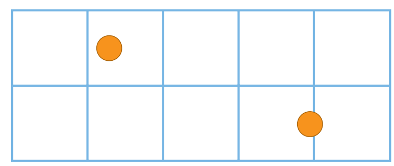
10 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

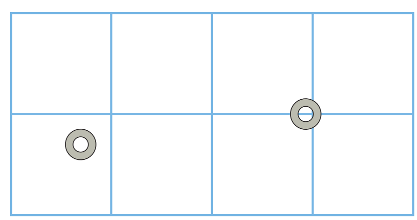
Página 239

Cálculo de probabilidades

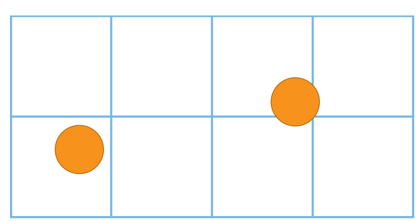
Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que "no toque raya" en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm una moneda de 1 cm de diámetro.



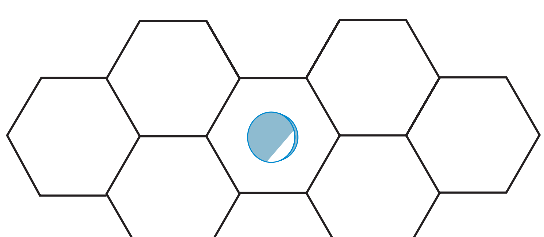
¿De qué tamaño debe ser un disco para que la probabilidad de que "no toque raya" en una cuadrícula de 4 cm × 4 cm sea de 0,2?



- **En una cuadrícula de 4 cm × 4 cm dejamos caer 5 000 veces una moneda y contabilizamos que "no toca raya" en 1 341. Estima cuál es el diámetro de la moneda.**



- **Sobre un suelo de losetas hexagonales de 12 cm de lado se deja caer un disco de 10 cm de diámetro. ¿Cuál es la probabilidad de que "no toque raya"?**



- Área del cuadrado grande = $3^2 = 9\ cm^2$

  Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 4\ cm^2$

$$P = \frac{4}{9} \approx 0,44$$

Área del cuadrado grande = $4^2 = 16\ cm^2$

Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

$$P = \frac{(4-d)^2}{16} = 0,2 \Rightarrow (4-d)^2 = 3,2 \Rightarrow 4 - d = \pm 1,8$$

$$4 - d = 1,8 \rightarrow d = 2,2 \text{ cm}$$

$$4 - d = -1,8 \rightarrow d = 5,8 \text{ cm} \rightarrow \text{No vale}$$

Ha de tener un diámetro de 2,2 cm.

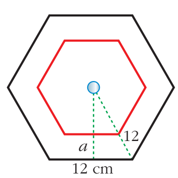
- Área del cuadrado grande = $4^2 = 16\ cm^2$

  Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

$$P = \frac{1\,341}{5\,000} = 0,2682 = \frac{(4-d)^2}{16}$$

$$(4-d)^2 = 4,2912 \rightarrow d = 1,93 \text{ cm}$$

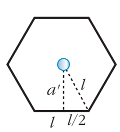
Área del hexágono grande = $\dfrac{72 \cdot 10,4}{2} = 374,4\ cm^2$



Perímetro = 72 cm

$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10,4$ cm

Área del hexágono pequeño = $\dfrac{37,44 \cdot 5,4}{2} = 101,088\ cm^2$



$a' = a - r = 10,4 - 5 = 5,4$ cm

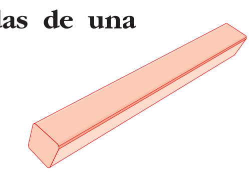
$l^2 - \dfrac{l^2}{4} = (a')^2$; $\dfrac{3l^2}{4} = 29,16 \rightarrow l = 6,24$ cm $\rightarrow$ Perímetro = 37,44 cm

$$P = \frac{101,088}{374,4} = 0,27$$

Página 240

1. Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras alargadas de una regleta.

Dejamos caer la regleta y anotamos el número de la cara superior.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

b) Elementales $\to$ {1}, {2}, {3}, {4}

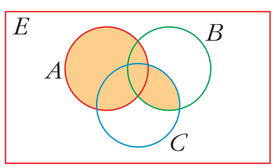
No elementales $\to$ {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}
{2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, {Ø}

c) $2^4 = 16$ sucesos

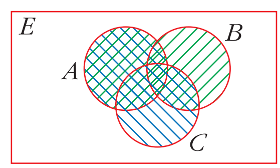
Página 239

2. Justifica gráficamente la siguiente igualdad:

$\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$



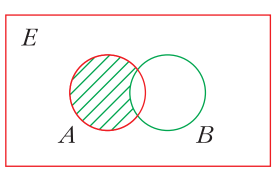
$A \cup (B \cap C)$



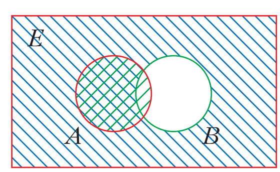
$A \cup B$, $A \cup C$ } $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

3. Justifica gráficamente la siguiente igualdad:

$\boldsymbol{A - B = A \cap B'}$



$A - B$



A, B' } $A \cap B'$

Página 245

1. Lanzamos un dado "chapucero" 1 000 veces. Obtenemos $f(1) = 117$, $f(2) = 302$, $f(3) = 38$, $f(4) = 234$, $f(5) = 196$, $f(6) = 113$. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos PAR, MENOR QUE 6, {1, 2}?

$P[1] = \dfrac{117}{1\,000} = 0{,}117$ $\qquad P[2] = 0{,}302$ $\qquad P[3] = 0{,}038$

$P[4] = 0{,}234$ $\qquad P[5] = 0{,}196$ $\qquad P[6] = 0{,}113$

$P[\text{PAR}] = 0{,}302 + 0{,}234 + 0{,}113 = 0{,}649$

$P[\text{MENOR QUE } 6] = 1 - P[6] = 1 - 0{,}113 = 0{,}887$

$P[\{1, 2\}] = 0{,}117 + 0{,}302 = 0{,}419$

2. **¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?**

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

3. **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus resultados sea 3?**

Hacemos una tabla para la diferencia de resultados:

1er DADO

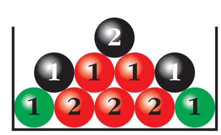
2º DADO

–	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P[\text{DIFERENCIA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Página 247

1. **Observa las bolas que hay en la urna.**



a) **Forma un cuadro de doble entrada en el que se repartan las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).**

b) **Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.**

c) **Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).**

d) **Calcula las probabilidades condicionadas: $P[1/\text{ROJO}]$, $P[1/\text{VERDE}]$, $P[1/\text{NEGRO}]$, $P[2/\text{ROJO}]$, $P[2/\text{VERDE}]$, $P[2/\text{NEGRO}]$.**

e) **Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.**

a)

	V	R	N	
1	2	2	2	6
2	0	3	1	4
	2	5	3	10

b) y c) $P[\text{R}] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\qquad P[1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$P[\text{N}] = \frac{3}{10} = 0{,}3$ $\qquad P[2] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$P[\text{V}] = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

d) $P[1/\text{R}] = \frac{2}{5}$; $P[1/\text{V}] = 1$; $P[1/\text{N}] = \frac{2}{3}$

$P[2/\text{R}] = \frac{3}{5}$; $P[2/\text{V}] = 0$; $P[2/\text{N}] = \frac{1}{3}$

e) No son independientes.

Página 248

1. Calcula la probabilidad de obtener tres CUATROS al lanzar tres dados.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$$

2. Calcula la probabilidad de no obtener NINGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (¿Cuál es la probabilidad de NO SEIS? Repite cuatro veces).

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48$$

3. Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS.)

$1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$

4. Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar seis dedos.

$P[\text{NO SEIS en un dado}] = \frac{5}{6}$

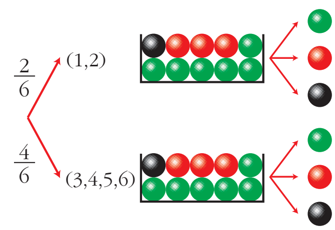
$P[\text{NO SEIS en seis dados}] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}33$

Por tanto:

$P[\text{ALGÚN SEIS en seis dados}] = 1 - P[\text{NO SEIS en seis dados}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}67$

Página 249

5. Tenemos un dado y las dos urnas descritas arriba. Lanzamos el dado. Si sale 1 ó 2, acudimos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 ó 6, acudimos a la urna II.



Extraemos una bola de la urna correspondiente.

a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.

b) Halla: *P*[{3, 4, 5, 6} y ●], *P*[● /1], *P*[● /5] y *P*[2 y ●].

a) Ver el ejemplo en la propia página 249.

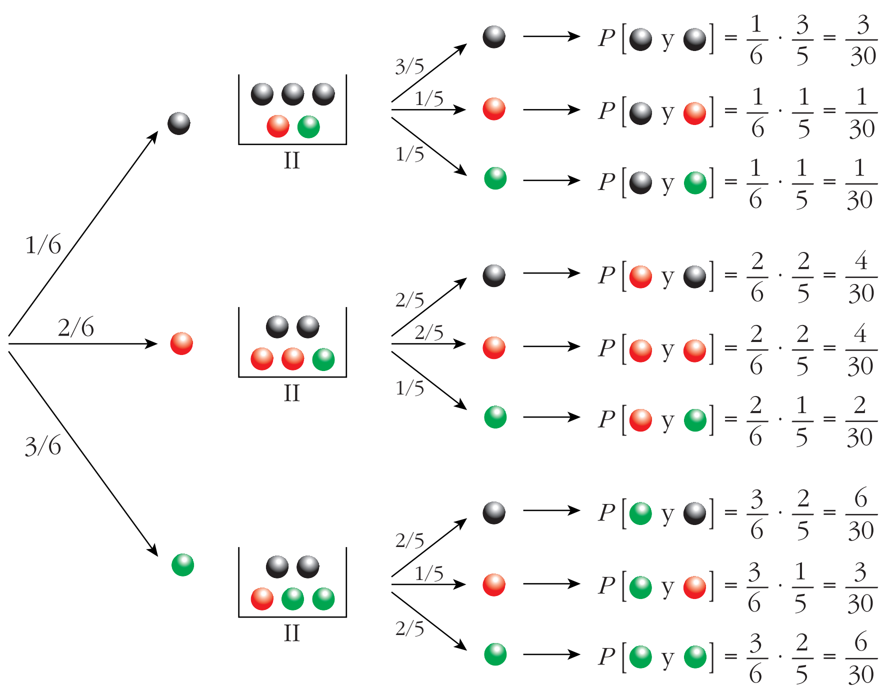
b) $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{60}, \ \frac{6}{10}, \ \frac{3}{10}$ y $\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10}$

Página 251

1. Tenemos dos urnas. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II.

Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) Roja. b) Verde. c) Negra.



a) $P[2^{\underline{a}}\ \text{🔴}] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2^{\underline{a}}\ \text{🟢}] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2^{\underline{a}}\ \text{⚫}] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

Página 253

1. En el ejercicio propuesto del apartado anterior, calcular:

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? $P[1^{\underline{a}}\text{⚫}/2^{\underline{a}}\text{⚫}]$

b) $P[1^{\underline{a}}\text{⚫}/2^{\underline{a}}\text{🔴}]$

c) $P[1^{\underline{a}}\text{🟢}/2^{\underline{a}}\text{🟢}]$

a) $P[1^{\underline{a}}\ \text{⚫}/2^{\underline{a}}\ \text{⚫}] = \frac{P[\text{⚫ y ⚫}]}{P[2^{\underline{a}}\text{⚫}]} = \frac{3/30}{13/30} = \frac{3}{13}$

b) $P[1^{\underline{a}}\ \text{⚫}/2^{\underline{a}}\ \text{🔴}] = \frac{P[\text{⚫ y 🔴}]}{P[2^{\underline{a}}\text{🔴}]} = \frac{1/30}{8/30} = \frac{1}{8}$

c) $P[1^{\underline{a}}\ \text{🟢}/2^{\underline{a}}\ \text{🟢}] = \frac{P[\text{🟢 y 🟢}]}{P[2^{\underline{a}}\text{🟢}]} = \frac{6/30}{9/30} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Página 257

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Lanzamos un dado y una moneda. Los posibles resultados son (1, C), (1, +), (2, C)…

a) Describe el espacio muestral con los doce elementos de los que consta.

Sean los sucesos:

A = “sacar uno o dos en el dado”

B = “sacar + en la moneda”

D = {(1, C), (2, +), (3, C), (3, +), (6, +)}

b) Describe los sucesos A y B mediante todos los elementos.

c) Halla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup D'$

a) E = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C), (6, +)}

b) $A = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +)\}$

$B = \{(1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$

c) $A \cup B = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$

$A \cap B = \{(1, +), (2, +)\}$

$D' = \{(1, +), (2, C), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)\}$

$A \cup D' = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)\}$

2 Sea $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica la respuesta.

a) $P[a_1] = 1/2$
$P[a_2] = 1/3$
$P[a_3] = 1/6$

b) $P[a_1] = 3/4$
$P[a_2] = 1/4$
$P[a_3] = 1/4$

c) $P[a_1] = 1/2$
$P[a_2] = 0$
$P[a_3] = 1/2$

d) $P[a_1] = 2/3$
$P[a_2] = 1/3$
$P[a_3] = 1/3$

a) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

b) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

c) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

d) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

3 **Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B:**

$$\boldsymbol{P[A] = 1/4, \ P[B] = 1/2, \ P[A \cup B] = 2/3}$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

los sucesos A y B son incompatibles.

4 **S** **Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.**

a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y la "n" para las negativas.

b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"?

c) Describe el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".

a) E = {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s), (s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}

b) {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s)}

c) El suceso contrario es "una persona, o ninguna, son partidarias de consumir el producto". Por tanto, estaría formado por:

{(s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}.

Es el suceso contrario al del apartado b).

5 **En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo, (V, M, M) significa que el mayor es varón y los otros dos mujeres. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral E?**

Describe los siguientes sucesos: A = "La menor es mujer", B = "El mayor es varón". ¿En qué consiste $A \cup B$?

E tiene $2^3 = 8$ elementos.

A = {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M)}

B = {(V, V, V), (V, V, M), (V, M, V), (V, M, M)}

$A \cup B$ = "O bien la menor es mujer, o bien el mayor es varón" =

= {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M), (V, V, V), (V, M, V)}

6 **Se lanzan dos dados. Calcula la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6.**

☛ ***Completa esta tabla y razona sobre ella.***

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

En la tabla vamos anotando la mayor puntuación obtenida. Así:

P[La mayor de las puntuaciones sea un 1] $= \frac{1}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 2] $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 3] $= \frac{5}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 4] $= \frac{7}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 5] $= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 6] $= \frac{11}{36}$

7 **Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:**

a) Alumna o que aprueba las matemáticas.

b) Alumno que suspenda las matemáticas.

c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

d) ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

☛ ***Haz una tabla de contingencia.***

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

a) P[alumna $\cup$ aprueba mat.] $=$ P[alumna] $+$ P[aprueba mat.] $-$

$-$ P[alumna $\cap$ aprueba mat.] $= \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) $P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $P[\text{aprueba mat./alumno}] = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

d) Hay que ver si:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}]$$

Calculamos cada una:

$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$P[\text{alumno}] = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$P[\text{aprueba mat.}] = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Por tanto, sí son independientes.

8 **Di cuál es el espacio muestral correspondiente a las siguientes experiencias aleatorias. Si es finito y tiene pocos elementos, dilos todos, y si tiene muchos, descríbelo y di el número total.**

a) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el número.

b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.

c) Extraemos dos cartas de una baraja española y anotamos el palo de cada una.

d) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el resultado.

e) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el número de caras.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$

b) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}

c) Llamamos: O = OROS; C = COPAS; E = ESPADAS; B = BASTOS.

Entonces:

$E = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, B), (C, O), (C, C), (C, E), (C, B), (E, O), (E, C), (E, E), (E, B), (B, O), (B, C), (B, E), (B, B)\}$

d) E tiene $2^6 = 64$ sucesos elementales. Cada suceso elemental está compuesto por seis resultados que pueden ser cara o cruz:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

x_i puede ser cara o cruz. Por ejemplo:

(C, +, C, C, +, C) es uno de los 64 elementos de E.

e) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Página 258

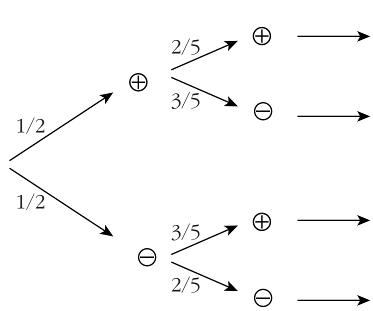
PARA RESOLVER

9 **En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.**

a) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Hacemos un diagrama en árbol:



$P[\oplus \oplus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$

$P[\oplus \ominus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$P[\ominus \oplus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$P[\ominus \ominus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$

a) $P[\oplus \oplus] + P[- \; -] = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

b) $P[\oplus \; -] + P[- \; \oplus] = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

10 **S** **En una cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños.**

Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

☛ ***Usa una tabla como la siguiente:***

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15		40
CAB. NO CAST.			
	25		100

Hacemos la tabla:

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15	25	40
CAB. NO CAST.	10	50	60
	25	75	100

a) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

b) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

11 **Dos personas juegan a obtener la puntuación más alta lanzando sus dados A y B. El dado A tiene cuatro caras con la puntuación 6 y las otras dos caras con la punatuación 10. El dado B tiene una cara con la puntuación 3, cuatro caras con puntuación 6 y la otra con puntuación 12. ¿Qué jugador tiene más probabilidad de ganar?**

☛ ***Haz una tabla en la que aparezcan las 6 posibilidades del dado A y las del dado B. En cada una de las 36 casillas anota quién gana en cada caso.***

Formamos una tabla en la que aparezcan todas las posibilidades (las 6 del dado A y las 6 del B). En cada casilla ponemos quién gana en cada caso:

B \ A	6	6	6	6	10	10
3	A	A	A	A	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
12	B	B	B	B	B	B

A gana en 14 casos.

B gana en 6 casos.

En 16 casos hay empate.

En una tirada, la probabilidad de que gane A es:

$$P[\text{A}] = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

La probabilidad de que gane B es:

$$P[\text{B}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, A tiene mayor probabilidad de ganar.

12 S **De los sucesos A y B se sabe que:**

$$P[A] = \frac{2}{5},\ P[B] = \frac{1}{3} \text{ y } P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}.$$

Halla $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

• $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

• $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

13 S **Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:**

$$P[A] = 0{,}4, \quad P[B] = 0{,}3 \text{ y } P[A \cap B] = 0{,}1$$

Calcula razonadamente:

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A' \cup B']$**

c) $P[A/B]$ **d) $P[A' \cap B']$**

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

d) $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

14 **A, B y C son tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los sucesos:**

a) Se realiza alguno de los tres.

b) No se realiza ninguno de los tres.

c) Se realizan los tres.

d) Se realizan dos de los tres.

e) Se realizan, al menos, dos de los tres.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A' \cap B' \cap C'$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

15 S **Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.**

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

a) P[APROBAR] = P[SABE 1º Y 2º] + P[SABE 1º Y NO 2º] + P[NO SABE 1º Y SÍ 2º] =

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{78}{90} = \frac{13}{15} \approx 0{,}87$$

b) P[SABE 1º Y NO 2º] + P[NO SABE 1º Y SÍ 2º] =

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53$$

16 Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un valor mayor que en la primera.

En total hay 36 posibles resultados. De estos, en 6 casos los dos números son iguales; y, en los otros 30, bien el primero es mayor que el segundo, o bien el segundo es mayor que el primero (con la misma probabilidad).

Luego, hay 15 casos en los que el resultado de la segunda tirada es mayor que el de la primera.

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(NOTA: también se puede resolver el problema haciendo una tabla como la del ejercicio número 6 y contar los casos).

17 S Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Tenemos que:

$$P[\text{pase } 1^{\text{a}}] = 0{,}6; \quad P[\text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}8; \quad P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}5$$

a) $P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cup \text{pase } 2^{\text{a}}] = P[\text{pase } 1^{\text{a}}] + P[\text{pase } 2^{\text{a}}] - P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] =$

$$= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$$

b) $1 - P[\text{pase al menos una}] = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) $P[\text{pase } 1^{\text{a}}] \cdot P[\text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

$P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}5 \neq 0{,}48$

No son independientes.

d) $P[\text{pase } 2^a / \text{no pase } 1^a] = \dfrac{P[\text{pase } 2^a \cap \text{no pase } 1^a]}{P[\text{no pase } 1^a]} =$

$$= \frac{P[\text{pase } 2^a] - P[\text{pase } 1^a \cap \text{pase } 2^a]}{P[\text{no pase } 1^a]} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}6} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

18 **En una comarca hay dos periódicos: *El Progresista* y *El Liberal*. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee *El Progresista* (*P*), el 40% lee *El Liberal* (*L*) y el 25% no lee ninguno de ellos.**

Expresa en función de P y L estos sucesos:

a) Leer los dos periódicos.

b) Leer solo *El Liberal*.

c) Leer solo *El Progresista*.

d) Leer alguno de los dos periódicos.

e) No leer ninguno de los dos.

f) Leer solo uno de los dos.

g) Calcula las probabilidades de: P, L, $P \cap L$, $P \cup L$, $P - L$, $L - P$, $(L \cup P)'$, $(L \cap P)'$.

h) Sabemos que una persona lee *El Progresista*. ¿Qué probabilidad hay de que, además, lea *El Liberal*? ¿Y de que no lo lea?

Tenemos que:

$$P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P' \cap L'] = 0{,}25$$

a) $P[P' \cap L'] = P[(P \cup L)'] = 1 - P[P \cup L]$

$0{,}25 = 1 - P[P \cup L] \Rightarrow P[P \cup L] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P[P \cup L] = P[P] + P[L] - P[P \cap L]$

$0{,}75 = 0{,}55 + 0{,}4 - P[P \cap L] \Rightarrow P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[\text{leer los dos}] = P[P \cap L] = 0{,}2$

b) $P[L] - P[P \cap L] = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

c) $P[P] - P[P \cap L] = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$

d) $P[P \cup L] = 0{,}75$

e) $P[P' \cap L'] = 0{,}25$

f) $P[P \cap L'] + P[P' \cap L] = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55$

g) $P[P] = 0{,}55$; $P[L] = 0{,}4$; $P[P \cap L] = 0{,}2$; $P[P \cup L] = 0{,}75$

$P[P - L] = P[P] - P[P \cap L] = 0{,}35$

$P[L - P] = P[L] - P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[(L \cup P)'] = P[L' \cap P'] = 0{,}25$

$P[(L \cap P)'] = 1 - P[L \cap P] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

h) $P[L/P] = \dfrac{P[L \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}2}{0{,}55} = \dfrac{20}{55} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}36$

$P[L'/P] = \dfrac{P[L' \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}35}{0{,}55} = \dfrac{35}{55} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$

$\left(\text{o bien: } P[L'/P] = 1 - P[L/P] = 1 - \dfrac{4}{11} = \dfrac{7}{11}\right)$

Página 259

19 **Una urna *A* tiene 3 bolas blancas y 7 negras. Otra urna *B* tiene 9 bolas blancas y 1 negra. Escogemos una de las urnas al azar y de ella extraemos una bola.**

Calcula:

a) $P[\text{BLANCA}/A]$

b) $P[\text{BLANCA}/B]$

c) $P[A \text{ y BLANCA}]$

d) $P[B \text{ y BLANCA}]$

e) $P[\text{BLANCA}]$

f) Sabiendo que la bola obtenida ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber escogido la urna *B*?

a) $P[\text{BLANCA}/A] = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

b) $P[\text{BLANCA}/B] = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

c) $P[A \text{ y BLANCA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$

d) $P[B \text{ y BLANCA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{10} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$

e) $P[\text{BLANCA}] = P[A \text{ y BLANCA}] + P[B \text{ y BLANCA}] = \dfrac{3}{20} + \dfrac{9}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

f) $P[B/\text{BLANCA}] = \dfrac{P[B \text{ y BLANCA}]}{P[\text{BLANCA}]} = \dfrac{9/20}{12/20} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

20 **Tenemos las mismas urnas del ejercicio anterior. Sacamos una bola de *A* y la echamos en *B* y, a continuación, sacamos una bola de *B*.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea negra?

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que también la primera fuese negra?

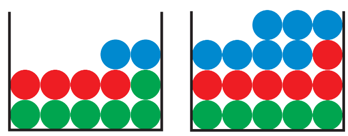
a) $P[2^{a} \text{ NEGRA}] = P[1^{a} \text{ BLANCA y } 2^{a} \text{ NEGRA}] + P[1^{a} \text{ NEGRA y } 2^{a} \text{ NEGRA}] =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{110} + \frac{14}{110} = \frac{17}{110}$$

b) $P[1^{a} \text{ NEGRA}/2^{a} \text{ NEGRA}] = \dfrac{P[1^{a} \text{ NEGRA y } 2^{a} \text{ NEGRA}]}{P[2^{a} \text{ NEGRA}]} = \dfrac{7/10 \cdot 2/11}{17/110} =$

$$= \frac{14/110}{17/110} = \frac{14}{17}$$

21 **Tenemos dos urnas con estas composiciones:**



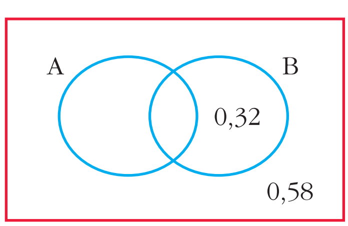
Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y la probabilidad de que sean de distinto color?

$$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{2}{12} \cdot \frac{7}{18} = \frac{30}{216} + \frac{24}{216} + \frac{14}{216} = \frac{68}{216} = \frac{17}{54}$$

$$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1 - \frac{17}{54} = \frac{37}{54}$$

22
S **Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.**

Llamamos A = “falla A”; B = “falla B”.



Tenemos que:

$$P[A' \cap B'] = 0{,}58; \quad P[B \cap A'] = 0{,}32$$

Así:

$$P[A'] = P[A' \cap B'] + P[B \cap A'] = 0{,}58 + 0{,}32 = 0{,}90$$

$$(A' \cap B') \cup (B \cap A') = A'$$

La probabilidad de que no falle A es de 0,90.

23 **Dos jugadores arrojan a la vez dos monedas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras (cero, una o dos)? Razónalo.**

Para cada jugador tenemos que:

$$P[0] = P[0 \text{ CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P[1] = P[1 \text{ CARA}] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P[2] = P[2 \text{ CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Los resultados de los dos jugadores son sucesos independientes. La probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras es:

$$\left(P[0]\right)^2 + \left(P[1]\right)^2 + \left(P[2]\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

24 **Se lanza un dado repetidas veces y estamos interesados en el número de tiradas precisas para obtener un 6 por primera vez.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 se obtenga en la séptima tirada?

a) $E = \{1, 2, 3, \dots\}$

b) $P[7^{\text{a}} \text{ TIRADA}] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{15\,625}{279\,936} \approx 0{,}558$

25 **Un producto está formado de dos partes: *A* y *B*. El proceso de fabricación es tal, que la probabilidad de un defecto en *A* es 0,06 y la probabilidad de un defecto en *B* es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?**

$$P[\text{ningún defecto}] = P[\text{no defecto en } A] \cdot P[\text{no defecto en } B] =$$

$$= (1 - 0{,}06) \cdot (1 - 0{,}07) = 0{,}94 \cdot 0{,}93 = 0{,}8742$$

26
S **Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?**

$$P[BBR] + P[BRB] + P[RBB] = 3 \cdot P[BBR] = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

27 **S** **Una urna *A* contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna *B* tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas.**

Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *A*.

Hacemos un diagrama en árbol:

$$\xrightarrow{1/2} A\ \boxed{6b\ 4n} \xrightarrow{\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}} 2b \longrightarrow P[A \text{ y } 2b] = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{1/2} B\ \boxed{5b\ 9n} \xrightarrow{\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}} 2b \longrightarrow P[B \text{ y } 2b] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13} = \frac{5}{91}$$

$$P[2b] = \frac{1}{6} + \frac{5}{91} = \frac{121}{546}$$

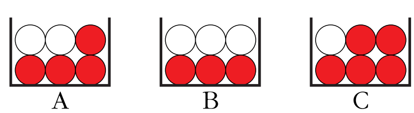
La probabilidad pedida será:

$$P[A/2b] = \frac{P[A \text{ y } 2b]}{P[2b]} = \frac{1/6}{121/546} = \frac{91}{121} = 0{,}752$$

28 **S** **Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas.**

a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

b) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?



a) Hacemos un diagrama en árbol:

$$\xrightarrow{1/3} A \begin{cases} \xrightarrow{2/6} b \longrightarrow P[\text{A y b}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{18} \\ \xrightarrow{4/6} r \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1/3} B \begin{cases} \xrightarrow{3/6} b \longrightarrow P[\text{B y b}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{18} \\ \xrightarrow{3/6} r \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1/3} C \begin{cases} \xrightarrow{1/6} b \longrightarrow P[\text{C y b}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18} \\ \xrightarrow{5/6} r \end{cases}$$

$$P[b] = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

b) $$P[B/b] = \frac{P[\text{B y b}]}{P[b]} = \frac{3/18}{6/18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Página 260

29 S **Sean A y B dos sucesos tales que: $P[A \cup B] = \frac{3}{4}$; $P[B'] = \frac{2}{3}$; $P[A \cap B] = \frac{1}{4}$. Halla $P[B]$, $P[A]$, $P[A' \cap B]$.**

$$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$$

$$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

30 S **En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas.**

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

$$\xrightarrow{0{,}12} \text{ENFERMO} \xrightarrow{0{,}9} \text{POSITIVO} \longrightarrow P[\text{ENF. y POSITIVO}] = 0{,}12 \cdot 0{,}9 = 0{,}108$$

$$\xrightarrow{0{,}88} \text{NO ENFERMO} \xrightarrow{0{,}05} \text{POSITIVO} \longrightarrow P[\text{NO ENF. y POSITIVO}] = 0{,}88 \cdot 0{,}05 = 0{,}044$$

$$P[\text{POSITIVO}] = 0{,}108 + 0{,}044 = 0{,}152$$

La probabilidad pedida será:

$$P[\text{NO ENF./POSITIVO}] = \frac{P[\text{NO ENF. Y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0{,}044}{0{,}152} = 0{,}289$$

31 S **En tres máquinas, A, B y C, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%.**

Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

$$\xrightarrow{1/3} A \xrightarrow{1/100} \text{DEFECTUOSA} \longrightarrow P[A \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\xrightarrow{1/3} B \xrightarrow{2/100} \text{DEFECTUOSA} \longrightarrow P[B \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} = \frac{2}{300}$$

$$\xrightarrow{1/3} C \xrightarrow{3/100} \text{DEFECTUOSA} \longrightarrow P[C \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{300}$$

$$P[\text{DEF.}] = \frac{1}{300} + \frac{2}{300} + \frac{3}{300} = \frac{6}{300}$$

La probabilidad pedida será:

$$P[A/\text{DEF.}] = \frac{P[A \text{ y DEF.}]}{P[\text{DEF.}]} = \frac{1/300}{6/300} = \frac{1}{6}$$

32
S **Una caja *A* contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja *B* contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de *A* a *B* y después se extrae una bola de *B*, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.**

$$A\,\boxed{2b\ 2r} \xrightarrow{2/4} b \longrightarrow B\,\boxed{4b\ 2r} \xrightarrow{4/6} b;\ P[1^{\underline{a}}\text{ b y }2^{\underline{a}}\text{ b}] = \frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A\,\boxed{2b\ 2r} \xrightarrow{2/4} r \longrightarrow B\,\boxed{3b\ 3r} \xrightarrow{3/6} b;\ P[1^{\underline{a}}\text{ r y }2^{\underline{a}}\text{ b}] = \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P[2^{\underline{a}}\text{ b}] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[1^{\underline{a}}\text{ b}/2^{\underline{a}}\text{ b}] = \frac{P[1^{\underline{a}}\text{ b y }2^{\underline{a}}\text{ b}]}{P[2^{\underline{a}}\text{ b}]} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

33
S **Una urna *A* contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna *B*, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *B*.**

$$\xrightarrow{1/2} A\,\boxed{5b\ 3n} \xrightarrow{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}} 2n \longrightarrow P[A\text{ y }2n] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3}{56}$$

$$\xrightarrow{1/2} B\,\boxed{6b\ 4n} \xrightarrow{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}} 2n \longrightarrow P[B\text{ y }2n] = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{1}{15}$$

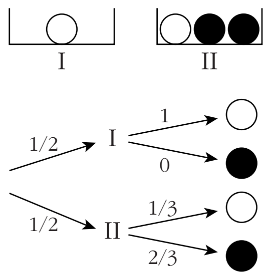
$$P[2n] = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} = \frac{101}{840}$$

Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[B/2n] = \frac{P[B\text{ y }2n]}{P[2n]} = \frac{1/15}{101/840} = \frac{56}{101}$$

34
S **Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.**

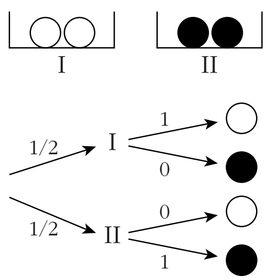
Hay cuatro posibles distribuciones. Veamos cuál es la probabilidad de obtener blanca en cada caso:

a) 

$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2}$

$P[\text{II y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

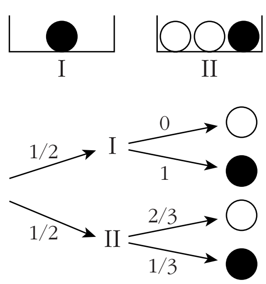
$P[\bigcirc] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

b) 

$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$P[\text{II y } \bigcirc] = 0$

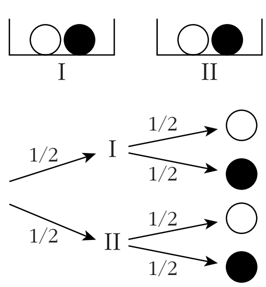
$P[\bigcirc] = \frac{1}{2}$

c) 

$P[\text{I y } \bigcirc] = 0$

$P[\text{II y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P[\bigcirc] = \frac{1}{3}$

d) 

$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[\text{II y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[\bigcirc] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Para obtener la máxima probabilidad de obtener una bola blanca, deberemos colocar una bola blanca en una de las urnas y las otras tres bolas en la otra urna.

35 **S** **Sean *A* y *B* dos montones de cartas. En *A* hay 8 oros y 5 espadas y, en *B*, 4 oros y 7 espadas. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son espadas. Halla la probabilidad de que las hayamos sacado del montón *B*.**

$$\nearrow^{1/2}\ A(8o,\ 5e) \xrightarrow{\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}} 2e$$

$$\searrow_{1/2}\ B(4o,\ 7e) \xrightarrow{\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}} 2e$$

$$P[A \text{ y } 2e] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{78}$$

$$P[B \text{ y } 2e] = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{21}{110}$$

$$P[2e] = \frac{5}{78} + \frac{21}{110} = \frac{547}{2\,145}$$

Así, tenemos que:

$$P[B/2e] = \frac{P[B \text{ y } 2e]}{P[2e]} = \frac{21/110}{547/2\,145} = \frac{819}{1\,094} \approx 0{,}749$$

36 **Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas.**

a) Se extrae una bola. Calcula la probabilidad de que sea blanca.

b) Se extrae una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

c) Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

d) ¿Son independientes los sucesos “sacar bola marcada” y “sacar bola blanca”?

Resumimos la información en una tabla:

	MARCADAS	SIN MARCAR	
BLANCAS	75	25	100
NEGRAS	175	125	300
	250	150	400

a) $P[\text{BLANCA}] = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{BLANCA/MARCADA}] = \frac{75}{250} = \frac{3}{10}$

c) $P[\text{NEGRA y MARCADA}] = \frac{175}{400} = \frac{7}{16}$

d) $P[\text{BLANCA}]\cdot P[\text{MARCADA}] = \frac{1}{4}\cdot\frac{250}{400} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{32}$

$P[\text{BLANCA y MARCADA}] = \frac{75}{400} = \frac{3}{16} \neq \frac{5}{32}$

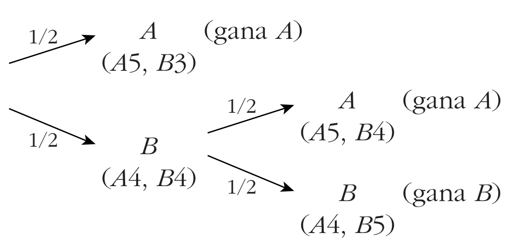
No son independientes.

37 **Dos personas se enfrentan en un juego en el que será vencedor el primero que gane 5 partidas. Pero antes de finalizar el juego, este se interrumpe en el momento en que uno ha ganado 4 partidas y otro 3.**

¿Cómo deben repartirse los 4 200 euros que apostaron?

☛ ***Describe en un diagrama en árbol las posibles continuaciones de la partida.***

Llamamos A al jugador que lleva 4 partidas ganadas y B al de 3. Las posibles continuaciones del juego son:



$$P\,[\text{gana } A] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\,[\text{gana } B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, A debe llevarse $\frac{3}{4}$ del total y B, $\frac{1}{4}$; es decir:

$$A \;\rightarrow\; \frac{3}{4}\,4\,200 = 3\,150 \text{ €}; \quad B \;\rightarrow\; \frac{1}{4}\,4\,200 = 1\,050 \text{ €}$$

38 **En un centro escolar hay tres grupos de Bachillerato. El primero está compuesto por 10 alumnos de los que 7 prefieren la música moderna, 2 prefieren la clásica y 1 que no le gusta la música. En el segundo, compuesto por 12 alumnos, la distribución de preferencias es 5, 7, 0, respectivamente; y, en el tercero, formado por 14 alumnos, la distribución de preferencias es 6, 6, 2, respectivamente.**

Se elige un grupo al azar y se regalan 2 entradas para un concierto de música clásica a dos alumnos seleccionados al azar.

a) Halla la probabilidad de que los dos alumnos elegidos sean aficionados a la música clásica.

b) Si los dos alumnos agraciados son, efectivamente, aficionados a la música clásica, ¿cuál es la probabilidad de que sean del primer grupo?

☛ ***Organiza los datos en una tabla.***

Organizamos los datos en una tabla:

	MODERNA	CLÁSICA	NO	TOTAL
1º	7	2	1	10
2º	5	7	0	12
3º	6	6	2	14

La probabilidad de elegir un grupo cualquiera es $\frac{1}{3}$.

a) $P[\text{2 ALUMNOS DE CLÁSICA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}168$

b) $P[\text{2 ALUMNOS DEL 1º/AMBOS DE CLÁSICA}] = \frac{P[\text{DOS DE 1º DE CLÁSICA}]}{P[\text{DOS DE CLÁSICA}]} =$

$$= \frac{(1/3) \cdot (2/10) \cdot (1/9)}{0{,}168} \approx 0{,}044$$

Página 261

CUESTIONES TEÓRICAS

39 S **Sean A y B dos sucesos tales que $P[A] = 0{,}40$; $P[B/A] = 0{,}25$ y $P[B] = b$.**

Halla:

a) $P[A \cap B]$.

b) $P[A \cup B]$ si $b = 0{,}5$.

c) El menor valor posible de b.

d) El mayor valor posible de b.

a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = 0{,}40 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$

b) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}40 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}8$

c) El menor valor posible de b es $P[B] = P[A \cap B]$, es decir, 0,1.

d) El mayor valor posible de b es: $1 - (P[A] - P[A \cap B]) = 1 - (0{,}4 - 0{,}1) = 0{,}7$

40 **Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es p, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? Razónalo.**

Si $P[A \cap B] = p$, entonces:

$$P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - p$$

41 **Razona la siguiente afirmación: Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que 1/2, la suma de las probabilidades de ambos (por separado), no puede exceder de 3/2.**

$$P[A] + P[B] = P[A \cup B] + P[A \cap B] < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

pues $P[A \cup B] \le 1$ y $P[A \cap B] < \frac{1}{2}$.

42 **Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. ¿Es posible que p sea una probabilidad si: $P[A] = \frac{2}{5}$, $P[B] = \frac{1}{5}$ y $P[A' \cap B'] = \frac{3}{10}$?**

$$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{7}{10}$$

Por otra parte:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{7}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - P[A \cap B] \ \Rightarrow \ P[A \cap B] = \frac{-1}{10}$$

Es imposible, pues una probabilidad no puede ser negativa.

43 **Sea A un suceso con $0 < P[A] < 1$.**

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario A'?

b) Sea B otro suceso tal que $B \subset A$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y C' independientes?

Justifica las respuestas.

a) $P[A] = p \neq 0$; $P[A'] = 1 - p \neq 0$

$P[A] \cdot P[A'] = p(1 - p) \neq 0$

$P[A \cap A'] = P[\varnothing] = 0$

No son independientes, porque $P[A \cap A'] \neq P[A] \cdot P[A']$.

b) $P[A \cap B] = P[B]$

¿$P[A] \cdot P[B] = P[B]$? Esto solo sería cierto si:

- $P[A] = 1$, lo cual no ocurre, pues $P[A] < 1$.
- $P[B] = 0$. Por tanto, solo son independientes si $P[B] = 0$.

c) A independiente de $C \Rightarrow P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C]$

$$P[A \cap C'] = P[A - (A \cap C)] = P[A] - P[A \cap C] =$$
$$= P[A] - P[A] \cdot P[C] = P[A]\,(1 - P[C]) = P[A] \cdot P[C']$$

Por tanto, A y C' son independientes.

44 **Si A y B son dos sucesos de experimento aleatorio y $P[A] = 0$:**

a) ¿Qué podemos decir de $P[A \cap B]$?

b) ¿Y de $P[A \cup B]$?

c) Responde a las mismas preguntas si $P[A] = 1$.

a) $P[A \cap B] = 0$

b) $P[A \cup B] = P[B]$

b) $P[A \cap B] = P[B]$; $P[A \cup B] = P[A] = 1$

45 **Al tirar tres dados, podemos obtener suma 9 de seis formas distintas:**

126, 135, 144, 225, 234, 333

y otras seis de obtener suma 10: 136, 145, 226, 235, 244, 334.

Sin embargo, la experiencia nos dice que es más fácil obtener suma 10 que suma 9. ¿Por qué?

1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3! formas distintas. Es decir:

$$3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$$

1, 4, 4; 2, 2, 5 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3 formas distintas. Es decir: $2 \cdot 3 = 6$

18 + 6 + 1 = 25 formas distintas de obtener suma 9.

$$P[\text{suma } 9] = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 $\rightarrow$ $6 \cdot 3 = 18$ formas

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 $\rightarrow$ $3 \cdot 3 = 9$ formas

18 + 9 = 27 formas distintas de obtener suma 10.

$$P[\text{suma } 10] = \frac{27}{216}$$

Está claro, así, que $P[\text{suma } 10] > P[\text{suma } 9]$.

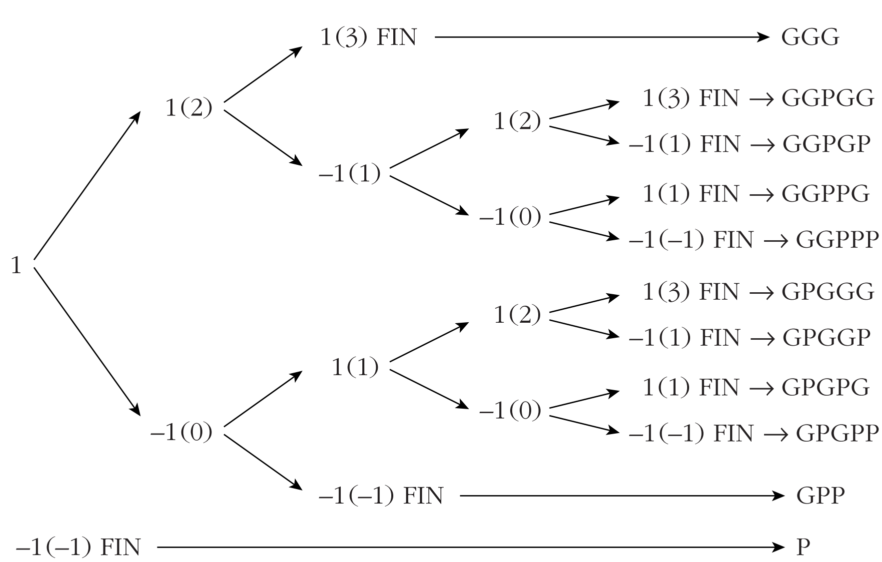
PARA PROFUNDIZAR

46 **Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta 5 veces, a lo sumo. Cada apuesta es de 1 euro. El hombre empieza con 1 euro y dejará de jugar cuando pierda el euro o gane 3 euros.**

a) Halla el espacio muestral de los resultados posibles.

b) Si la probabilidad de ganar o perder es la misma en cada apuesta, ¿cuál es la probabilidad de que gane 3 euros?

a) Hacemos un esquema:



El espacio muestral sería:

E = {GGG, GGPGG, GGPGP, GGPPG, GGPPP, GPGGG, GPGGP, GPGPG, GPGPP, GPP, P}

donde G significa que gana esa partida y P que la pierde.

b) Por el esquema anterior, vemos que gana 3 euros con:

$$\text{GGG} \;\rightarrow\; \textit{probabilidad} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{GGPGG} \;\rightarrow\; \textit{probabilidad} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\text{GPGGG} \;\rightarrow\; \textit{probabilidad} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Por tanto:

$$P[\text{gane 3 euros}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

47 **S** **En una baraja de 40 cartas, se toman tres cartas distintas. Calcula la probabilidad de que las tres sean números distintos.**

$$P[\text{3 números distintos}] = 1 \cdot P[2^{\underline{a}} \text{ dist. de la } 1^{\underline{a}}] \cdot P[3^{\underline{a}} \text{ dist. de la } 1^{\underline{a}} \text{ y de la } 2^{\underline{a}}] =$$

$$= 1 \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = \frac{192}{247}$$

48 **S** **Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes, etc.)?**

$$P[\text{ninguna coincidencia}] = 1 \cdot P[2^{\underline{a}} \text{ en distinto día que la } 1^{\underline{a}}] \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot P[5^{\underline{a}} \text{ en distinto día que } 1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}, 3^{\underline{a}} \text{ y } 4^{\underline{a}}] =$$

$$= 1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{360}{2\,401} = 0{,}15$$

$$P[\text{alguna coincidencia}] = 1 - P[\text{ninguna coincidencia}] = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

49 **S** **En una competición de tiro con arco, cada tirador dispone, como máximo, de tres intentos para hacer diana. En el momento en que lo consigue, deja de tirar y supera la prueba y, si no lo consigue en ninguno de los tres intentos, queda eliminado. Si la probabilidad de hacer blanco con cada flecha, para un determinado tirador, es 0,8:**

a) Calcula la probabilidad de no quedar eliminado.

b) Si sabemos que superó la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya conseguido en el segundo intento?

a) **1ª forma**

$P[\text{NO ELIMINADO}] = P[\text{AC } 1^{\underline{a}}] + P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y AC } 2^{\underline{a}}] + P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y NO AC } 2^{\underline{a}} \text{ y AC } 3^{\underline{a}}] =$

$= 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}992$

2ª forma

$P[\text{NO ELIMINADO}] = 1 - P[\text{ELIMINADO}] = 1 - P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y NO AC } 2^{\underline{a}} \text{ y NO AC } 3^{\underline{a}}] =$

$= 1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$

b) $P[\text{AC } 2^{\underline{a}}/\text{NO ELIMINADO}] = \dfrac{P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y AC } 2^{\underline{a}}]}{P[\text{NO ELIMINADO}]} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}992} \approx 0{,}1613$

50
S **Sea A el suceso "una determinada persona A resuelve un determinado problema" y B el suceso "lo resuelve la persona B". Se sabe que la probabilidad de que lo resuelvan las dos personas es de 1/6; y, la de que no lo resuelva ninguna de las dos es de 1/3. Sabiendo que la probabilidad de que lo resuelva una persona es independiente de que lo resuelva la otra, calcula $P(A)$ y $P(B)$.**

Llamamos $P[A] = x$; $P[B] = y$. Como A y B son independientes:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] \quad \to \quad x \cdot y = \frac{1}{6}$$

Además, tenemos que:

$$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = \frac{1}{3} \quad \to \quad P[A \cup B] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Pero:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = x + y - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \text{ es decir: } x + y = \frac{5}{6}$$

Uniendo las dos condiciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = \dfrac{1}{6} \\ x + y = \dfrac{5}{6} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{5}{6} - x \\ x\left(\dfrac{5}{6} - x\right) = \dfrac{1}{6}; \ \dfrac{5x}{6} - x^2 = \dfrac{1}{6}; \ 5x - 6x^2 = 1 \end{array}$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0; \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \begin{array}{l} x = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

Hay dos soluciones:

$$x = \frac{1}{2} \ \to \ y = \frac{1}{3} \ \to \ \begin{cases} P[A] = 1/2 \\ P[B] = 1/3 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{3} \ \to \ y = \frac{1}{2} \ \to \ \begin{cases} P[A] = 1/3 \\ P[B] = 1/2 \end{cases}$$

51 **¿Qué es más probable, obtener alguna vez un 6 lanzando un dado 4 veces o un doble 6 lanzando dos dados 24 veces?**

$P[\text{AL MENOS UN 6 EN 4 TIRADAS}] = 1 - P[\text{NINGÚN 6 EN 4 TIRADAS}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177$

$P[\text{DOBLE 6 CON 2 DADOS EN 24 TIRADAS}] = 1 - P[\text{NINGÚN DOBLE 6}] \overset{(*)}{=} 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914$

$^{(*)}$ $P[\text{DOBLE 6 EN UNA TIRADA}] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \quad \to \quad P[\text{NO DOBLE 6}] = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

Por tanto, es más probable sacar al menos un 6 lanzando 4 veces un dado.