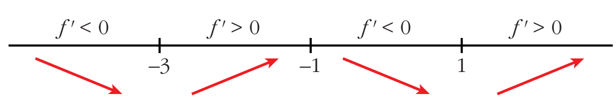
$$2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$$

Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

$$-2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \quad \text{y} \quad f'(x) = -2x - 2 \; \text{ para } \; -3 < x < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  tiene un máximo en $(-1, -4)$

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

49 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

50 Una empresa de mensajería ofrece estas tarifas:

— Si la carga es menor de 2 kg, costará 8 € por kilo.

— A partir de 2 kg, el precio por kilo se obtiene restando de 8 el número de kilos que exceden de 2.

La carga máxima que puede llevar un mensajero es 6 kg. Sea x el peso de la carga, $P(x)$ la función que nos da el precio por kilo de carga e $I(x)$ la función que nos da los ingresos de la empresa.

a) Halla las expresiones algebraicas de $P(x)$ e $I(x)$ y represéntalas.

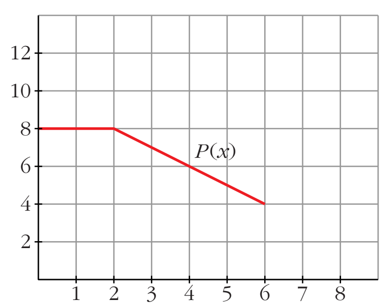
b) ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo ingreso?

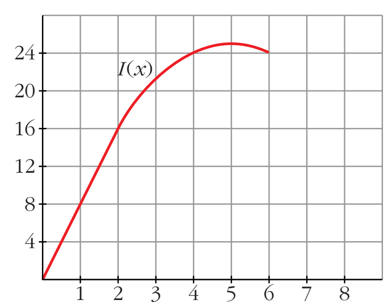
a) Precio por kilogramo de carga:

$$P(x) = \begin{cases} 8, & 0 \leq x < 2 \\ 8 - (x - 2), & 2 \leq x \leq 6 \end{cases} = \begin{cases} 8, & 0 \leq x < 2 \\ 10 - x, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Ingresos en función de los kilos de carga:

$$I(x) = \begin{cases} 8x, & 0 \leq x < 2 \\ (10 - x)x, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases} = \begin{cases} 8x, & 0 \leq x < 2 \\ 10x - x^2, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$





b) Se obtiene el máximo ingreso para $x = 5$.