Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Segundo curso de Bachillerato

Departamento de Matemáticas
I.E.S. “Universidad Laboral”
Cáceres

Índice

Advertencia:

No existen las páginas comprendidas entre la 88 y la 95 debido a una modificación del programa oficial de la asignatura, aprobada con posterioridad a la elaboración de este material, que suprimió un tema inicialmente incluido en el temario.

Presentación

Amable lector:

Tienes en las manos unas páginas que han sido escritas para ti. Para que el tiempo del que dispones en clase, siempre escaso para aprender tantas cosas nuevas, puedas aprovecharlo mejor, dedicándolo a pensar en lo que oigas y a practicar con lo que se te proponga, despreocupándote de esa toma de apuntes al viejo estilo que, en estos tiempos de Internet y tecnologías cada vez más avanzadas, parece práctica más propia del medioevo que de este siglo XXI que avanza imparable.

Esta asignatura es asequible. Bastante asequible, podríamos decir; pero exige tu pequeño esfuerzo cotidiano, sistemático. Si cada día trabajas un poco en los conceptos que se hayan tratado en clase, si vas resolviendo según sean propuestos los ejercicios que figuran al final de cada capítulo, cuando llegue el final de curso te encontrarás desahogado y en perfectas condiciones de pasar una hoja más del libro, inacabable por otra parte, de tus conocimientos.

La asignatura se divide en tres partes, de desigual extensión e importancia. En todas ellas se parte de un supuesto básico: Las *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* no son las matemáticas de siempre. Y ello no ha de notarse en que sean más o menos fáciles, ni en que los contenidos de unas y otras sean diferentes; ha de notarse, y lo notarás, en que el enfoque de su enseñanza tendrá un carácter eminentemente práctico y utilizario. Aquí, las demostraciones brillarán por su ausencia pero, en cambio, tendrás ocasión de comprobar cómo las matemáticas, si tienen la enorme importancia que tienen, es porque con ellas puede darse solución a problemas de muy diversa índole. No sólo los problemas de carácter físico, o relacionados con lo que tradicionalmente se llamaron Ciencias de la Naturaleza, sino problemas de tipo económico, sociológico, geográfico... hallan respuesta gracias a algunas de las herramientas que aquí aprenderás a manejar.

La primera parte del curso, cuyo desarrollo nos ocupará poco más de mes y medio, trata de las matrices, los sistemas de ecuaciones y de la programación lineal. La segunda parte, de extensión algo mayor que la anterior, la dedicaremos, fundamentalmente, a estudiar algunas de las aplicaciones del concepto de derivada; la finalizaremos, más o menos, a mediados del mes de febrero. Y desde ese momento hasta el final de curso, dirigiremos nuestro trabajo a repasar conceptos sobre Probabilidad que ya viste en años pasados y, especialmente, a introducirnos en una rama de las matemáticas de extraordinaria y creciente importancia: la inferencia estadística, de cuyas enormes y constantes aplicaciones en nuestra vida puedes tener constancia sin más que abrir cualquier periódico.

Confiamos en que, cuando termine nuestro viaje, el esfuerzo que hayas podido hacer sea justamente recompensado, y que al equipaje con el que lo iniciaste se haya añadido algún nuevo elemento, de tan poco peso como inestimable valor.

El autor.

Tema 1

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de Gauss

1. INTRODUCCIÓN

Si alguien te pidiera que hallaras las edades de un padre y un hijo, sabiendo que la suma de dichas edades es 64 años y que la edad del padre es el triple que la del hijo, es seguro que tras llamar *x* e *y* a dichos valores desconocidos, escribirías:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y &=& 64 \\ x &=& 3y \end{array}\right\}$$

y, con poquitas operaciones, obtendrías que el padre tiene 48 años y el hijo 16.

Pues bien: sistemas de ecuaciones como el precedente, conocidos por ti desde hace años, son los que vamos a estudiar en este primer tema de nuestro programa. La novedad consistirá en que el método de resolución que veremos en este curso, llamado *método de Gauss,* en honor al insigne matemático alemán [1777-1855], servirá no sólo para resolver sistemas de ecuaciones tan sencillos como el anterior, sino para resolver sistemas de los que realmente aparecen en economía, sociología, etc., en los que en ocasiones son centenares las ecuaciones e incógnitas que intervienen; es el método sin el cual hasta el más potente y rápido de los ordenadores se las vería y desearía para dar solución eficaz a muchas de las cuestiones que suelen planteársele.

Carl Friedrich Gauss

Lo que estudiemos en este tema será completado más adelante, cuando el conocimiento de las matrices y los determinantes nos permita plantear las cosas desde otro punto de vista. Empezaremos estableciendo un vocabulario básico para, inmediatamente, entrar en materia. Te adelantamos, en cualquier caso, que el enfoque que vamos a dar a nuestro trabajo (enfoque común al resto del temario) será eminentemente práctico, acorde con el planteamiento de esta asignatura.

2. ECUACIONES LINEALES

Ejemplos previos

• Si observas la expresión $x+3x=4x$ admitirás que se trata de una igualdad que se verifica para cualquier valor de *x*. Por dicha razón se dice que es una *identidad.*

• La igualdad $3x+2=8$ sólo se verifica si $x=2$. La $x+2y=8$ se verifica para $x=2, y=3$, o para $x=4, y=2$, etc., pero no, por ejemplo, para $x=4, y=6$. Se trata de *ecuaciones.* Con una *incógnita* la primera y con dos la segunda y ambas *lineales* o de primer grado, porque el exponente de las "letras" es 1.

• Hay ecuaciones de grado superior al primero, como la $x^2+y=9$ pero aquí no nos interesan.

Definiciones

➪ Llamaremos *ecuación lineal* a toda expresión de la forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=b$$

donde las a_i (i = 1, 2, ... n) y b son números reales conocidos, llamados *coeficientes* de la ecuación y *término independiente*, respectivamente, y las x_i números reales sin determinar llamados *incógnitas*.

➪ Diremos que n números reales $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \ldots \quad \alpha_n)$ constituyen una *solución* de la ecuación anterior cuando al sustituir cada x_i por el respectivo valor α_i el primer miembro de la ecuación toma un valor igual al término independiente.

➪ *Resolver* una ecuación consiste en obtener todas sus soluciones. Una ecuación puede tener una, infinitas o ninguna solución. Cuando dos ecuaciones del mismo número de incógnitas tienen las mismas soluciones, se dice que son ecuaciones *equivalentes*.

Ecuaciones equivalentes a otra

Como acabamos de decir, dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones. Pues bien, te recordamos que se obtiene una ecuación equivalente a otra dada si:

- Simplificamos, caso de ser posible, cada miembro.
- Sumamos o restamos el mismo número a cada miembro.
- Multiplicamos o dividimos ambos miembros por un mismo número distinto de cero.

Ejemplo

Las transformaciones anteriores son las que siempre has utilizado para resolver ecuaciones, pasando de la ecuación inicial a otra equivalente más sencilla. Supongamos, por si lo dudas, que se tuviera la ecuación: $5x+8+4x = 2x+26+x$. Para resolverla procederías así:

1°:	Simplificarías cada miembro:	$9x+8=3x+26$
2°:	Restarías 8 a cada miembro:	$9x=3x+18$
3°:	Restarías $3x$ a cada miembro:	$6x=18$
4°:	Dividirías ambos miembros por 6:	$x=3$

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definiciones

➪ Un *sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas* es un conjunto de **m** ecuaciones de primer grado:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \ddots & + & \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

donde los símbolos a_{ij} , b_i representan números reales fijos, llamados *coeficientes* y *términos independientes,* respectivamente, y los símbolos x_j números reales sin determinar, llamados *incógnitas*. De la tabla :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

diremos que es la *matriz del sistema.* Como veremos, para estudiar un sistema bastará con utilizar exclusivamente dicha matriz.

Otras definiciones

➪ Diremos que **n** números $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \ldots \quad \alpha_n)$ constituyen una *solución* del sistema anterior si son solución de todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

➪ *Discutir* un sistema de ecuaciones consiste en averiguar si dicho sistema posee alguna solución y, en caso afirmativo, cuántas.

➪ Diremos que un sistema es *compatible* si admite alguna solución. Como veremos, un sistema que sea compatible o bien tiene una solución única (diremos que es compatible *determinado*) o bien infinitas (se dice, en expresión no muy acertada, que es compatible *indeterminado*). Si el sistema no tiene solución, se llama *incompatible.*

➪ *Resolver* un sistema compatible consiste en encontrar todas sus soluciones. (El método de Gauss efectúa simultáneamente la discusión y, en su caso, la resolución de un sistema).

Ejemplos

1º) El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: $\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & + & y & = & 7 \\ 2x & + & 3y & = & 8 \end{array}\right\}$ tiene por matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

y es un sistema compatible determinado. Su única solución es (1, 2), lo cual también suele indicarse escribiendo $x = 1$, $y = 2$.

2º) Escribe la matriz del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 17 \\ 4x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 6 \end{array}\right\}$$

y comprueba, por los procedimientos que recuerdes de cursos anteriores, que su única solución es (2, 1, –2).

Sistemas equivalentes

En el fondo, lo que hacías en otros cursos para resolver un sistema de ecuaciones era pasar del sistema inicial a otro que tuviera las mismas soluciones, pero más sencillo de resolver. Esto, de una forma más metódica, es lo que también haremos ahora, en cuanto precisemos el significado de ciertos términos.

☞ De dos sistemas con el mismo número de incógnitas (aunque no tengan el mismo número de ecuaciones) se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones, es decir, si toda solución del primero es solución del segundo y viceversa.

Paso de un sistema a otro equivalente

Admitiremos sin demostración que se obtiene un sistema equivalente a otro dado si:

① *Se prescinde de una ecuación que sea combinación lineal de otras* (es decir, de una ecuación que resulte de multiplicar otras por un número y sumarlas). En particular, puede prescindirse de una ecuación cuyos coeficientes y término independiente sean nulos.

② *Se sustituye una ecuación por otra equivalente.* En particular, puede sustituirse una ecuación por la que resulta de multiplicarla o dividirla por un número distinto de cero.

③ *Se sustituye una ecuación por la que resulta de sumar a dicha ecuación una combinación lineal de otras.*

4. MÉTODO DE GAUSS

El procedimiento de Gauss para resolución de sistemas de ecuaciones se basa en la aplicación reiterada y metódica al sistema dado de transformaciones de las citadas arriba, hasta llegar a un sistema equivalente al inicial, pero lo más sencillo posible; como, además, lo que caracteriza a un sistema son sus coeficientes y términos independientes, y no las letras con las que representemos las incógnitas, se trabaja directamente con su matriz. El método de Gauss, en resumen, consiste en transformar la matriz del sistema en otra que tenga nulos todos los elementos situados por debajo de la llamada diagonal principal, es decir, todos los elementos a_{ij} en los que $i > j$ Entenderás mejor cómo *funciona* tal método estudiando los siguientes ejemplos, correspondientes a los tres casos posibles:

Primer ejemplo

Vamos a discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Como decimos, trabajaremos con la matriz del sistema sin necesidad de escribir éste completamente. Con ese convenio, el esquema del proceso es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -9 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 44 & 132 \end{pmatrix}$$

(Primer paso: multiplica la segunda ecuación por 2 y réstale la primera y resta a la tercera ecuación, después de multiplicarla por 2, la primera multiplicada por 3; segundo paso: multiplica la tercera ecuación por –5 y réstale la segunda) .

Por consiguiente, el sistema dado es equivalente a este otro:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ & - & 5y & + & z & = & -2 \\ & & & & 44z & = & 132 \end{array}\right\}$$

que se resuelve fácilmente empezando por la última ecuación, de la que se obtiene: $z = 3$
llevando después ese valor a la segunda: $y = 1$
y, por último, llevando ambos valores a la primera: $x = 2$

El sistema, al tener una única solución, la (2, 1, 3), es *compatible determinado.*

Segundo ejemplo

Vamos a discutir y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 17 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 4x & - & y & + & 5z & = & 13 \end{array}\right\}$$

El esquema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -7 & 7 & -21 \\ 0 & -14 & 14 & -42 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -7 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(En el último paso se ha dividido entre 7 la segunda ecuación y se ha prescindido de la ecuación $0x + 0y + 0z = 0$ que se verifica para cualquier valor de las incógnitas).

Por tanto, el sistema dado es equivalente al:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 17 \\ & - & y & + & z & = & -3 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 3 + z \\ x = 4 - z \end{array}\right.$$

Es decir, forman el conjunto: $\{(4z, 3 + z, z) \,/\, z \in \mathbf{R}\}$.

(En otras palabras, que si, por ejemplo, haces $z = 2$, los valores $x = 2$, $y = 5$, $z = 2$ son una solución; si tomas $z = 1$, los valores $x = 3$, $y = 4$, $z = 1$ también son solución, y así tantas veces como quieras.)

El sistema tiene infinitas soluciones: es *compatible indeterminado.*

Tercer ejemplo

Discutiremos y, en su caso, resolveremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 11 \\ 4x & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right\}$$

El esquema de la discusión es éste:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 11 \\ 4 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 0x & - & 5y & - & z & = & -2 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 110 \end{array}\right\}$$

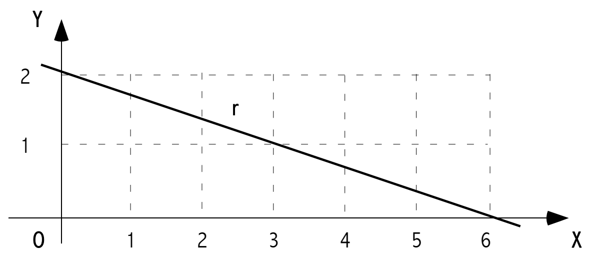
cuya última ecuación no se verifica para ningún valor de x, y, z . El sistema, pues, es *incompatible*.

5. INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Ecuación de la recta en el plano

◆ Como sabes, si en el plano se fija un sistema de referencia, a cada punto P le corresponde un único par ordenado de números (x, y) y a cada par ordenado de números le corresponde un único punto, estableciéndose así el concepto de coordenadas.

◆ También sabes que la ecuación de una recta **r** es una igualdad de la forma $Ax + By + C = 0$ que es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la recta **r**, pero sólo por ellas. Así, por ejemplo, las coordenadas de todos los puntos de la recta de la figura:

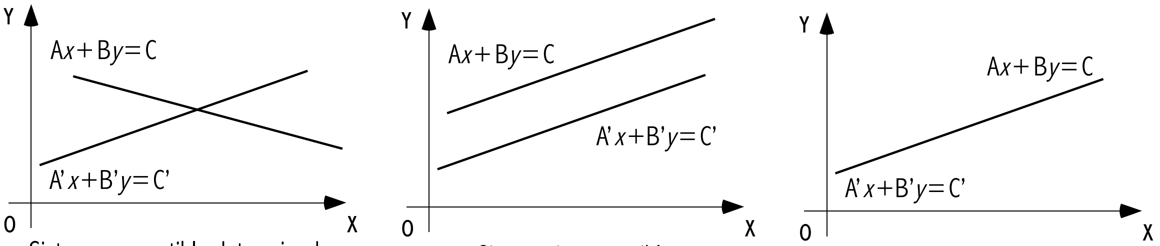


cumplen la ecuación $x + 3y - 6 = 0$ y, recíprocamente, todo punto cuyas coordenadas verifiquen dicha ecuación está en la recta.

Visto lo anterior, supongamos dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} Ax & + & By & = & C \\ A'x & + & B'y & = & C' \end{array}\right\}$$

Como tal sistema puede tener una, ninguna o infinitas soluciones y cada ecuación representa una recta, podemos deducir la posición relativa de dichas rectas correspondiente a cada uno de los casos anteriores: si el sistema tiene sólo una solución, las rectas tienen un único punto en común, se *cortan*. Si no tiene ninguna solución, las dos rectas son *paralelas*. Finalmente, si el sistema tiene infinitas soluciones, las dos rectas son *coincidentes*. Es lo que se refleja en la figura siguiente.



Sistema compatible determinado
Rectas secantes

Sistema incompatible
Rectas paralelas

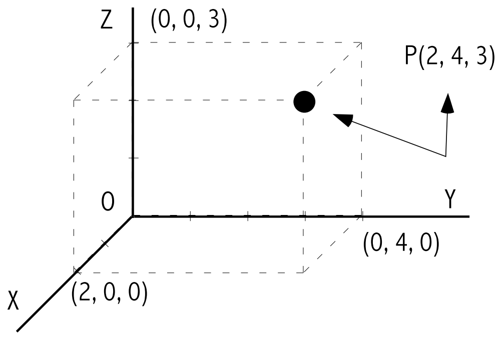
Sistema compatible indeterminado
Rectas coincidentes

Consecuencia

> Como resultado de lo anterior, cuando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sea compatible determinado, su única solución coincidirá con las coordenadas del punto de corte de las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema.

Ecuación del plano en el espacio

Si para determinar un punto en el plano basta con un par ordenado de números, un punto **P** en el espacio queda determinado por tres números: Tomados tres ejes perpendiculares dos a dos que se corten en un punto **O**, llamado origen, las coordenadas de **P** son las longitudes (con signo) de las aristas de un paralelepípedo en el que **O** y **P** son vértices opuestos.

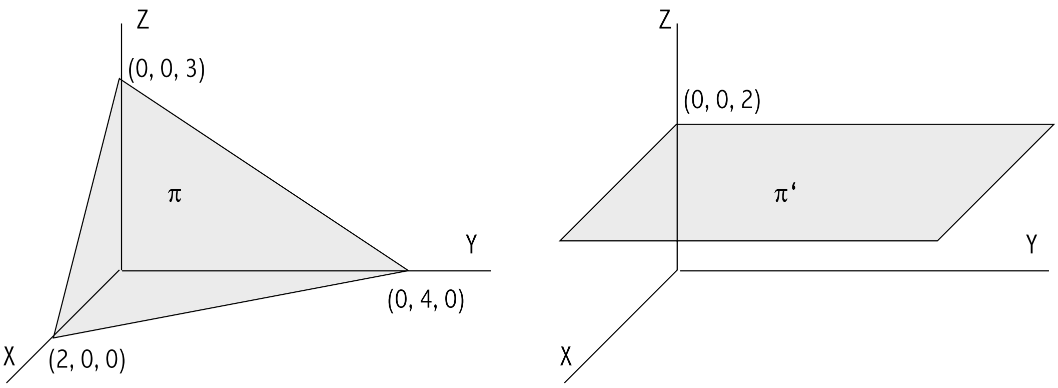


■ Las coordenadas del punto P del dibujo son (2, 4, 3). Un punto situado en el eje *OX* tiene coordenadas de la forma (x, 0, 0); si está en el eje *OY,* (0, y, 0); si en *OZ,* (0, 0, z). Si el punto se halla en el plano *OXY* sus coordenadas son del tipo (x, y, 0); si está en *OXZ,* (x, 0, z); si está en el plano *OYZ,* (0, y, z).

Sucede, además, que al igual que una recta en el plano tiene por ecuación una expresión de la forma $Ax+By+C=0$, *un plano en el espacio tiene una ecuación de la forma* $Ax+By+Cz+D=0$. Los puntos que forman tal plano son aquellos cuyas coordenadas verifiquen dicha ecuación, y sólo ellos.

Ejemplos

1º) Comprueba que la ecuación del plano π de la figura siguiente es $6x+3y+4z-12=0$. Halla, después, la ecuación de **π'**.

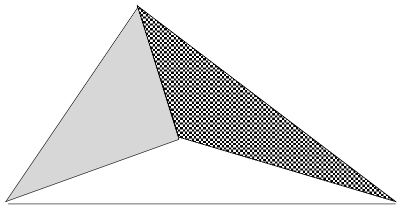
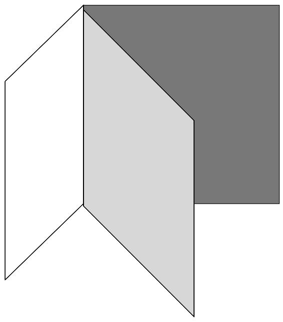
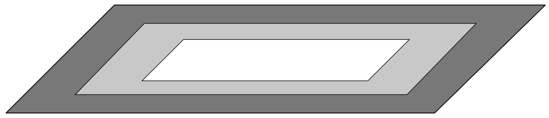
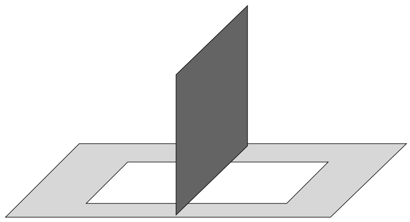
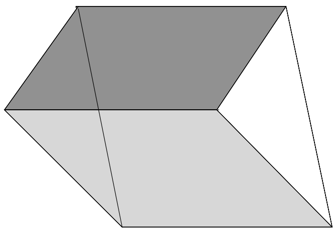
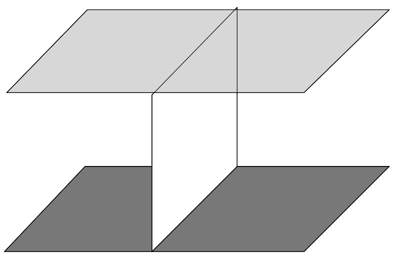
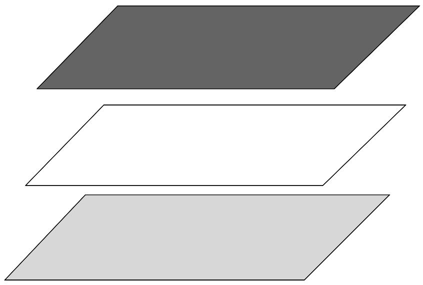
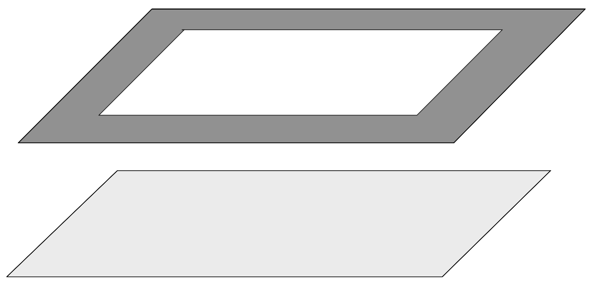


(Parte de la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ e impón que las coordenadas de tres puntos de cada plano la verifiquen).

2º) Obtén las ecuaciones de los planos OXY, OXZ y OYZ.

Interpretación geométrica de los sistemas 3 x 3

De forma semejante a como hacíamos con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuando tengamos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, podremos preguntarnos por la posición relativa de los planos correspondientes a tales ecuaciones según sea el sistema: compatible, incompatible... Dado que la existencia de una solución (x_1, y_1, z_1) del sistema equivale a la existencia de un punto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) perteneciente a los tres planos, se presentan las siguientes posibilidades:

Posición relativa de tres planos (según sea el sistema formado por sus ecuaciones)		
Sistema compatible determinado (solución única)		
Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)		 
Sistema incompatible (ninguna solución)	 	 

6. EJERCICIOS

1.- Discute y, en su caso, resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 10 \\ 2x + 3y = 7 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 17 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 4x - y + 5z = 13 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2y - z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ x + 3y + 3z = 9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 5x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} -3x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 5z = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 8 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 4x + y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

2.- Discute y, en su caso, resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas de ecuaciones cuyas matrices son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

3.- Discute y, en su caso, resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 3z = 8 \\ 3x - y + 4z = 11 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 4x - 3y + 5z = 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 5x - y + z + 4w = 8 \\ x - 2y + z + 2w = 1 \\ 3x + 2y - 3z - w = 0 \\ 2x + y + z + w = 7 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + u = 1 \\ -x + y - z + u = -1 \\ -x + y + z - u = -1 \\ -x + y + z + u = 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x + y + z + u = 1 \\ -x + y - z + u = 0 \\ x + y - z - u = -1 \\ -x + y + z + u = 2 \end{array}\right\}$$

4.- Discute según los valores del parámetro y, en su caso, resuelve, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\}$$

5.- La leche pura de vaca tiene una densidad de 1'03 Kg / l. Si compras 8 litros de leche y, al pesarlos, observas que la báscula marca 8'150 Kg, ¿qué cantidad de agua tiene la leche?

6.- Se mezclan dos tipos de vino: El del tipo A cuesta 0'7 **€**/litro; el del tipo B, 0'6 **€**/litro. ¿Qué proporción habrá que tomar de cada uno para que vendiendo la mezcla a 0'8 **€** / litro el beneficio sea del 25% sobre el precio de coste?

7.- Se quieren obtener 10 Kg de pasta con trigo, arroz y maíz, cuyos precios respectivos son de 0'2, 0'4 y 0'25 **€**/kg. Halla la cantidad de cada materia que ha de formar la pasta, sabiendo que el precio resultante ha de ser de 0'29 **€**/kg y que la cantidad de arroz ha de ser doble que la de maíz.

8.- Las dos cifras de un número suman 13 y al cambiarlas de orden, el nuevo número es 9 unidades superior al anterior. ¿De qué números se trata?

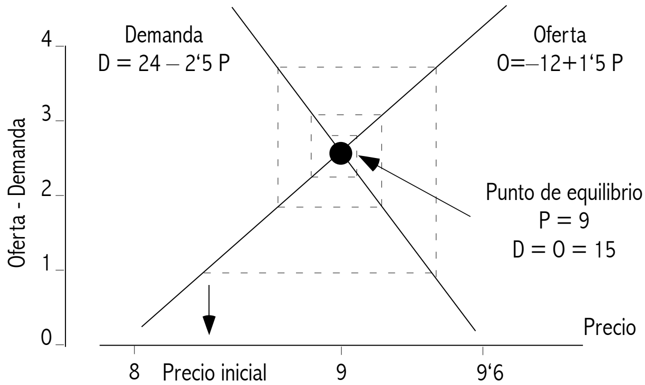
9.- En Economía puede establecerse que la demanda *D* de cierto producto es función decreciente de su precio *P*, pues cuanto mayor sea el precio, menor es la demanda. Supongamos, simplificando bastante la realidad, que la demanda y el precio de cierto artículo vinieran relacionadas por la función lineal:

$$D = 24 - 2'5 \cdot P$$

Análogamente, la oferta *O* de un producto tiende a crecer cuando crece el precio, pues las expectativas de beneficio son mayores. Supongamos, para el caso anterior, que:

$$O = 12 + 1'5 \cdot P$$

En virtud de la *ley de la oferta y la demanda,* si se parte de cierto precio inicial, para el cual la oferta es menor que la demanda, dicho precio aumenta hasta que llega a un valor tal que la oferta supera a la demanda. El precio, entonces, disminuye hasta que, otra vez, la demanda es mayor que la oferta, y así sucesivamente, hasta alcanzar un punto de equilibrio en un recorrido parecido a una telaraña, como se ve en la figura. Pues bien, estudia tú el caso en que $O = -6 + 3P$, $D = 14 - 2P$ y halla el precio correspondiente al punto de equilibrio.



10.- Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total de 2.000 euros. Si el número de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, ¿cuántos billetes hay de cada tipo?

11.- Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 euros. El precio original era de 12 euros, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.

12.- Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600.000 euros. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1’7 millones de euros ¿Cuánto le costó cada objeto?

13.- Una empresa dispone de 27.200 euros para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 euros, para el curso B es de 160 euros y de 200 euros para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuantos empleados siguen cada curso?

14.- Pedro tiene un año más que Juan, y Luis, uno más que Carmen. Halla la edad de cada uno sabiendo que la de Luis es la suma de la tercera parte más la séptima parte de la de Pedro y que la de Carmen es la suma de la cuarta parte más la quinta parte de la de Juan.

15.- Tres amigas acuerdan jugar tres partidas de cartas de forma que, cuando una pierda, entregará a cada una de las otros dos una cantidad igual a la que cada una poseyera en ese momento. Cada una perdió una partida, y al final cada una tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugadora al comenzar?

16.- Un joyero tiene tres clases de monedas: A, B y C. Las monedas de tipo A tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo B tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo C tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?

17.- Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una de las tiendas?

18.- Una persona tiene su dinero colocado en tres depósitos bancarios diferentes A, B y C. El dinero invertido en A le produce un 4 % de beneficio; en B, un 7 %, y en C, un 6 %. Sus beneficios totales fueron de 3.270 euros anuales. Debido a los cambios en los tipos de interés, el segundo año los beneficios son del 3,5 % en A, el 6 % en B y el 5 % en C, siendo sus beneficios de 2.780 euros. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada depósito si en total tiene 50.000 de euros?

19.- En cierta heladería, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 **€** un día. Otro día, por 4 copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44 **€**, y un tercer día, te piden 26 **€** por una horchata y cuatro batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?

20.- Dos amigos invierten 20.000 **€** cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4 %. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1.050 **€** y el segundo de 950 **€**.

21.- La edad de una madre es igual a la suma de las de sus dos hijos. Cuando pasen tantos años como tiene el hijo mayor, la madre tendrá 70 años y la suma de las edades de los tres será de 164 años. ¿Qué edad tiene ahora cada uno?

22.- Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo: El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre. El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre. El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre, ¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre?

23.- Un coche va desde A hasta B con una velocidad de 60 km/h y regresa desde B hasta A a 40 km/h. ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?

24.- La suma de las edades de un padre y sus dos hijas es 73 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el duplo de la edad de la hija menor. Hace 12 años la edad de la hija mayor era doble de la edad de su hermana. Halla la edad de cada uno.

25.- Don Sixto le dice a don Pedro: «Yo tengo el doble de la edad que usted tenía cuando yo tenía la edad que usted tiene y la suma del triple de la edad que usted tiene con la que yo tendré cuando usted tenga la edad que yo tengo, es 280». ¿Cuáles son las edades de don Sixto y don Pedro?

26.- Una empresa destina 9.000 euros para gratificar a sus 51 empleados. Concede 250 euros a los empleados de nivel A, 200 euros a los de nivel B y 150 euros a los de nivel C. Teniendo en cuenta que para los de nivel B destina en total el doble que para los del A, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?

27.- Los planos de ecuaciones $2x + y + z = 2;\ \ 3x - y + 2z = 6$ se cortan en una recta. Determina las coordenadas de dos puntos de dicha recta.

28.- Determina cuántos puntos comunes tienen los planos de ecuaciones:

$$2x + y + z = 5;\ \ 3x - y - z = 5;\ \ 2x + 3y + 5z = 1$$

29.- Los planos de ecuaciones $2x - 3y + z = 3$; $x + y + 2z = 4$ se cortan en una recta. Escribe la ecuación de otro plano que se corte con los dos anteriores en la misma recta.

30- Dos ecuaciones de cierto sistema incompatible de 3 ecuaciones con 3 incógnitas son: $x - y + 2z = 3;\ \ 3x + y + z = 2$. Escribe tú una ecuación que no pueda ser la tercera.

31.- Determina la posición relativa de los siguientes grupos de tres planos:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ 5x & - & 4y & + & 9z & = & 0 \\ 3x & - & 6y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & z & = & -1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right\}$$

Tema 2

Matrices

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos trabajado con matrices, de modo que ya sabes qué son. Pero aunque no lo hubiéramos hecho, las matrices te resultarían conocidas. En el fondo, una matriz es cualquier colección de objetos dispuestos en filas y columnas: Las casillas de un tablero de ajedrez, las cuadrículas del juego de los barcos, las celdas que aparecen en los programas de ordenador llamados hojas de cálculo, son ejemplos de matrices. Se trata, por consiguiente, de un concepto que no es de uso exclusivo de los matemáticos, y lo que pretendemos con este tema es precisamente mostrar cómo el cálculo matricial constituye un magnífico instrumento de trabajo en ciencias como la economía, la sociología, etc.

2. MATRICES DE NÚMEROS REALES

Definiciones

☞ Llamaremos *matriz* de orden $m \times n$ a un conjunto ordenado de $m \times n$ números reales dispuestos en **m** filas y **n** columnas. Al elemento de la fila **i** y la columna **j** lo representaremos por a_{ij} y la matriz se escribirá así:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cuando no haya posibilidad de error, y con objeto de simplificar, nos referiremos a la matriz anterior escribiendo $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$.

- ➪ Si una matriz tiene una sola fila, se dice que es una *matriz fila.*
- ➪ Si tiene una sola columna, se llama *matriz columna.*
- ➪ Finalmente, si el número de filas, m, y el de columnas, n, coinciden, se dice que la matriz es una *matriz cuadrada* de orden n.

Otras definiciones

➪ Llamaremos *matriz nula* a una matriz en la que todos los elementos sean cero.

➪ Dada una matriz **A** de orden $m \times n$, de la matriz de orden $n \times m$ obtenida tomando como filas las columnas de **A** (y como columnas, las filas) se dice que es la *matriz traspuesta* de A y suele representarse por A^t. Así, por ejemplo:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{entonces: } \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

➪ Considerada una matriz **A**, cuadrada de orden n, los elementos de la forma a_{ii} forman la llamada *diagonal principal.* Si en una matriz cuadrada de orden n son iguales a la unidad todos los elementos situados en la diagonal principal y el resto de los elementos son nulos, a la matriz en cuestión se le llama *matriz unidad de orden n* y se la representa por $\mathbf{I}_n$. Así, por ejemplo:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. OPERACIONES CON MATRICES

Las operaciones que definiremos a continuación quizás parezcan en principio poco justificadas. Más adelante estudiaremos algunas situaciones concretas en las que se pondrán de manifiesto su sentido y utilidad.

Definición (de suma de matrices)

➪ Dadas dos matrices $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$; $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)$, que necesariamente han de ser del mismo orden $m\times n$, se define la matriz *suma:*

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$$

como la matriz de orden $m\times n$:

$$\mathbf{C}=\left(c_{ij}\right) \text{ con } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

(O sea, que basta con sumar cada elemento de la primera matriz con el que ocupa el mismo lugar en la segunda).

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Definición (de producto de un número real por una matriz)

➪ Dados una matriz de orden $m\times n$, $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$, y un número α, se define el *producto* $\alpha\cdot\mathbf{A}$ como la matriz de orden $m\times n$:

$$\alpha\cdot\mathbf{A}=\left(\alpha\cdot a_{ij}\right).$$

(O sea, que para multiplicar un número por una matriz, basta con multiplicar cada elemento de la matriz por dicho número).

Ejemplo

$$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Definición (de producto de matrices)

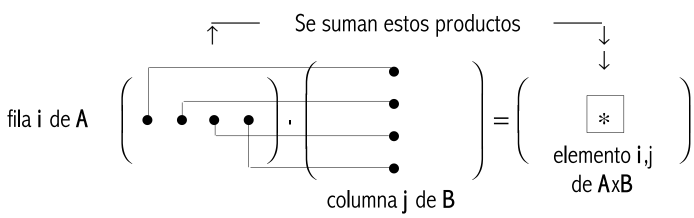
➪ Dadas una matriz $\mathbf{A}=\left(a_{ik}\right)$, de orden $m\times n$, y otra matriz $\mathbf{B}=\left(b_{kj}\right)$, de orden $n\times p$ (el número de columnas de **A** coincide con el de filas de **B**), se define la *matriz producto:*

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

como la matriz de orden $m\times p$ cuyo elemento c_{ij} viene dado por:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Traduzcamos: Para obtener el elemento c_{ij} de la matriz $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ basta con multiplicar uno a uno los elementos de la fila **i** de **A** por los de la columna **j** de **B** y sumar todos esos productos, como se indica en el siguiente esquema:



Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 \\ 9 & 19 & 11 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

① La razón por la que a la matriz $\mathbf{I}_n$, que definimos más arriba, se le llama *matriz unidad de orden* n es que:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n\times\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

cualquiera que sea la matriz cuadrada de orden n, **A**.

② Dada una matriz **A**, cuadrada de orden n, puede demostrarse que si cumple cierta condición (que su determinante —concepto que aún no hemos definido— no sea nulo), existe otra matriz $\mathbf{A}^{-1}$, tal que:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

De $\mathbf{A}^{-1}$, cuando existe, se dice que es la *matriz inversa* de **A**.

Cálculo de la matriz inversa

El llamado *método de Gauss* permite calcular de forma sencilla la inversa de una matriz cuadrada de orden n (siempre que exista). Explicamos cómo se aplica en el siguiente ejemplo.

Supongamos que se desea calcular la inversa de la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Escribiremos una nueva matriz, adosando a la derecha de **A** la matriz unidad de orden 3:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación, aplicaremos a esta nueva matriz las transformaciones que vimos antes al usar el método de Gauss, hasta que en la *caja* de la izquierda aparezca la matriz $\mathbf{I}_3$. Cuando ello suceda, la matriz que aparezca en la caja derecha será la inversa de **A**, $\mathbf{A}^{-1}$. (Designaremos cada paso por un número; su significado se explica al final).

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -15 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 7 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -15 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -15 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{6}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{La matriz inversa de A es: } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A la segunda fila multiplicada por 2 se le resta la primera multiplicada por 3 y a la tercera fila multiplicada por 2 se le resta la primera.

(2) A la tercera fila multiplicada por 3 se le suma la segunda

(3) A la segunda fila se le suma la tercera multiplicada por 2

(4) A la primera fila se le resta la tercera

(5) A la primera fila, multiplicada por 3, se le suma la segunda

(6) Se divide la primera fila por 6, la segunda por –3 y la tercera por 2

4. MATRICES EN LAS CIENCIAS SOCIALES

Como decíamos en la introducción a este capítulo, las matrices aparecen con frecuencia en ciencias como la economía, la sociología... Expondremos a continuación algunos ejemplos al respecto, sin ánimo de ser exhustivos.

Matriz de coste de transporte

Las matrices son muy útiles para resumir, ordenar y manipular ciertas informaciones de tipo numérico. Un ejemplo típico lo constituyen las llamadas *matrices de coste de transporte:* Cierta empresa que fabrica lavadoras tiene 2 fábricas, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ y 3 almacenes, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$. Los costes del transporte de cada lavadora a cada uno de los almacenes pueden disponerse en forma de matriz como sigue:

	A_1	A_2	A_3
F_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
F_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}

El elemento c_{ij} de la matriz anterior —*matriz de coste de transporte*— es el coste del transporte de una lavadora desde la fábrica $\mathbf{F}_i$ hasta el almacén $\mathbf{A}_j$.

Matrices de transición

En cierta ciudad sólo se dan dos tipos de días: Soleados, S, o nubosos, N. Las estadísticas meteorológicas permiten asegurar que:

1.- El día siguiente a uno soleado tiene una probabilidad 4 veces mayor de ser soleado que nuboso.

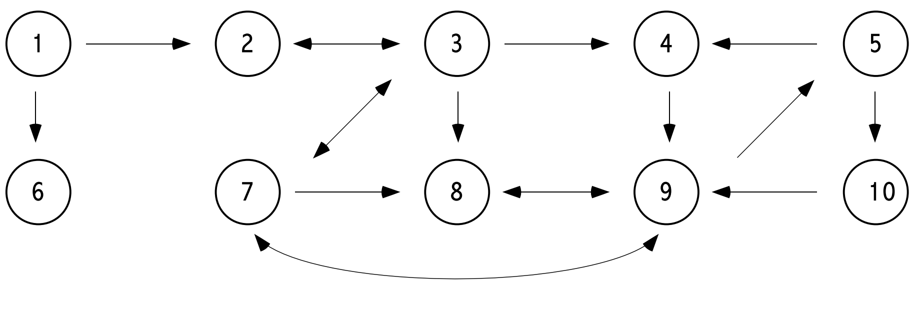
2.- El día siguiente a uno nuboso tiene igual probabilidad de ser soleado que nuboso.

En tal caso, la matriz siguiente, en la que se recogen las llamadas *probabilidades de transición,* se llama *matriz de transición.* Su interés estriba en que efectuando distintas operaciones con ella es posible responder a numerosas cuestiones sobre el clima de la ciudad de la que se trate. Observa que la suma de los elementos de cada fila de la matriz es la unidad.

		Segundo día	
		S	N
Primer día	S	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
	N	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Sociomatrices

Supongamos, con objeto de presentar una de las más interesantes aplicaciones de las matrices a la sociología, que las relaciones de influencia existentes entre las diez personas de un grupo quedan representadas por el siguiente esquema o grafo:



Así, por ejemplo, la persona *1* influye sobre la *2*, la *4* sobre la *9*, etc. También existen influencias recíprocas, como la existente entre la *8* y la *9*, etc. Vamos a escribir una matriz de orden 10×10, $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$, con $a_{ij} = 1$ si la persona *i* influye directamente sobre la *j* y $a_{ij} = 0$ si no influye. Tendremos la siguiente matriz, a la que se llama *sociomatriz del grafo anterior:*

		Influencias recibidas									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Influencias manifestadas	**1**	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	9	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

La interpretación de dicha matriz es fácil. Basta con observarla para poder afirmar que la persona *3* es la que más influye directamente sobre otras, que la *9* es la que más influencias recibe, etc. La *suma de los elementos de la fila i* indica el número total de personas sobre las que la persona *i* influye directamente, l*a suma de los elementos de la columna j* indica cuántas personas influyen directamente sobre la persona *j*...

Naturalmente, una persona, además de influir en otra directamente, puede hacerlo a través de otra persona interpuesta, como hace la *1* sobre la *3*, por ejemplo. Estas influencias en dos *etapas* se ponen de manifiesto en la matriz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, pues debido a que el elemento b_{ij} de esta matriz es: $b_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + \dots\dots + a_{i9}a_{9j} + a_{i10}a_{10j}$ si la persona *i* influye sobre la *k* y ésta sobre la *j*, será: $a_{ik} = a_{kj} = 1$, lo cual contribuirá en una unidad al valor de b_{ij}. Si ello sucede en n ocasiones, será $b_{ij} = n$.

En nuestro caso, $\mathbf{A}^2$ es la matriz siguiente, y el hecho de que en ella sea $a_{39} = 3$, pongamos por caso, significa que la persona *3* influye en la *9*, a través de otra persona interpuesta (en 2 etapas) de 3 maneras diferentes, etc. También es claro el significado de las sumas por filas y columnas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
3	0	0	2	0	0	0	0	1	3	0
4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	1	1	0	1	2	1	0
8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

Las influencias en 3 etapas se manifestarían en la matriz $\mathbf{A}^3$, las de 4 etapas en la $\mathbf{A}^4$... Si obtuviésemos la suma $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3$, por ejemplo, su elemento s_{ij} indicaría el total de formas en una, dos o tres etapas, en las que la persona *i* influye sobre la *j*. La suma de los elementos de la fila i de dicha matriz representaría el total de influencias de la persona i sobre el colectivo, fuera en una, dos o tres etapas. En nuestro caso se vería que, por ejemplo, la persona *3* influye de tal manera sobre las que forman el grupo de 25 formas diferentes, etc.

Naturalmente, cuando se parta de un grafo con muchos más elementos, puede que escribir la matriz **A** siga siendo sencillo, pero calcular sus sucesivas potencias ya no lo será tanto. Por otra parte, cuando se aplica en la realidad el procedimiento anterior, los grafos son complejos. Pero ello no es un problema: Se le da la matriz inicial a un ordenador y éste calcula todo lo neecsario en unos instantes.

5. DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3

Aunque se trata de unas herramientas que han perdido importancia desde el punto de vista práctico, conviene saber qué son los determinantes. Tras ver unas breves nociones sobre ellos, completaremos lo visto en el tema anterior sobre los sistemas de ecuaciones.

Definiciones (determinantes de orden 2 y 3)

➪ Dada una matriz cuadrada de orden dos:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se define el *determinante* de $\mathbf{A}$ mediante la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Desarrollo que puede memorizarse fácilmente haciendo uso del siguiente esquema,

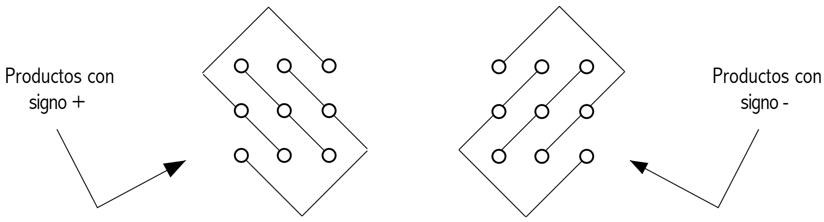
➪ Dada una matriz cuadrada de orden tres:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se define el *determinante* de $\mathbf{A}$ mediante la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Desarrollo que puede memorizarse fácilmente haciendo uso del siguiente esquema, conocido como *regla de Sarrus:*



Observaciones

1.- No sólo existen determinantes de orden 2 ó 3. *Toda matriz cuadrada, cualquiera que sea su orden, tiene un determinante,* pero es algo de lo que no necesitamos hablar en este curso.

2.- La condición necesaria y suficiente, a la que antes nos referíamos, para que una matriz cuadrada, $\mathbf{A}$, posea inversa, es que su determinante sea distinto de cero.

Ejemplos

Comprueba que: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 58 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Regla de Cramer

Una de las más conocidas aplicaciones de los determinantes, aunque hoy haya cedido la plaza que un día ocupó al método de Gauss, más fácil de programar, es la llamada *regla de Cramer,* aplicable a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas (los que sean compatibles, claro). La regla de Cramer, aunque parece que su descubridor no fue tal *señor,* consiste en lo que vamos a exponerte mediante un ejemplo.

➟ Para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & - & 2z & = & 5 \end{array}\right\}$$

basta con escribir lo siguiente:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}}=1 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}}=0 \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}}=-1$$

☞ Observa: En todos los denominadores se escribe el determinante de la matriz **A** formada por los coeficientes del sistema. En el numerador correspondiente a la *x,* el determinante de la matriz que resulta de sustituir la primera columna de **A** por la formada por los términos independientes; en el de la *y,* el determinante de la matriz que resulta de sustituir la segunda columna de **A** por la formada por los términos independientes; finalmente, en el de la *z,* el determinante de la matriz que resulta de sustituir la tercera columna de **A** por la formada por los términos independientes.

6. RANGO DE UNA MATRIZ

Definiciones

☞ Sea la matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

➪ Diremos que una de sus filas es *combinación lineal de otras* cuando sea el resultado de multiplicar cada una de éstas por un número y sumarlas.

➪ Así, por ejemplo, vista la matriz::

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, pues:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

➪ Consideradas varias filas de una matriz **A**, diremos que son *linealmente dependientes* cuando alguna de ellas sea combinación lineal de las demás. En caso contrario, diremos que dichas filas son *linealmente independientes.*

Definición (de rango de una matriz)

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

llamaremos *rango de **A*** al máximo número de filas de A que sean linealmente independientes.

(O sea, que si el rango de **A** es tres, por ejemplo, eso quiere decir que se pueden encontrar tres filas de **A** linealmente independientes –lo cual no significa que tomados tres filas cualesquiera, hayan de ser linealmente independientes–, mientras que siempre que se tomen cuatro, cinco, etc., serán dependientes).

Ejemplo

En la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, pues: (2 1 5 4) = (2 –1 –1 0) + 2.(0 1 3 –2). Las dos primeras filas, en cambio, son linealmente independientes, luego el rango de **A** es 2.

Consecuencias (transformaciones que no modifican el rango de una matriz)

Llegados a este punto admitiremos sin demostración que:

El rango de una matriz no se modifica si:

1 *Se prescinde de una fila que sea combinación lineal de las demás.*

(En particular, no se modificará el rango de una matriz si, existiendo en ella una fila de ceros, se prescinde de ella).

2 *A una de sus filas se la multiplica por un número distinto de cero.*

3 *A una fila se le suma una combinación lineal de las demás.*

Rango de una matriz triangular

Para calcular el rango de una matriz por *método de Gauss,* que veremos enseguida, necesitamos preparar un poco el terreno. A tal efecto, sea **A** una matriz *triangular*, esto es, una matriz de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{nr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

en la que, además, todos los elementos de la *diagonal principal,* esto es, todos los elementos de la forma a_{ii} son distintos de cero. Entonces, es fácil demostrar que las r filas de **A** son linealmente independientes y, en consecuencia, el rango de **A** es **r**.

Cálculo del rango por el método de Gauss

Este método, que explicaremos a continuación sirviéndonos de un ejemplo, consiste en aplicar de forma sistemática a la matriz cuyo rango se desee calcular, transformaciones lineales que, sin modificar su rango, transformen dicha matriz en otra de igual rango pero triangular.

Supongamos dada, por ejemplo, la matriz: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El rango de **A** no se modificará si:

① Multiplicamos la segunda fila por 2 y le restamos la primera multiplicada por 3.
② Multiplicamos la tercera fila por 2 y le restamos la primera multiplicada por 7.
③ Restamos a la cuarta fila la primera.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rango}]{\text{igual}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

④ Quitamos la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rango}]{\text{igual}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ Si, por último, multiplicamos por -7 la tercera fila y le restamos la segunda multiplicada por -2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rango}]{\text{igual}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & 18 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, en consecuencia, visto el resultado anterior, rango $\mathbf{A} = 3$.

Observación

La aplicación de este método, que toma como “pivote” el elemento a_{11} de la matriz, exige que éste sea distinto de cero. De no ser así, habría que hacer un cambio en el orden de las filas. Ello no modificaría el rango y nos permitiría aplicar el procedimiento.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Una aplicación importante de lo anterior es que puede demostrarse que dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad [S]$$

y consideradas las matrices: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

llamadas *matriz de los coeficientes y matriz ampliada con los términos independientes,* respectivamente, se verifica:

1) [S] es compatible $\Leftrightarrow$ rango $\mathbf{A}$ = rango $\mathbf{A}^*$

2) rango $\mathbf{A}$ = rango $\mathbf{A}^* \begin{cases} < n \Rightarrow \text{[S] es compatible indeterminado} \\ = n \Rightarrow \text{[S] es compatible determinado} \end{cases}$

Ejemplo

Supongamos que se deseara discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según el valor del parámetro m:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & x & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & -2 \\ x & - & y & + & mz & = & -5 \end{array}\right\}$$

Escrita la matriz de los coeficientes y aplicando el método de Gauss para calcular su rango, se tendría:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & m-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2m-5 \end{pmatrix}$$

La última fila, para $m=\frac{5}{2}$, estaría formada exclusivamente por ceros, luego se podría prescindir de ella sin que el rango variara. Si $m\neq\frac{5}{2}$, también podría prescindirse de ella, pues sería proporcional a la tercera fila. Así, pues, en cualquier caso: rango $\mathbf{A}=3$.

Escrita ahora la matriz ampliada con los términos independientes, se tendría:

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 2m-5 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:
$$\begin{cases} m\neq -2 \quad\Rightarrow\quad \text{rango}\overline{\mathbf{A}}=4 \\ m=-2 \quad\Rightarrow\quad \text{rango}\overline{\mathbf{A}}=3 \end{cases}$$

En conclusión, y aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\begin{cases} m\neq -2 \quad\Rightarrow\quad \left[\text{rango}\mathbf{A}=3;\quad \text{rango}\overline{\mathbf{A}}=4\right] \quad\Rightarrow\quad \text{Sistema incompatible} \\ m=-2 \quad\Rightarrow\quad \left[\text{rango}\mathbf{A}=\text{rango}\overline{\mathbf{A}}=3=\text{número de incógnitas}\right] \quad\Rightarrow\quad \text{Sistema compatible determinado} \end{cases}$$

(En el último caso, sustituyendo m por –2 en la última ecuación, resolveríamos el sistema compatible determinado por el método de Gauss o cualquier otro, hallando su solución: $x=-1,\quad y=0,\quad z=2$.

7. EJERCICIOS

1.- Se consideran las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \;;\; \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix} \;;\; \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\2&0\end{pmatrix} \;;\; \mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&3\\-2&0&4\end{pmatrix} \;;\; \mathbf{E}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Calcula, caso de que sea posible, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{B}+\mathbf{A}$, $2\mathbf{A}-3\mathbf{B}$, $\mathbf{A.C}$, $\mathbf{B.D}$, $\mathbf{C.A}$, $\mathbf{C.E}$, $\mathbf{A.D}$, $\mathbf{D.A}$, $\mathbf{B.C}$ y $\mathbf{D.E}$.

2.- Cierta empresa vende tres modelos de pantalones, P_1, P_2 y P_3 y dispone de cuatro tiendas, T_1, T_2, T_3 y T_4. Cierto día, las ventas de pantalones en cada tienda fueron las que se reflejan en esta tabla:

	T_1	T_2	T_3	T_4
P_1	8	10	7	6
P_2	4	3	4	2
P_3	10	8	12	9

Los precios, por unidad, de los pantalones fueron éstos:

P_1	P_2	P_3
40 €	30 €	50 €

Utiliza el producto de matrices para calcular el importe de las ventas en cada tienda.

3.- Un fabricante de televisores produce 3 modelos distintos A, B y C. Cada modelo requiere las cantidades de material, M, personal, P y transporte, T, dadas por la matriz:

	M	P	T
A	5	2	1
B	7	3	2
C	6	4	2

La producción diaria y el coste de cada "unidad" de material, personal y transporte vienen dados, respectivamente, por las matrices:

A	B	C
7000	5000	8000

M	4
P	5
T	3

Obtén las matrices correspondientes a: **1º**: Las unidades necesarias cada día de material, personal y transporte. **2º**: El coste de un televisor de cada modelo. **3º**: El coste de la producción total diaria.

4.- Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas, 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

5.- En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras. **a)** Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana. **b)** Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

6.- Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (0). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4. La producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo viene dada por la matriz:

	T	0
M_1	300	200
M_2	400	260
M_3	250	200
M_4	500	300

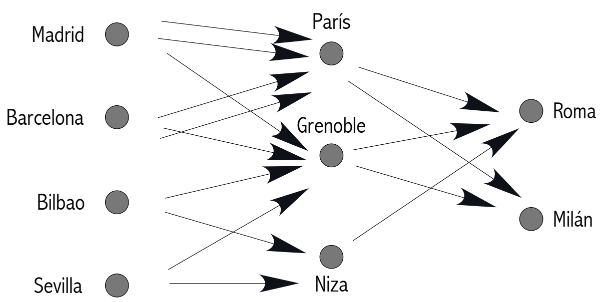
El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4, Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

7.- Se dice que una matriz es *simétrica* si coincide con su traspuesta. Sabido lo anterior, justifica que una matriz que no sea cuadrada no puede ser simétrica y escribe una matriz simétrica de orden 4.

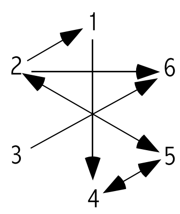
8.- Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

9.- El esquema representa los vuelos diarios existentes entre 4 ciudades españolas y 3 francesas y entre éstas y otras 2 italianas. Representa dicha situación por dos matrices **A** y **B**, de modo que sea posible calcular **A.B**. ¿Cuál es el significado de esta nueva matriz?



10.- Halla las matrices de influencia en una, dos y tres etapas correspondientes a las relaciones de influencia existentes entre las seis personas del siguiente grafo:



11.- Averigua si existen valores de *x, y, z* tales que **A.B** + **C** = 3**D**, siendo **A**, **B**, **C** y **D** las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

12.- Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & -2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

13.- Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 7 \\ 8x & - & 3y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & + & z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 7x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -5 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & -3 \end{array}\right\}$$

14.- Resuelve por la regla de Cramer o mediante el método de Gauss el sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$, donde **A**, **X** y **B** son las siguientes matrices:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

15.- La forma anterior de escribir un sistema de ecuaciones se llama forma matricial. Escribe de tal forma los sistemas del ejercicio 13.

16.- Resuelve el sistema $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. Después, halla $\mathbf{A}^{-1}$, y multiplica $\mathbf{A}^{-1}$ por los dos miembros de la ecuación $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$. ¿Qué observas?

17.- Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, halla las matrices **X** tales que $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{X}\,\mathbf{A}$.

18.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

19.- Calcula los valores de a, b y c que hacen cierta la relación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

20.- Discute y resuelve en los casos de compatibilidad los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & - & 6y & + & kz & = & 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcrcrcr} & & x & + & y & = & 1 \\ & & ky & + & z & = & 0 \\ x & + & (k+1)y & + & kz & = & k+1 \end{array}\right\}$$

Tema 4

Límites y continuidad

1. INTRODUCCIÓN

En la segunda parte del curso, que empezamos con este capitulo, nos dedicaremos fundamentalmente a trabajar con funciones, uno de los instrumentos más eficaces que los matemáticos han creado para el mejor conocimiento y control de un sinnúmero de fenómenos presentes tanto en la Naturaleza como en actividades de tipo social, económico... Dedicada ya una buena parte del curso anterior a la presentación de las funciones elementales (las polinómicas, las exponenciales, logarítmicas...), en éste vamos a detenernos en algunos aspectos que entonces apenas tocamos. Todo ello, innecesario decirlo, con el enfoque más instrumental y práctico que nos sea posible, en el que las gráficas desempeñarán un papel primordial. El concepto del que partiremos será el de límite, del que nos conformaremos con alcanzar una idea intuitiva. A él le seguirá el estudio de la continuidad y posteriormente estudiaremos el concepto de derivada, un instrumento clave por la variedad de sus aplicaciones. La segunda parte del curso la finalizaremos con una presentación elemental de qué es y para qué sirve la integral.

2. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

El conjunto de los números reales

En el proceso de construcción de conjuntos numéricos, el que aparece en primer lugar es el conjunto **N** de los números naturales. En él es posible sumar y multiplicar, pero no siempre se puede restar o dividir. En **Z**, conjunto de los números enteros, la resta es siempre posible, pero no la división, la cual sí es posible (excepto entre cero) en **Q**, conjunto de los números racionales. Como sabes, todo número racional puede representarse mediante una fracción decimal finita o infinita periódica. Por otra parte, $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$, es decir, todo número natural es entero y todo entero es racional.

Sin embargo, no existe número racional que nos exprese la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado unidad, o el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, o el límite de la sucesión de término general $(1+1/n)^n$...

Este último tipo de números, $\sqrt{2}$, π , e ... , que no admiten una expresión decimal finita o infinita periódica, se llaman *irracionales.*

El conjunto **R** de los números reales es el formado por los números racionales y los irracionales.

En **R** operaremos como lo hemos hecho siempre, sumando, multiplicando, ordenando sus elementos mediante la relación ≤... Descartada aquí una construcción rigurosa de **R**, conviene no obstante mencionar la propiedad fundamental de dicho conjunto: Los números reales *llenan* la recta. Es decir, que si sobre una recta representamos el 0 y el 1, a cada número real corresponderá un punto de la recta y a cada punto de la recta, un número real, sin que haya puntos a los que no corresponda un número real. Se podrá, en resumen, efectuar una identificación entre números reales y puntos de una recta.

Vocabulario básico

Cuando se trabaja con números reales suelen utilizarse expresiones y símbolos cuyo significado conviene recordar:

- Siendo *a, b* dos números reales, con $a < b$, se define el *intervalo abierto* (a, b) mediante la igualdad:

$$(a, b) = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a < x < b \}$$

- Análogamente se define el *intervalo cerrado* $[a, b]$ mediante:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a \le x \le b \}$$

- El *valor absoluto,* $|x|$, de un número real *x*, se define así:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

- La *distancia* entre dos números reales *a* y *b* es: $\quad d(a, b) = |b - a|$

Funciones reales de variable real

Se llama *función real de variable real* $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, donde $\mathbf{D}$ es un subconjunto de $\mathbf{R}$, a todo criterio que permita asociar a cada número real x de $\mathbf{D}$ un único número real y.

• Existen muchas formas de designar simbólicamente las funciones, pero siendo habitual escribir $f(x)$ para referirse a la *imagen* de x, o sea, al número real que f hace corresponder a x, la función anterior suele identificarse mediante la notación:

$$y = f(x)$$

diciéndose que x es la variable *independiente* e y la variable *dependiente.*

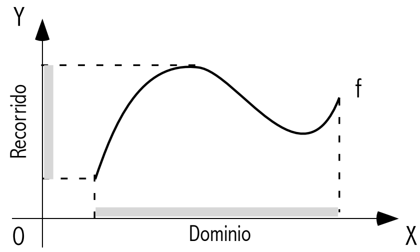
• Aunque, como decimos, $f(x)$ designe un número real, también se escribe a menudo $f(x)$ para referirse a la función.

Dominio y recorrido de una función

Siendo $y = f(x)$ una función real de variable real, se definen el *dominio* y el *recorrido* de $f(x)$ como sigue:

☞ Dominio de $f = \mathbf{D}_f = \{x \in \mathbf{R} \,/\, \text{existe } f(x)\}$

☞ Recorrido de $f = \mathbf{R}_f = \{f(x) \,/\, x \in \mathbf{D}_f\}$



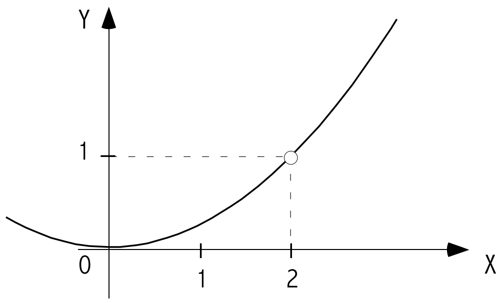
3. EL CONCEPTO DE LÍMITE

Ejemplo previo

Consideremos la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{4(x-2)}$$

Para $x = 2$, $f(x)$ no está definida, pero si calculamos valores como $f(1'99), f(2'01), f(1'999)$ observaremos que tales valores se aproximan a 1, tanto más cuanto más aproximemos el valor de x a 2. Y no sólo eso, sino que podremos conseguir que la distancia de $f(x)$ a 1 sea tan pequeña como queramos, siempre que a x le demos valores que, siendo distintos de 2, estén suficientemente próximos a 2. Ello se pone de manifiesto en la gráfica de dicha función:



➔ Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 1, y escribiremos: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

Definición (de límite de una función en un punto)

☞ Dada una función $f(x)$, diremos que su límite cuando *x* tiende hacia *a* es L y escribiremos:

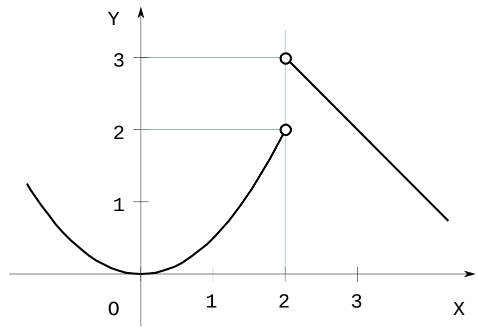
$$\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$$

cuando pueda lograrse que $f(x)$ tome valores tan próximos a L como se desee, con la única condición de dar a *x* valores que, siendo distintos de *a*, sean suficientemente próximos a *a*.

Ejemplo previo

Consideremos la función cuya gráfica aparece a la derecha:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x < 2 \\ -x+5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$



Como puede observarse, si los valores de *x* se aproximan a 2 por la *izquierda*, los valores de $f(x)$ lo hacen 2, mientras que si los valores de *x* se aproximan a 2, pero por la *derecha*, los de la función lo hacen a 3. Es decir, que según que la aproximación de *x* a 2 se haga con valores menores o mayores que 2, las consecuencias son unas u otras. Surge así la idea de límite lateral, que formalizamos a continuación.

Definiciones (de límites laterales)

1 Diremos que el límite de una función $f(x)$ cuando *x* tiende hacia *a* por la izquierda es L, y escribiremos: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \mathrm{L}$ si $f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera, sin más que dar a *x* valores suficientemente próximos a *a*, pero menores que *a:*

2 Diremos que el límite de una función $f(x)$ cuando *x* tiende hacia *a* por la derecha es L, y escribiremos: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mathrm{L}$ si $f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera, sin más que dar a *x* valores suficientemente próximos a *a*, pero mayores que *a:*

Consecuencia

Existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ si y solo si existen los límites laterales en el punto *a*, verificándose: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplo

Supongamos que se desea saber si existe: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x+|x|}{5x-2|x|}$.

Dado que:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x+|x|}{5x-2|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x-x}{5x+2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}. \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{3x+|x|}{5x-2|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x+x}{5x-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

habremos de concluir que, al ser distintos los límites laterales, no existe el límite en cuestión.

Límite de la suma, producto y cociente de funciones

Supongamos ahora que $f(x), g(x)$ son dos funciones para las que existen los límites cuando x tiende hacia a. ¿Qué ocurrirá con el límite de la suma, el producto y el cociente de ambas funciones?

① *El límite de una suma es igual a la suma de los límites:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

② *El límite de un producto es igual al producto de los límites:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

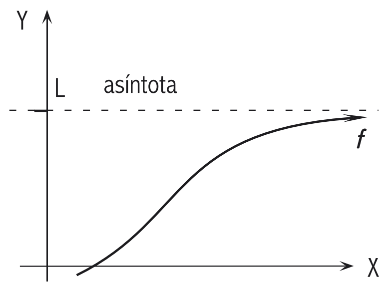
③ *El límite de un cociente es igual al cociente de los límites:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad \left(\text{si } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0\right)$$

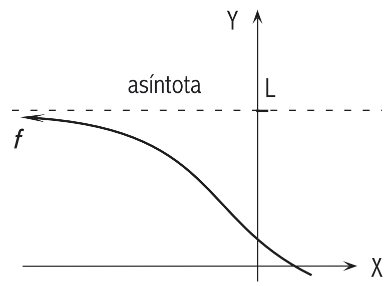
La demostraciones rigurosas de las anteriores igualdades, aunque sencillas, exceden de lo que conviene hacer en este curso, por lo que prescindiremos de ellas. Se trata, en todo caso, de propiedades muy *razonables,* que nosotros aplicaremos cuando sea necesario.

4. LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO

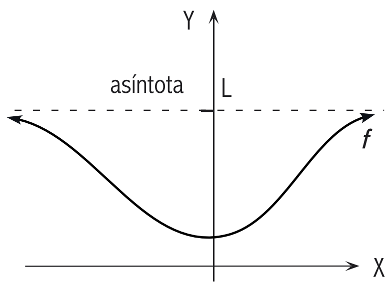
Además de los anteriores, existen otros tipos de límites. Aunque cada uno de los casos siguientes admite una definición rigurosa, nos limitaremos a presentar unas figuras para que observando detenidamente las gráficas que en ellas aparecen se pueda reflexionar sobre las situaciones que reflejan. En la primera, por ejemplo, se quiere indicar que la función $f(x)$ tomará valores tan próximos a L como queramos, sin más que dar a x valores suficientemente grandes. En la segunda, que la función $f(x)$ tomará valores tan próximos a L como queramos, sin más que dar a x valores suficientemente grandes, en valor absoluto, pero negativos. Convendría intentar una descripción semejante de lo que sucede en los restantes casos.



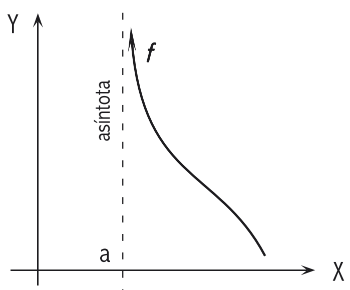
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{L}$



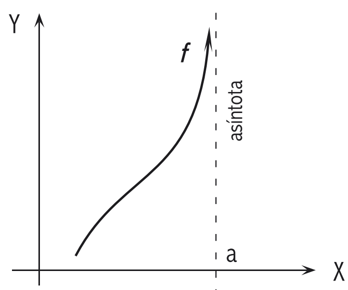
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{L}$



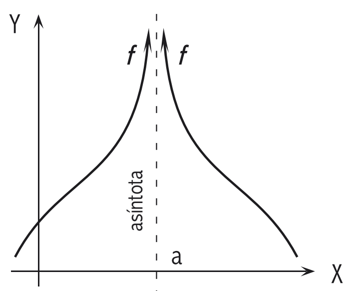
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \text{L}$



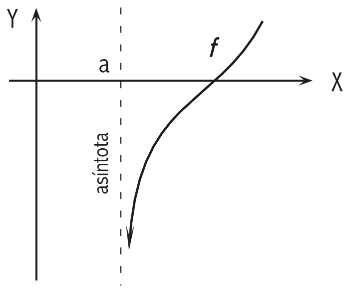
$\lim\limits_{x\to \text{a}^+} f(x) = +\infty$

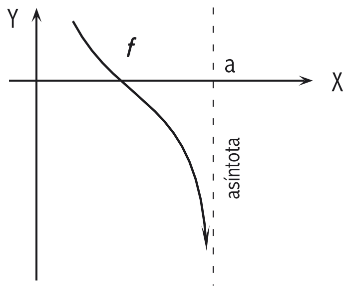


$\lim\limits_{x\to \text{a}^-} f(x) = +\infty$

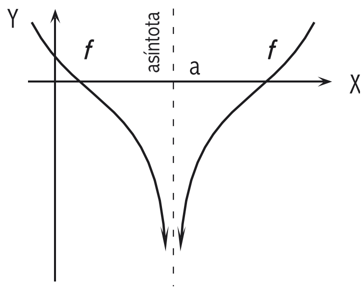


$\lim\limits_{x\to \text{a}} f(x) = +\infty$

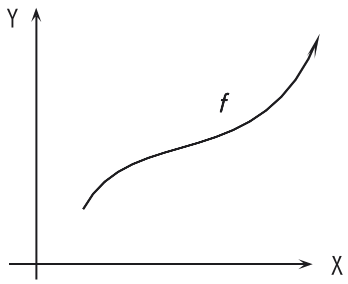




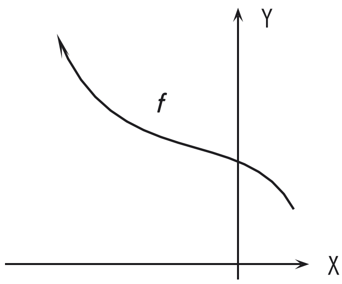
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



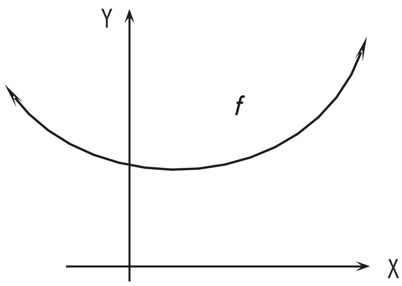
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



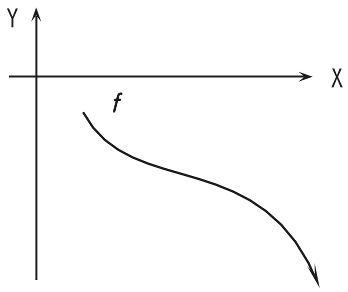
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



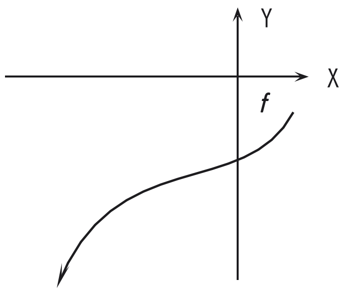
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



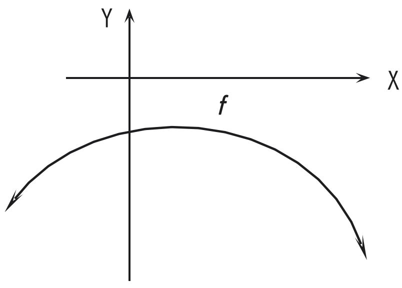
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

5 INDETERMINACIONES

Hemos visto líneas atrás que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mathrm{M}$, puede saberse inmediatamente qué valor toman los límites, para $x \to a$, de $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$... Tampoco nos cabrían muchas dudas acerca del valor de estos límites si hubiéramos partido de que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mathrm{M}$, por ejemplo.

Pero hay otros casos en los que la respuesta no está previamente determinada.

Así, por ejemplo, si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, a la hora de calcular $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pueden ocurrir diferentes *cosas*. Veamos un par de casos diferentes para ilustrar lo que decimos:

1 El $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ corresponde al supuesto anterior, pues tanto el límite del numerador como el del denominador para $x \to 2$, son nulos, teniéndose:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

2 En cambio, para el $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{(x-2)^3}$, cuyo numerador y denominador también tienen por límite cero, lo que sucede es esto otro:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x-2)^2}=+\infty$$

➡ Debido a ello se dice que "$\dfrac{0}{0}$" es una indeterminación.

Otro ejemplo: si: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, a la hora de calcular $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$ nos podemos encontrar con diferentes resultados. Veamos un par de casos al respecto.

1 El $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)$, que corresponde al supuesto anterior, no existe, pues los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x-1}\right)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$$

2 En cambio, para el $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{(x-1)^2}\right)$, que también corresponde al mismo supuesto, lo que se tiene es:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty$$

➡ Debido a ello se dice que "$\infty-\infty$" es otra indeterminación.

➡ Una *indeterminación* es pues, una expresión carente de sentido, que aparece en algunas ocasiones cuando se desea calcular ciertos límites aplicando exclusivamente las propiedades de la página 46: que "el límite de una suma es la suma de los límites", o que "el límite de un producto es el producto de los límites", etcétera. Las anteriores ($\dfrac{0}{0}$, $\infty-\infty$) no son las únicas indeterminaciones. Lo son también expresiones como 1^{∞}, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0...

Cuando haya que calcular el límite de una expresión y no sea posible saber de antemano cuál será su valor, por aparecernos alguna indeterminación, habrá que analizar en cada caso cuál es la forma más adecuada de proceder.

6. FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO

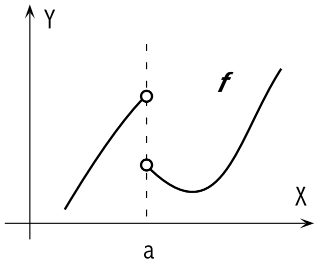
Consideraciones previas

El concepto de continuidad no es un invento de los matemáticos, sino que se trata de una idea que, como tantas otras, éstos han tomado de la realidad y, posteriormente, han formalizado. En efecto, existen muchos fenómenos físicos, sociales, etc., tales que las funciones que en ellos intervienen son continuas, es decir, se caracterizan por que a pequeños incrementos de la variable independiente corresponden incrementos también pequeños de la variable dependiente. Así, por poner uno de los más típicos ejemplos, si un movimiento se rige por una ley de la forma e $=$ *f (t)*, con la que se expresa la dependencia del espacio recorrido en función del tiempo, es *normal* que a pequeñas variaciones en el valor de *t* correspondan variaciones igualmente pequeñas de e; el espacio será una función continua del tiempo... Veamos, sin embargo, antes de dar la definición de función continua, y de forma intuitiva, algunos ejemplos de lo que *no* son funciones continuas.

Ejemplos previos

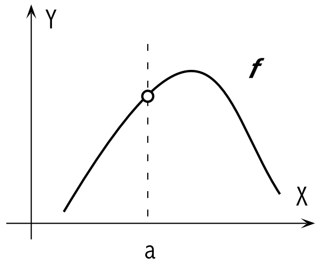
Para la función $f(x)$ a la que correspondería esta gráfica, se verificaría que:

- No existe $f(a)$
- No existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$



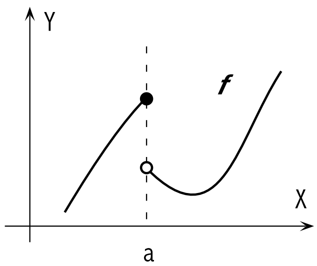
En este segundo caso, para la función $f(x)$ de la figura, se verificaría que:

- No existe $f(a)$
- Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$



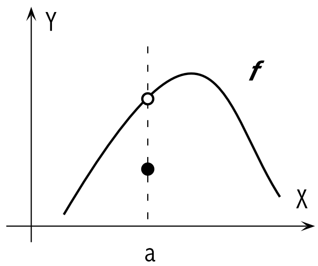
En este tercer caso, para $f(x)$ se tiene:

- Existe $f(a)$
- No existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$



En este cuarto caso se verifica:

- Existe $f(a)$
- Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
- Ambos valores son distintos

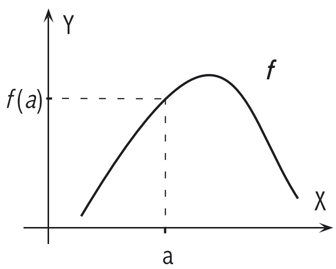


Definición (de función continua en un punto)

Hablando sin mucho rigor, podríamos decir que, aun siendo diferentes, lo que tienen en común los casos anteriores es que las gráficas se rompen en el punto de abscisa *a*, hay que levantar el lápiz del papel al llegar a x = *a*... Justamente cuando no suceda eso, cuando no haya que levantar el lápiz del papel para dibujar la gráfica, será cuando diremos que la función es continua. Formalmente:

Una función $f(x)$ es continua en $x = a$	si y sólo si	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

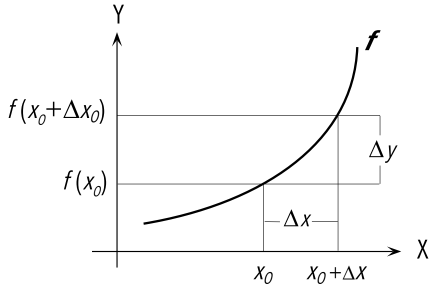
Parece innecesaria añadir que la función de la siguiente figura **sí** es continua en el punto *a*.



Observación

Dijimos antes que las funciones continuas hacían corresponder a incrementos *pequeños* de la variable independiente, incrementos también *pequeños* de la variable dependiente. Vamos a explicarlo un poco mejor ahora, aprovechando la ocasión para introducir una notación que es interesante conocer.

Sea la función $f(x)$ y consideremos un valor x_0 de la variable independiente; el valor correspondiente de la función será $f(x_0)$. Si a x_0 le sumamos cierta "cantidad" Δx, a la que llamaremos *incremento de x*, el valor de la función será $f(x_0+\Delta x)$. A la diferencia $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, que refleja la variación de $f(x)$ cuando la variable independiente ha pasado de valer x_0 a valer $x_0+\Delta x$, la llamaremos *incremento de la variable dependiente* y la representaremos por Δy.



Pues bien: si la función $f(x)$ es continua en x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ y en tal caso, sustituyendo x por $x_0+\Delta x$, se tendrá:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_o+\Delta x)=f(x_o),\ \text{es decir:}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_o+\Delta x)-f(x_o)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

Luego, que $f(x)$ sea continua en x_0 significa, efectivamente, que a incrementos Δx de la variable independiente muy pequeños (infinitesimales), corresponden incrementos Δy de la variable dependiente también muy pequeños (infinitesimales).

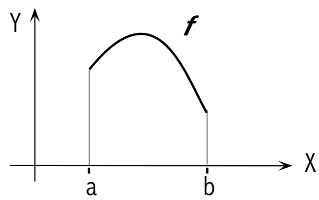
7. FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO

Definiciones (de función continua en intervalo abierto y cerrado)

1 Diremos que una función $f(x)$ es *continua en un intervalo abierto* (a, b) si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

Como la cuestión es así de sencilla, no vamos a darle más vueltas. Pero, en cambio, considera ahora una función $f(x)$ cuya gráfica fuera como la que tienes a la vista:

De acuerdo con la noción intuitiva de continuidad, resulta razonable decir que tal función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Pero no podríamos basarnos para ello en que $f(x)$ sea continua en todos los puntos del intervalo pues en realidad no sabríamos qué ocurre con los límites de $f(x)$ en los extremos a y b. Se hace necesaria, pues, una definición más precisa.



2 Diremos que una función $f(x)$ es *continua en un intervalo cerrado* [a, b] si lo es en el intervalo abierto (a, b) y, además:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a);\qquad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

Dos propiedades

Dos propiedades fundamentales de una función continua en un intervalo cerrado son las siguientes:

1 Si una función es continua en un intervalo cerrado y toma valores de signo distinto en sus extremos, entonces hay al menos un punto en el interior del intervalo en el que la función se anula.

2 Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces alcanza un valor máximo y otro valor mínimo en dicho intervalo.

8. EJERCICIOS

1.- Se tienen tres funciones $f(x), g(x), h(x)$ tales que: $\lim_{x\to 2} f(x)=5$, $\lim_{x\to 2} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to 2} h(x)=0$. Escribe el valor de:

$$\lim_{x\to 2} f(x)\cdot g(x), \quad \lim_{x\to 2} [f(x)+g(x)], \quad \lim_{x\to 2} f(x)/g(x), \quad \lim_{x\to 2} h(x)/f(x), \quad \lim_{x\to 2} f(x)/h(x)$$

2.- Calcula, en los casos en que existan, los siguientes límites:

$$\textbf{1. } \lim_{x\to\infty}\left(5x^2-8x\right) \qquad \textbf{2. } \lim_{x\to-\infty}\left(0{,}3^x+5\right) \qquad \textbf{3. } \lim_{x\to-\infty} 4^{x+2} \qquad \textbf{4. } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x^2+4x}}{2x+3}$$

3.- Calcula, en los casos en que existan, los siguientes límites:

$$\textbf{1. } \lim_{x\to 0}\frac{x^5+3}{x^2} \qquad \textbf{2. } \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} \qquad \textbf{3. } \lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{2x}-\sqrt{8}} \qquad \textbf{4. } \lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}$$

$$\textbf{5. } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x} \qquad \textbf{6. } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \qquad \textbf{7. } \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}-1} \qquad \textbf{8. } \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{4x-8}\right)^{\frac{5}{(x-2)^2}}$$

$$\textbf{9. } \lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}} \qquad \textbf{10. } \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x \qquad \textbf{11. } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} \qquad \textbf{12. } \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4x}}{x}$$

4.- Siendo $x\in \mathbf{R}$, con el símbolo $[x]$ se representa la parte entera de x, o sea, el mayor de los números enteros menores o iguales que x. Sabiendo lo anterior, representa gráficamente la funcion $f(x)=[x]$, di qué ocurre con sus límites laterales para $x\to a$, siendo a un número entero, y estudia su continuidad.

5.- Haz lo mismo que en el ejercicio anterior, pero con la función $f(x)=x-[x]$.

6.- Representa gráficamente la función $f(x)=|x|$ y estudia su continuidad en $x = 0$.

7.- Determina el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos $x = 3$ y $x = 0$, respectivamente.:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ \text{k} & \text{si } x=3\end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases}(1+x)^n-1 & \text{si } x\neq 0\\ \text{k} & \text{si } x=0\end{cases}$$

8.- Estudia la continuidad de las funciones:

$$f(x)=\left|\frac{x-2}{2}\right| \quad ; \quad g(x)=\frac{|x|}{x}$$

9.- Determina si existe algún valor de k para el que sea continua en $a = 2$ la función:

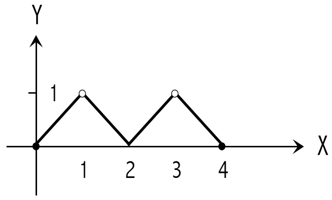
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4}} & \text{si } x\neq 2\\ \text{k} & \text{si } x=2\end{cases}$$

10.- Determina si existe algún valor de k tal que la siguiente función sea continua en todo punto:

$$f(x)=\begin{cases}2x+\text{k} & \text{si } x\leq 1\\ x^2-\text{k}x+2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

11.- ¿Para qué valores de k la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+\text{k}}$ no es continua en $x = \text{k}$?

12.- Determina una expresión algebraica y estudia la continuidad de la función cuya gráfica es la siguiente:



13.- El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: $P(t)=\dfrac{15+t^2}{(t+1)^2}$ donde t se mide en años transcurridos desde $t=0$. Calcula: **a)** La población inicial. **b)** El tamaño de la población a largo plazo.

14.- Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}01x & \text{si} \quad 0\le x\le 100 \\ \dfrac{30x}{2x+2300} & \text{si} \quad x>100 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 euros. **b)** ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy *grandes?*

15.- Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función:

$$f(t)=\frac{15000\cdot t+10000}{2\cdot t+2},$$

siendo t el número de años transcurridos. Se pide: **a)** Tamaño actual de la población. **b)** ¿Cómo evolucionará el tamaño de la población entre los años 4º y 9º? **c)** Si la función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?

16.- Se ha investigado el tiempo (*T,* en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (*x,* en días), obteniéndose que:

$$T(x)=\begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & \text{si} \quad 0\le x\le 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2 & \text{si} \quad x>30 \end{cases}$$

a) Analiza si la función T es continua en todo su dominio. **b)** Por mucho que se entrene un deportista, ¿podrá hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

17.- La calificación obtenida por un estudiante en cierto examen depende de las horas x de preparación a través de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{si} \quad 0\le x\le 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si} \quad x>15 \end{cases}$$

a) Analiza si la función es continua para todo valor positivo de x. **b)** ¿Tiene sentido afirmar que a más tiempo de preparación corresponde más calificación? **c)** ¿Hay algún momento en que estudiar un poco más sea muy rentable? **d)** ¿Se puede obtener una calificación de 10 puntos?

Tema 5

Derivada de una función. Aplicaciones

1. INTRODUCCIÓN

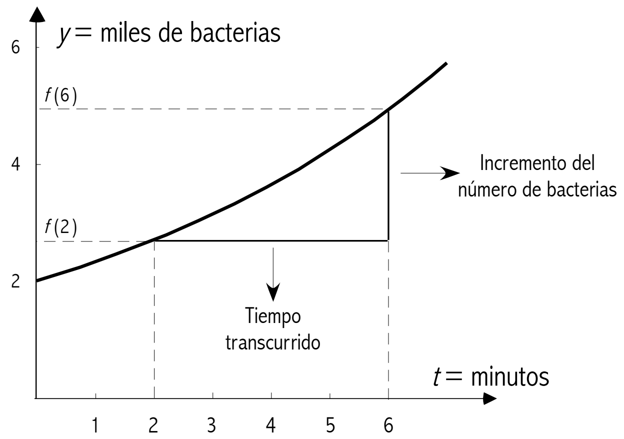
El concepto de derivada es uno de los más importantes conceptos matemáticos. Su interés radica, básicamente, en que es el instrumento que esta ciencia proporciona a otras, como la física o la economía, para que en aquellas situaciones en que se producen cambios, pueda medirse la rapidez con la que éstos se producen. Pero, además, el uso de la derivada es indispensable para la resolución de problemas de optimización, cuya importancia en actividades de muy diversa índole es capital.

Si las funciones continuas constituyen un tipo especial en el universo variopinto de las funciones, aún siguen siendo *demasiadas*. Restringir algo el tipo de funciones con las que se trabaja, exigir la derivabilidad a una función, permitirá obtener resultados mucho más interesantes que los ya obtenidos para las funciones continuas. Si éstas, las funciones continuas, podrían ser caracterizadas intuitivamente como aquellas cuyas gráficas no se quiebran, no se rompen, aquéllas, las derivables, serán las funciones que, además de no romperse, son suaves, no tienen picos... Las consecuencias que se obtendrán de limitar nuestro trabajo a las funciones derivables van a ser de una riqueza y variedad insospechada.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Primer ejemplo

❖ Supongamos que la población de bacterias en un cultivo viniera dada por la función: $y = f(t) = 2 \cdot e^{0.15\,t}$, donde t fuera el tiempo de cultivo, en minutos, e y el número de bacterias, en miles. La gráfica de la figura es la de dicha función.



Si quisiéramos averiguar la rapidez con la que la colonia crece en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes $t_0 = 2$ minutos, $t_1 = 6$ minutos, por ejemplo, bastaría con calcular, en primer lugar, la diferencia entre las poblaciones en esos dos momentos:

$$f(6) - f(2) = 2e^{0.9} - 2e^{0.3} = 4.92 - 2.70 = 2.22$$

(en miles de bacterias) y, luego, como dicho incremento se ha producido en 4 minutos, dividir $\dfrac{2.22}{4} = 0.555$. Se tendría, por tanto, que la población de bacterias crecería en el intervalo de tiempo comprendido entre $t_0 = 2$ minutos, y $t_1 = 6$ minutos, a una velocidad media de 555 bacterias por minuto.

En general, para medir la rapidez de crecimiento de la población de bacterias entre los instantes t_0 y t_1 bastaría con calcular:

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

cociente al que se llama *tasa de variación media* de la función $f(t)$ en el intervalo $[t_0,\ t_1]$.

Observemos que si designamos por Δt la diferencia $t_1 - t_0$, el cociente anterior puede escribirse en la forma:

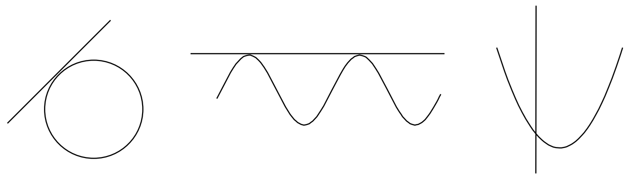
$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

En esas condiciones es evidente que cuanto más próximo sea t_1 a t_0 (o sea, cuanto más pequeño sea Δt), mejor se corresponderá el valor del cociente anterior con lo que podríamos llamar velocidad o rapidez *instantánea* del crecimiento de la población. Por eso es natural definir la rapidez del crecimiento de la población en el instante t_0 mediante una cualquiera de las tres expresiones siguientes:

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Tangente a una curva en un punto

Si alguien nos preguntara qué es la tangente a una curva en un punto, nosotros, pensando quizás en el caso de la circunferencia, podríamos responder que es la recta que corta a la curva en ese único punto... Pero mala respuesta sería, porque entonces no nos quedaría más remedio que admitir que la segunda recta del dibujo no sería tangente a la sinusoide y que, en cambio, sí lo sería la tercera a la parábola...

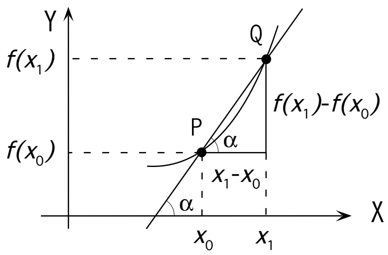


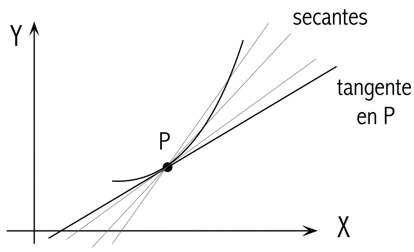
La cuestión se resuelve así:

1º) Como se observa en la figura siguiente, la recta secante a la función $y = f(x)$ en los puntos $\mathrm{P}\big(x_0, f(x_0)\big)$ y $\mathrm{Q}\big(x_1, f(x_1)\big)$ es la recta que pasando por P tiene por pendiente:

$$\mathrm{m}_{\mathrm{PQ}} = \mathrm{tag}\, \alpha = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

pues, como sabes, la pendiente de una recta en el plano es la tangente trigonométrica del ángulo que forman el eje OX y dicha recta.





2º) Por otro lado, la tangente en el punto P *parece ser* la recta a la que *tenderían* las secantes en P y Q cuando el punto Q *tendiera a confundirse* con el P.

⇨ Por todo ello, se define formalmente la *tangente* a la función $y = f(x)$ en el punto $\mathrm{P}\big(x_0, f(x_0)\big)$ como la recta que pasando por dicho punto tiene por pendiente el siguiente límite, si éste existe:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

• Interesa observar que, al igual que hacíamos en el ejemplo anterior, si donde pone *x* ponemos $x_o + \Delta x$, la pendiente de la tangente vendrá dada por:

$$\mathrm{m} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

expresión que, en el fondo, lo que hace es comparar en el punto considerado dos incrementos, el de variable dependiente y el de la independiente cuando éste tiende a cero; o dicho de otra forma: cómo varía la *y* en relación a la *x*.

Definición (derivada de una función en un punto)

➪ Sea $y=f(x)$ una función real de variable real. Diremos que $f(x)$ es *derivable en un punto* x_0 si existe y es finito:

$$\boxed{\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

➪ Tal límite, que también puede expresarse como:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}}$$

recibe el nombre de *derivada de la función* $f(x)$ *en el punto* x_o y se representa normalmente por $f'(x_o)$ ó $y'(x_o)$.

➪ Finalmente, dado que $f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=\Delta y$, se tendría:

$$\boxed{f'(x_o)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

expresión que permite interpretar la derivada de $f(x)$ en el punto x_o como el *límite del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el de la variable independiente, cuando éste último tiende a cero.*

➪ Observemos, por cierto, que de acuerdo con la nueva notación, la *ecuación de la tangente* a la curva $y=f(x)$ en un punto x_o en el que sea derivable será: $y-y_0=f'(x_o)\cdot(x-x_o)$. Es la llamada "ecuación en forma *punto-pendiente".*

Ejemplos

Debe quedar claro que una función será derivable en un punto sólo si existe el límite anterior. Así, por ejemplo:

➪ ① La función "valor absoluto": $f(x)=|x|$, no es derivable en el punto $x_0=0$, al ser distintos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=+1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

Cuando sospechemos que no habrá ningún problema, una forma de calcular —por ahora— la derivada de $f(x)$ en x_o es la del siguiente ejemplo, en el que utilizamos la llamada *regla de los 5 pasos:*

➪ ② Para hallar la derivada de $f(x)=x^2$ en el punto $x_o=5$:

1º) Hallaríamos $f(x_o)=5^2=25$

2º) Calcularíamos $f(x_o+\Delta x)=(5+\Delta x)^2=25+10\Delta x+(\Delta x)^2$

3º) Obtendríamos $\Delta y=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=10\Delta x+(\Delta x)^2$

4º) Hallaríamos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=10+\Delta x$

5º) Finalmente, calcularíamos $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(10+\Delta x)=10$

3. FUNCIÓN DERIVADA

Ejemplo previo

Supongamos que dada la función $f(x)=x^3$ quisiéramos obtener $f'(2)$. Tendríamos que calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\ ,\ \text{o bien:}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

Tanto en un caso como otro, llegaríamos a que: $f'(2)=12$.

Si, posteriormente, necesitáramos conocer $f'(5)$, tendríamos que calcular:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\ ,\ \text{o bien:}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$$

Llegaríamos a que: $f'(5)=75$

Pero, ¿y si posteriormente tuviéramos necesidad de conocer $f'(8), f'(-3), f'(0)$ ...?

A poco que pensáramos en el problema llegaríamos a la conclusión de que lo mejor sería ver que:

$$\forall x\in\mathbf{R}:\quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2$$

y el cálculo de $f'(8), f'(-3), f'(0)$ ... sería inmediato, pues bastaría con hallar las imágenes de 8, –3, 0... mediante la función:

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \xrightarrow{f'} & \mathbf{R}\\ x & \longrightarrow & 3x^2\end{array}$$

Definición (de función derivada)

☞ Dada la función $f(x)$, designaremos por $f'(x)$ y llamaremos *función derivada* de $f(x)$ o, simplemente, derivada de $f(x)$, a la función

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \xrightarrow{f'} & \mathbf{R}\\ x & \longrightarrow & f'(x)\end{array}$$

que a cada punto x_0 en el cual $f(x)$ sea derivable hace corresponder como imagen $f'(x_0)$.

Ejemplo

Para hallar la función derivada de $f(x)=x^2$ procederíamos de la siguiente manera:

$$\forall x\in\mathbf{R}:\quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x$$

La derivada buscada sería, pues: $f'(x)=2x$

Definición (de derivada segunda)

Definida la función derivada de $f(x)$, tiene sentido hablar de su derivada en un punto x_0, número al que llamaremos *derivada segunda* de la función $f(x)$ en el punto x_0 y representaremos por $f''(x_0)$. A la función $f''(x)$, función derivada de $f'(x)$, la llamaremos *función derivada segunda* o simplemente *derivada segunda* de $f(x)$. Aunque se trata de un concepto de mucho uso en el análisis matemático, consideramos que en esta asignatura puede ser suficente con mencionarlo.

4. DERIVACIÓN

Como acabamos de ver, el conocimiento de la función derivada (o, simplemente, la *derivada)* de una función $f(x)$ permite el cálculo inmediato de la derivada de $f(x)$ en cualquier punto, sin más que hacer la oportuna sustitución en la expresión de $f'(x)$ del valor tomado por *x.* Pues bien, existen unas *reglas de derivación,* cuya demostración consideramos prescindible en este curso, que son las que realmente se aplican en la práctica para hallar derivadas. Las resumimos a continuación.

Derivadas de las funciones elementales

Función	Derivada
k (constante)	0
x	1
x^n	$n x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tag} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Derivadas de funciones obtenidas a partir de otras

Función	Derivada
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
$f\left[g(x)\right]$	$f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$

Ejemplos

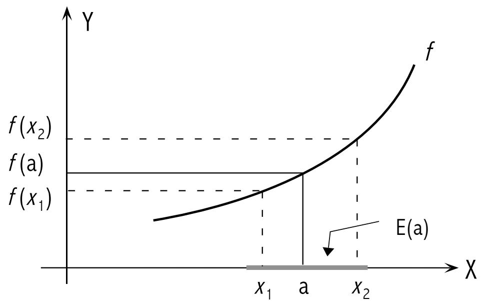
Sin más que aplicar las reglas de derivación anteriores, podría obtenerse, por ejemplo:

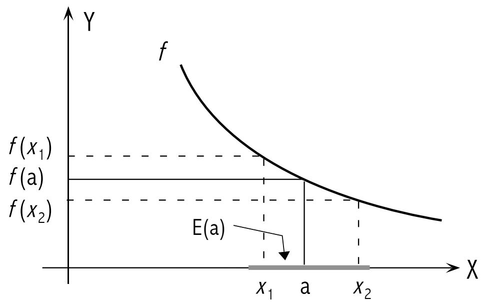
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$5x^4$	$20x^3$	$\operatorname{sen} 5x$	$5\cos 5x$
$(x^2+3x)^4$	$4(x^2+3x)^3(2x+3)$	$\operatorname{sen}^2 x$	$2\operatorname{sen} x\cdot\cos x$
$\dfrac{1}{x^3}$	$-\dfrac{3}{x^4}$	$\operatorname{sen} x^2$	$2x\cdot\cos x^2$
$\sqrt{7x}$	$\dfrac{7}{2\sqrt{x}}$	$\cos(x^2+2x)$	$-(2x+2)\cdot\operatorname{sen}(x^2+2x)$
$x^2+(1-x)^2$	$2x-2(1-x)$	$3e^{x^4}$	$12x^3e^{x^4}$
$\sqrt[3]{x}$	$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\ln(x^4+x^2)$	$\dfrac{4x^3+2x}{x^4+x^2}$
$\sqrt{x^2+1}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{tg} x^2$	$\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

5. CRECIMIENTO Y EXTREMOS LOCALES

Crecimiento y decrecimiento de una función

Observa detenidamente las figuras siguientes:





Admitirás que, en el primer caso, existe un entorno de **a**, E(**a**), tal que en él, pero a la izquierda de **a**, los valores que toma la función son menores que los que toma en **a**, mientras que a la derecha, los valores tomados por la función son mayores que el tomado en **a**. En el segundo caso, sucede justamente lo contrario: existe un entorno de **a** tal que, en él, los valores que toma la función a la izquierda y a la derecha de **a** son, respectivamente, mayores y menores que el valor que toma en **a**. También podríamos decir que, en el primer caso, a partir de **a**, un incremento $\boldsymbol{\Delta x}$ suficientemente pequeño, pero positivo, produce un incremento de $\boldsymbol{\Delta y}$ positivo, mientras que un incremento $\boldsymbol{\Delta x}$ negativo produce un incremento de $\boldsymbol{\Delta y}$ también negativo. En el segundo caso, los incrementos tendrían distinto signo.

Debido a lo anterior, se dan las siguientes definiciones:

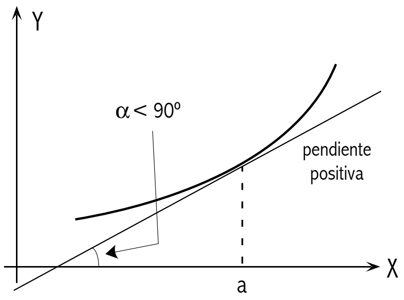
① Una función es *creciente* en un punto **a** si existe un entorno E(a) tal que: $$x\in E(a)\ \wedge\ \begin{cases} x<a & \Rightarrow\quad f(x)<f(a)\\ x>a & \Rightarrow\quad f(x)>f(a)\end{cases}$$

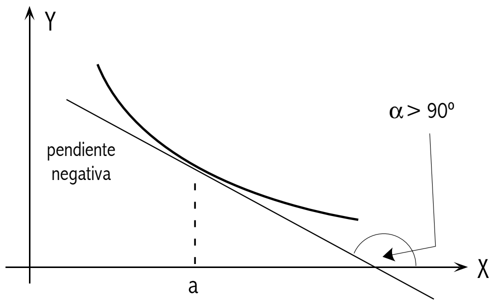
② Una función es *decreciente* en un punto **a** si existe un entorno E(a) tal que: $x \in E(a) \wedge \begin{cases} x < a & \Rightarrow & f(x) > f(a) \\ x > a & \Rightarrow & f(x) < f(a) \end{cases}$

☞ Por extensión, diremos que una función es *creciente (decreciente) en un intervalo* cuando sea creciente (decreciente) en todos los puntos del intervalo.

Supongamos $f'(a) > 0$**.** Eso significa que para valores de Δx suficientemente pequeños, $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} > 0$, o sea $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Y la función sería creciente en el punto **a**. La pendiente de la tangente a la curva en el punto **a** sería positiva.

Si, por el contrario, fuera $f'(a) < 0$, para valores de Δx suficientemente pequeños sería $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ y la función sería decreciente en el punto **a**. La pendiente de la tangente a la curva en el punto a sería negativa.





En otras palabras:

$f'(\mathrm{a}) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es creciente en el punto **a**

$f'(\mathrm{a}) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en el punto **a**

Ejemplo

Supongamos que deseáramos estudiar el crecimiento de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Como la derivada es: $f'(x) = 3x \cdot (x-4)$, tendríamos:

$x < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

$0 < x < 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en el intervalo (0, 4)

$4 < x \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es creciente en el intervalo $(4, \infty)$

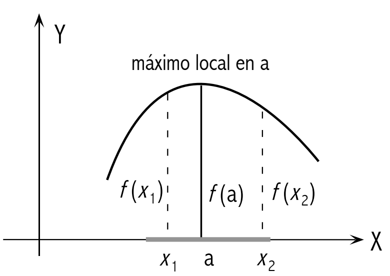
Máximos y mínimos locales

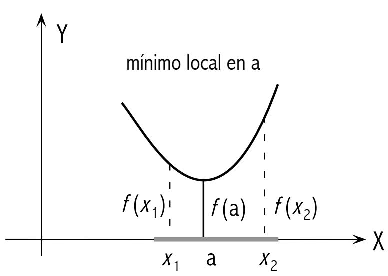
➡ Diremos que una función $y = f(x)$ tiene un *máximo local o relativo* en un punto *a* cuando exista un entorno E(*a*) tal que:

$$x \in E(a) \Rightarrow f(x) \le f(a)$$

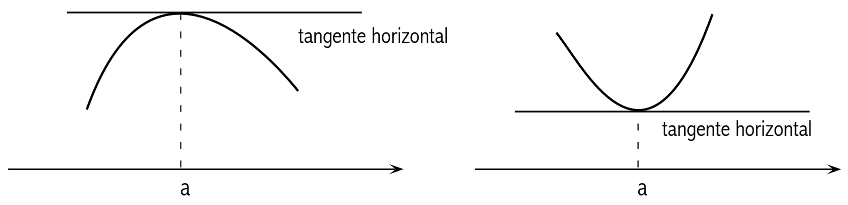
➡ Diremos que una función $y = f(x)$ tiene un *mínimo local o relativo* en un punto *a* cuando exista un entorno E(*a*) tal que:

$$x \in E(a) \Rightarrow f(x) \ge f(a)$$





Observa en la figura siguiente que si una función alcanza un máximo o un mínimo local en un punto en el que sea derivable, la tangente a la curva en dicho punto será horizontal, paralela al eje OX y, por tanto, de pendiente cero:



Pero, dado que la pendiente de la tangente coincide con la derivada de la función en el punto de tangencia, se concluye que:

➠ De entre los puntos en los que una función sea derivable sólo podrá tener máximos o mínimos locales en aquellos en los que la derivada sea nula.

(Una función puede tener un máximo o un mínimo local en puntos en los que no sea derivable, pero ése es un caso que, en principio, no nos interesa.)

Ahora bien: hallados los valores de a tales que $f'(a) = 0$, *¿cómo saber si efectivamente hay en ellos un máximo o un mínimo?* Un procedimiento muy simple, que sirve en la mayoría de los casos, es éste:

➠ Para determinar los máximos y mínimos locales de una función $f(x)$ se calculan en primer lugar los valores de **a** tales que $f'(a) = 0$. Después, obtenidos tales puntos, se analiza el signo de la derivada $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de ellos. Habrá máximo en **a** cuando a la izquierda de **a** la derivada sea positiva y a la derecha negativa (la función sería creciente a la izquierda de **a** y decreciente a la derecha). Habrá mínimo en **a** cuando a la izquierda de **a** la derivada sea negativa y a la derecha positiva (la función sería decreciente a la izquierda de **a** y creciente a la derecha).

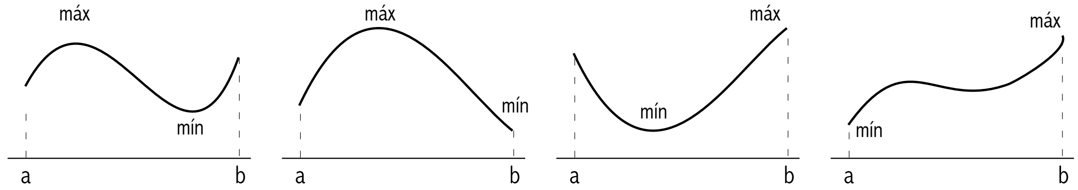
Ejemplo

Consideremos nuevamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ anterior, cuya derivada era: $f'(x) = 3x \cdot (x-4)$. Dicha derivada se anula en los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. Pero a la izquierda de $x_1 = 0$, según vimos, la función era creciente, mientras que a la derecha era decreciente. Por tanto, en $x_1 = 0$ la función tendrá un máximo local, de valor 5. Por otra parte, a la izquierda del punto $x_2 = 4$ la función era decreciente, siendo creciente a la derecha. Por tanto, en $x_2 = 4$ la función tendrá un mínimo local, de valor -27.

6. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Consideraciones previas

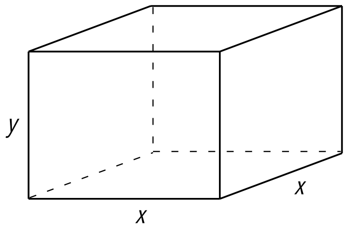
Con frecuencia se desea conocer para qué valores de las variables ciertas funciones alcanzan un valor que sea el mayor o el menor de todos los posibles. Nosotros nos limitaremos a estudiar ejemplos sencillos, con funciones de hasta dos variables a lo sumo. La idea en la que nos basaremos se desprende de la siguiente figura: El máximo y el mínimo absolutos de una función continua en un intervalo cerrado se alcanzan, bien en uno al menos de los extremos del intervalo, bien en puntos del interior del mismo, en cuyo caso esos valores maximo o mínimo absolutos serán locales y estarán en puntos en el que la derivada se anule.



Debido a ello, para calcular los valores máximo y mínimo absolutosde una función continua en un intervalo cerrado, tras hallar los puntos del interior del mismo en los que la derivada se anule, compararemos el valor de la función en tales puntos con el que toma en los extremos del intervalo. De esa comparación resultará evidente cuál es el valor máximo absoluto y cuál el mínimo.

Resolveremos a continuación un ejemplo, dejando otros para el apartado de ejercicios.

Ejemplo



Se desea construir una caja de cartón, sin tapa y en forma de paralelepípedo de base cuadrada, cuya superficie total sea de 225 cm^2, y cuya capacidad sea la máxima posible. ¿Qué dimensiones habrá de tener tal caja?

En primer lugar hemos de establecer la función que se desea optimizar; en este caso, el volumen, V, de la caja. Siendo x el lado de la base e y la altura de la caja se tendrá:

$$V = x^2 \cdot y$$

A continuación, buscaremos alguna relación entre las dos variables, x e y. El hecho de que la superficie total de la caja (sin tapa) haya de ser 225 cm^2 nos permite escribir:

$$x^2 + 4xy = 225$$

Resumiendo:

Función a optimizar: $V = x^2 \cdot y$ [*]

Relación entre las variables: $x^2 + 4xy = 225$ [**]

Despejando en [**]: $y = \dfrac{225 - x^2}{4x}$ y llevando ese valor a [*]: $V = \dfrac{225x - x^3}{4}$

Como vemos, la función V depende ya de una sola variable, x y tiene por dominio el intervalo $[0,15]$.

Por otra parte se tiene:

$$V' = \frac{225 - 3x^2}{4}$$

de donde resulta que V' se anula para: $x_1 = -5\sqrt{3}$; $x_2 = 5\sqrt{3}$. Descartado un valor negativo del lado de la base, y comprobado por el método antes explicado que en $x_2 = 5\sqrt{3}$ existe un máximo local, el valor máximo del volumen se alcanzará bien en uno de los extremos del intervalo $[0,15]$, bien en el punto $x = 5\sqrt{3}$. Basta comparar los valores tomados por el volumen en esos tres puntos:

$$V(0) = 0 \qquad V(5\sqrt{3}) = \frac{375}{2}\sqrt{3} \qquad V(15) = 0$$

para concluir que el volumen máximo se logra cuando $x = 5\sqrt{3} \approx 8.66$ cm , $y = \dfrac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4.33$ cm.

7. OBTENCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

Llegados a este punto, no podemos ocultar que en la actualidad existen programas informáticos que permiten dibujar las gráficas de funciones con rapidez y precisión. No obstante, si bien es cierto que al obtener gráficas de tal manera se ahorra uno trabajo y tiempo, también lo es que pasan desapercibidas en buena medida las propiedades de las funciones, que es lo que suele interesar, más que las gráficas en sí mismas. Por ello sigue siendo interesante adquirir destreza en tal técnica. En lo que sigue mostraremos la mayoría –no todos– de los pasos que pueden darse para representar gráficamente una función. Haremos consideraciones de carácter general, pero, para facilitar el seguimiento de lo que expliquemos, nos dedicaremos a la obtención de la gráfica de la función:

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Dominio y continuidad

➨ Lo primero que conviene determinar es el dominio y los puntos en que es continua la función que se quiere representar. El procedimiento mediante el que lo haremos dependerá del tipo de función de que se trate. En la de nuestro ejemplo, el dominio, $\mathbf{D}_f$, es el conjunto **R** de los números reales, exceptuados -1 y $+1$, valores para los cuales el denominador de $f(x)$ se anula y el cociente no tiene sentido. Tratándose de una función cociente de dos funciones polinómicas, será continua en todos los puntos de su dominio.

Puntos de corte con los ejes coordenados

➨ Dando por descontado que tratándose de dibujar la gráfica de una función podrán hallarse tantos puntos de ella como parezca oportuno, conviene añadir que los puntos auxiliares de mayor interés suelen ser aquellos en los que la curva corta a los ejes de coordenadas. El punto de corte con el eje de ordenadas, **OY** (si existe, será único), será el de coordenadas $\left(0\,,f(0)\right)$. Los de corte de la curva con el eje de abscisas, **OX** (en plural, porque pueden ser más de uno), se obtendrán calculando los valores de x para los que $f(x)=0$.

En nuestro caso, el único punto de corte de la gráfica, tanto con el eje **OX** como con el **OY** es el (0, 0), pues, por una parte, $f(0)=0$ y, por otra, el único valor de x para el que $f(x)=0$ es $x=0$.

Crecimiento y decrecimiento

➨ Ya hemos visto cómo proceder para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. En el caso que estamos analizando, se tiene:

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

cociente que es positivo en los intervalos $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}\,,\infty)$ y negativo en el intervalo $(-\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$, salvo en el punto $x=0$, en el que la derivada se anula. Observemos, no obstante, que a la izquierda de cero la función toma valores negativos; en cero, se anula, y a la derecha de cero toma valores positivos. Por todo ello, la función será creciente en los intervalos $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}\,,\infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$, exceptuados los puntos $x=\pm 1$, en los que $f(x)$ no está definida.

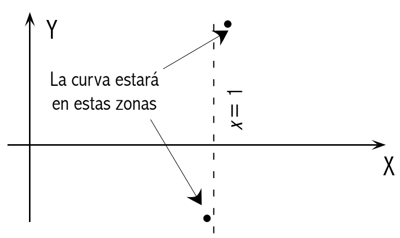
Máximos y mínimos locales

➨ Ya sabemos qué hay que hacer. La derivada de nuestra función se anula en los puntos: $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$. En el primero la función pasa de creciente a decreciente, luego tiene un máximo local. En el segundo ya hemos dicho que la función es creciente. Finalmente, en el último punto la función pasa de decrecer a crecer: En él habrá un mínimo local.

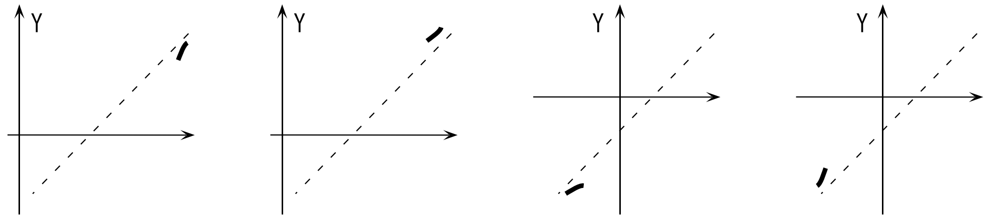
Asíntotas

➨ Para la función de nuestro ejemplo se verifica: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

Ello, como vimos en el tema anterior, significa que la curva se encontrará, con relación a la recta $x=1$ (a la que se llama *asíntota vertical* de la función) en la posición indicada a continuación:



➨ Por otra parte, si dada una función $f(x)$ y ocurriendo que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ (cualquiera de los cuatro casos posibles), existiera una recta tal que la curva se hallara respecto de ella como se indica en uno cualquiera de los cuatro casos de la siguiente figura, de dicha recta se diría que es una *asíntota oblicua* de la función.

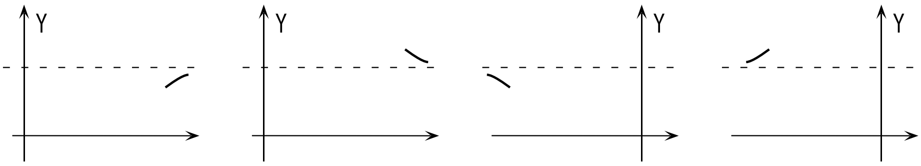


Dichas asíntotas, si existen, tendrán una ecuación de la forma: $y=\mathrm{m}x+\mathrm{b}$. Los valores de **m** y **b** se calculan de la siguiente manera:

$$\mathrm{m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\quad \mathrm{b}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\mathrm{m}x\right)$$

En nuestro ejemplo: $\mathrm{m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1;\qquad \mathrm{b}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\mathrm{m}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=0$, por lo que la curva tendrá una asíntota oblicua, de ecuación: $y=-x$.

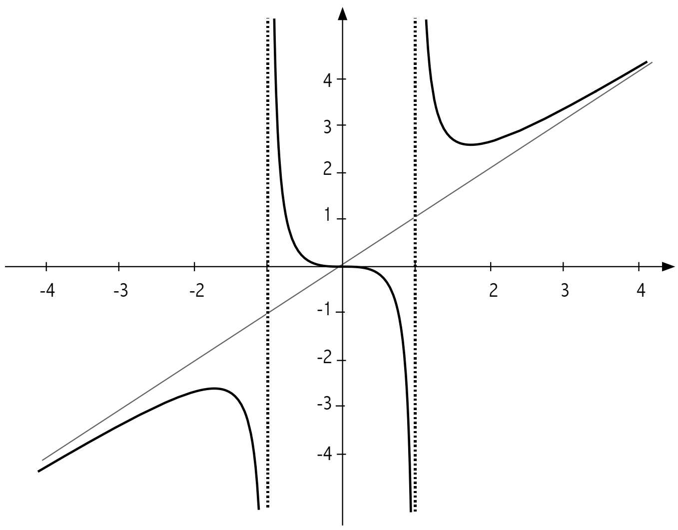
➨ Finalmente, si dada una función $f(x)$ ocurriese que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mathrm{a}$, la curva se hallaría respecto de la recta $y=\mathrm{a}$ en una situación como las de la figura, y entonces se diría que $y=\mathrm{a}$ sería una *asíntota horizontal.* La función de nuestro ejemplo no tiene asíntotas horizontales



Conclusión

➨ Las consideraciones anteriores, junto a la obtención de tantos puntos auxiliares como parezca oportuno, llevan a que la gráfica de la función del ejemplo es la siguiente:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$



8. EJERCICIOS

1.- Calcula el incremento Δy correspondiente a $\Delta x = 0.001$, para las funciones y los puntos que se indican. Halla, después, el valor del cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ en cada caso:

$$f(x)=x^2 \quad \text{en } x_0=5 \qquad g(x)=x^3 \quad \text{en } x_0=2 \qquad f(x)=5x^2+4x \quad \text{en } x_0=1$$

2.- Aplicando la definición de "derivada de una función en un punto", halla las derivadas de las funciones del ejercicio anterior en lospuntos indicados.

3.- Averigua si la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 4x+5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ es derivable en el punto $x=2$.

4.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$y=5x^2-3x \qquad y=5x(5x+x^2) \qquad y=x \qquad y=x^{-4}+x^4$$

$$y=4x^3+3x^2 \qquad y=x+\sqrt{x} \qquad y=\frac{x+6}{4} \qquad y=x^2-(x+1)\cdot(x-2)$$

$$y=e^{5x} \qquad y=\frac{1}{x^2-x} \qquad y=\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x} \qquad y=\sqrt[3]{3+x^3}$$

$$y=\left(\frac{5x+4}{7}\right)^3 \qquad y=x\cdot \operatorname{sen} x \qquad y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x \qquad y=x^2\cos x$$

$$y=\frac{x}{8(1-x^2)^4} \qquad y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}} \qquad y=\frac{4+x}{4-x} \qquad y=\left(x+\operatorname{sen} x\right)^2$$

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x}} \qquad y=e^{\ln x} \qquad y=\frac{x^2+x}{x^2-x} \qquad y=\sqrt[5]{x^2}$$

$$y=\operatorname{sen}^2 x^2 \qquad y=\operatorname{tg}^2\frac{1}{1+x^2} \qquad y=\ln\left(\frac{x^2}{3+x}\right) \qquad y=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$$

$$y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad y=\operatorname{sen}\frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad y=\cos^2 x\cdot\cos x^2 \qquad y=\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

5.- ¿En qué punto la derivada de la función $y=(\ln x-1)\cdot x$ es 1?

6.- Halla las ecuaciones de las tangentes a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

$$y=x^2+5x+6 \quad \text{en } x_0=2 \qquad y=\operatorname{sen} x \quad \text{en } x_0=0 \qquad y=\sqrt{8+x} \quad \text{en } x_0=1$$

7.- Halla los puntos de la curva $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ en los que la tangente tiene una inclinación de 45° respecto del eje OX.

8.- Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y=x^3$ en el punto x = 0. Haz un dibujo al respecto.

9.- Determina **m** con la condición de que la pendiente de la recta tangente a la curva: $y=\dfrac{mx+1}{2x+m}$, en el punto $x=1$ sea -1.

10.- Dadas las funciones: $f(x)=x^2-3x+1$; $g(x)=\operatorname{tg} x$, halla la ecuación de la tangente a cada una de ellas en el punto $x=0$.

11.- Halla los coeficientes de la función: $y=ax^2+bx+c$, sabiendo que la correspondiente parábola pasa por los puntos (0,3) y (2, 1) y que, en este último, la tangente tiene por pendiente 3.

12.- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

$$y=\frac{4}{x^2-9} \qquad y=\frac{x^3}{x^2+4} \qquad y=\frac{5}{x} \qquad y=x^2-5x+6$$

$$y=x^3 \qquad y=\operatorname{tg}x \qquad y=\sqrt{x} \qquad y=2x^3-3x^2$$

13.- La gráfica de la función derivada de una función *f* es una recta que pasa por los puntos (2, 0) y (0, 2). Utilizando la gráfica de la derivada: **a)** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función *f*. **b)** Estudia si la función *f* tiene algún máximo o mínimo.

14.- Halla los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

$$y=x^2-6x+8 \qquad y=6x^4-8x^3 \qquad y=\frac{1}{1+x^2} \qquad y=4x^2+8$$

15.- Si la gráfica de la derivada de $f(x)$ es una parábola que corta al eje OX en (0, 0) y (4, 0) y tiene por vértice (2,1), ¿qué se puede decir del crecimiento y decrecimiento de $f(x)$? Determina si la función $f(x)$ presenta máximos o mínimos.

16.- Halla los valores máximo y mínimo de las funciones siguientes, en los intervalos que se indican:

$$y=4x-x^2 \quad \text{en } [-1,3] \qquad y=2x^3-3x^2 \quad \text{en } [-2,2] \qquad y=(x-2)(x+6) \quad \text{en } [-3,2]$$

17.- La función $y=\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$ pasa por el punto (4, 6) y tiene un mínimo local en (2, –2). Halla a, b y c.

18.- La gráfica de cierta función: $f(x)=x^2+\mathrm{a}x+\mathrm{b}$ pasa por el punto (2, 2), donde existe justamente un mínimo. Halla el valor de la función para $x=1$.

19.- La gráfica de la función derivada, $f'(x)$, de cierta función $f(x)$ es la recta que pasa por los puntos (–2, 0) y (0, 3). Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como si hay algún punto de su gráfica en el que la tangente sea horizontal.

20.- Un fabricante de galletas dispone de piezas rectangulares de cartón de 3 por 2 dm, con las que recortando cuadrados en las esquinas pretende hacer cajas de máxima capacidad. ¿Cuál habrá de ser el lado de los cuadrados que recorte?

21.- Aunque sea una simplificación, supongamos que el beneficio obtenido por un fabricante de relojes viniera dado por la función:

$$y=150-9(4-x)^2$$

donde *x* representa los miles de relojes vendidos e *y* los beneficios, en miles de euros. Representa dicha función y averigua el número de relojes que han de venderse para obtener el máximo beneficio: **a)** si la producción máxima de la fábrica es de 3.000 relojes. **b)** si la producción puede llegar a 7.000 relojes.

22.- Un fabricante de conservas de fabada asturiana quiere utilizar el envase de forma cilíndrica que con una capacidad de un tercio de litro resulte lo más económico posible. ¿Cuáles serán las dimensiones de la lata?

23.- Cierto banco ha comprobado que la cantidad de dinero que depositan en él sus clientes, y que él mismo puede prestar a otros clientes al 8%, es proporcional al interés que paga por los depósitos. ¿Cuál es el interés que el banco habrá de pagar a quienes le dejan su dinero para obtener los máximos beneficios?

24.- Se quiere vallar un campo rectangular junto a un camino. Halla la superficie máxima que puede cercarse si la valla del lado del camino cuesta 8 €/m, la de los otros lados 1 €/m y se dispone de 2.880 €.

25.- De entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?

26.- Un comerciante compra artículos a 350 € la unidad y sabe que si el precio de venta es 750 €, vende 30 unidades al mes y que por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas de cada mes en 3 unidades. Determina el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante.

27.- Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de dicha pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

28.- El precio de cada bloque de cierta materia es proporcional al cuadrado de su peso. Tenemos un bloque de 20 kg que cuesta 5 €. **a)** Si el bloque se rompe en dos trozos de 5 y 15 kg ¿cuál es ahora el precio de los dos trozos? **b)** Demuestra que si el bloque se rompe en dos trozos cualesquiera, siempre se depreciará. **c)** Calcula para qué partición se produce la máxima pérdida de valor.

29.- El saldo, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo viene dado por la función:

$$f(t)=\begin{cases} 4-0.2t & \text{si} \quad 0\le t<4 \\ 3.2+0.04(t-4) & \text{si} \quad 4\le t<8 \\ 3.3+0.1(t-8)^2 & \text{si} \quad 8\le t\le 12 \end{cases}$$

Deduce razonadamente el valor de *t* en el que el capital fue máximo.

30.- Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. (Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora). La función que expresa dicho rendimiento es:

$$R(t)=30\,t-10.5\,t^2+t^3$$

siendo *t* el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral. **a)** Determina cuándo se produce el máximo rendimiento y cuándo el mínimo. **b)** Halla la tasa de variación media del rendimiento entre $t=2$ y $t=4$.

31.- Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, $R(x)$, en euros, viene dada en función de la cantidad que se invierta, *x*, en euros, por medio de la siguiente expresión:

$$R(x)=-0.01x^2+5x+250$$

a) Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan. **b)** ¿Qué rentabilidad obtendría?

32.- Cierto tipo de bengala permanece encendida un tiempo de 4 minutos. Se ha comprobado que el porcentaje de luminosidad que produce viene dado, considerando el tiempo en minutos, a través de la función:

$$f(t)=25t(4-t)\,; \quad 0\le t\le 4$$

a) ¿Para qué valor de *t* se obtiene el porcentaje de luminosidad máximo? **b)** ¿En qué intervalo de tiempo decrece el porcentaje de luminosidad? **c)** ¿Para qué valores de t el porcentaje de luminosidad es del 75 %?

33.- En una oficina de correos sólo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que su anchura sea igual a su altura y, además, la suma de sus tres dimensiones sea de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para el que el volumen es máximo.

34.- Un club deportivo de 5 años de antigüedad cuenta con un número de socios, en decenas de miles de personas, que ha variado según la función:

$$f(x)=\frac{2x^3-15x^2+24x+26}{10}$$

donde *x* indica el número de años transcurridos desde la fundación. **a)** Halla el año en el que el club ha tenido el mayor número de socios. **b)** El cuarto año se cambiaron las normas de admisión. Indica razonadarnente si este cambio tuvo éxito o no.

35.- Tras estudiar las propiedades de cada una de las siguientes funciones, dibuja sus gráficas:

$y=x^3+3x^2$ $\quad y=-x^2+4x$ $\quad y=3x^4-4x^3-16$ $\quad y=3x^5-20x^3$ $\quad y=\dfrac{x^2+2}{x}$

$y=\dfrac{x}{x^2+2}$ $\quad y=\dfrac{x+2}{x-2}$ $\quad y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ $\quad y=x^2+\dfrac{1}{x}$ $\quad y=\operatorname{sen}2x$

Tema 6

Probabilidad

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades nació en 1652 en la correspondencia mantenida entre el Caballero De Meré y el filósofo, matemático e inventor Blas Pascal (1623-1662) a propósito del juego de dados. Y aún en nuestros días sigue presentándose tal teoría utilizando naipes y monedas. Sin embargo, sería un error pensar que el cálculo de probabilidades se reduce a un juego. En la actualidad, cuando la *inferencia estadística* desempeña un papel fundamental en las ciencias sociales, conviene saber que para obtener conclusiones válidas para una población a partir de los datos de una muestra es necesario utilizar el concepto de probabilidad.

Como sabes, existen *situaciones deterministas,* en las que las condiciones iniciales determinan los resultados, y *situaciones aleatorias,* en las que iguales condiciones pueden dar lugar a diferentes resultados; así, mientras que podremos asegurar que si sueltas una maceta por el balcón al poco tiempo se habrá estrellado contra el suelo (o contra algún peatón), en cambio, si lanzas una moneda al aire resultará imposible predecir si saldrá *cara* o *cruz*. Pues bien, llamaremos *experimento aleatorio* al que podamos realizar en igualdad de condiciones tantas veces como queramos, sin que sea posible predecir el resultado cada vez que vayamos a efectuar una prueba, y llamaremos *suceso*, provisionalmente, a cada uno de los resultados que pueden presentarse al realizar una prueba de un experimento aleatorio.

Es importante observar que cuando se realiza un gran número de pruebas los experimentos aleatorios presentan regularidades. Así, si tras efectuar varios ensayos de un experimento anotamos la *frecuencia relativa* de cierto suceso (cociente entre el número de veces que ha ocurrido tal suceso y el número de pruebas), y ello lo hacemos en repetidas ocasiones, puede comprobarse experimentalmente que *tal cociente tiende a estabilizarse en torno a un número fijo* al aumentar el número de pruebas. Tal hecho constituye la base del Cálculo de Probabilidades, "modelo matemático de las regularidades que se observan en las series de frecuencias correspondientes a los fenómenos aleatorios". Gracias a él podremos asignar a cada suceso de un experimento aleatorio un número que nos medirá la duda, o la certeza, de que tal suceso ocurrirá: su probabilidad.

2. SUCESOS

Definiciones

1. Fijado un experimento aleatorio, se llama *suceso elemental* a cada uno de los resultados que son posibles tras la realización de una prueba del experimento y admiten una forma única de realización.

> **Por ejemplo:** excluido que tras lanzar un dado pueda quedar apoyado sobre uno de sus vértices o aristas, un suceso elemental consistirá en obtener un *1*; lo designaremos por α_1; otro, en obtener un *2*, α_2; etc. No es suceso elemental obtener una puntuación impar, resultado que puede darse de tres formas diferentes.

2. Llamaremos *espacio muestral* de un experimento aleatorio, y representaremos por **E**, al conjunto de todos los sucesos elementales. Si el espacio muestral es numerable (se pueden contar sus elementos) se dirá *discreto;* en caso contrario, *continuo.*

> **Siguiendo con el ejemplo:** El espacio muestral, discreto, correspondiente al lanzamiento de un dado será: $\mathbf{E} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

3. Llamaremos *suceso* a cualquier conjunto de sucesos elementales, es decir, a cualquier subconjunto de **E**, incluidos tanto él mismo como el subconjunto vacío, **Ø**, o *suceso imposible.* Si un suceso elemental α forma parte del suceso **A**, escribiremos $\alpha \in \mathbf{A}$.

Otra vez el dado: El suceso **A** = { α_1, α_2 }, por ejemplo, consistirá en obtener un *1*, ó un *2*.

4. Diremos que *ha ocurrido un suceso* **A** siempre que haya ocurrido cualquiera de los sucesos elementales que lo forman. Por esta razón, a **E**, conjunto de todos los sucesos elementales, se le llama también *suceso seguro.*

Ejemplo (de espacio continuo)

Supongamos, lo cual es mucho suponer, que un autobús pasara por la parada exactamente cada 15 minutos. Un experimento aleatorio podría consistir en acudir a dicha parada y medir el tiempo que tardase en llegar el autobús. Se trataría de un experimento de espacio muestral continuo pues los sucesos elementales serían innumerables:

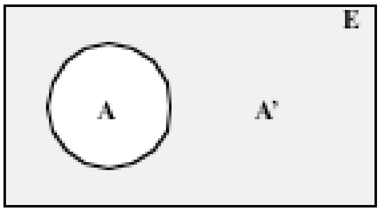
$$\mathbf{E} = \left\{ \alpha \in \Re \,/\, 0 \leq \alpha \leq 15 \right\}$$

(El ejemplo está traído por los pelos y adolece de los problemas propios de pretender ilustrar un concepto abstracto con una situación real. Además, **E** sería de tipo continuo sólo en teoría, porque en la práctica, y por muy preciso que fuera nuestro reloj, el conjunto de valores de α sería finito.)

Operaciones con sucesos

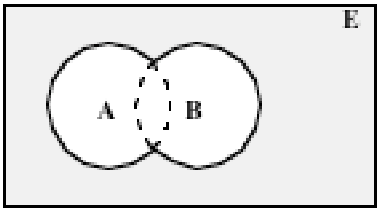
1. Considerado un experimento aleatorio, llamaremos *suceso contrario* de un suceso **A** al suceso, **A'**, consistente en que no ocurra **A**; es decir, **A'** es el conjunto formado por todos los sucesos elementales que no están en **A**.

Ejemplo: Supuesto que nos dedicásemos a lanzar un dardo a un blanco y que, por *malos* que fuésemos, siempre lo clavásemos en el rectángulo **E**, si el suceso **A** consistiera en clavar la flecha en el círculo, el suceso **A'** consistiría en clavar la flecha en la zona gris.



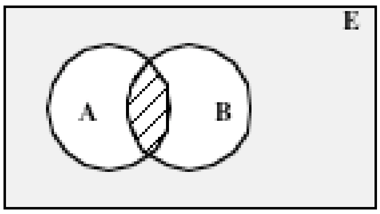
2. Se llama *unión de dos sucesos* **A** y **B** y se representa por $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ al suceso consistente en que uno al menos de ellos se realice; es decir, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ está formado por todos los sucesos elementales pertenecientes a uno al menos de los sucesos **A** o **B**.

Ejemplo: Sigamos con las flechas. Si el suceso **A** es el anterior y el suceso **B** el consistente en clavar la flecha en el correspondiente círculo, la unión de los sucesos **A** y **B** consistirá en clavar el dardo el cualquier punto del recinto en blanco

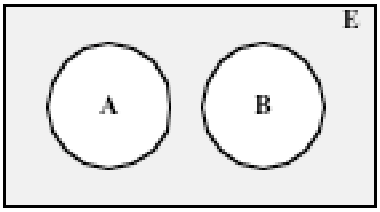


3. Se define la *intersección* de dos sucesos **A** y **B** y se representa por $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ como el suceso consistente en que se realicen tanto **A** como **B**; es decir, está formado por todos los sucesos elementales comunes a **A** y **B**.

Ejemplo: La intersección de los sucesos **A** y **B** de la figura consistirá en que la flecha quede clavada en cualquier punto de la zona rayada.



4. Dos sucesos **A** y **B** se dicen *incompatibles* si al ocurrir uno cualquiera de ellos no puede ocurrir el otro; es decir: **A** y **B** son incompatibles si y sólo si: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.



Ejemplo: Los sucesos **A** y **B** representados a la derecha, por seguir con el juego de los dardos, son incompatibles. No hay forma de clavar la flecha simultáneamente en ambos círculos; si acertamos en uno de los blancos no lo haremos en el otro.

5. Si **A** y **B** pueden ocurrir simultáneamente, o sea, si su intersección no es el suceso imposible, se dice que son *compatibles.*

Otro ejemplo

Sea el experimento aleatorio consistente en sacar una carta de una baraja española de 40 naipes y los sucesos: **A** = obtener una espada. **B** = obtener un caballo. Entonces:

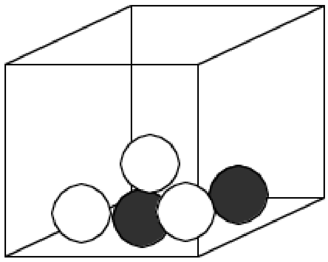
- **A'** consiste en sacar un oro, una copa o un basto.
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ consiste en sacar una espada o un caballo.
- **A** y **B** son sucesos compatibles.
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ consiste en obtener el caballo de espadas.

Observación: Cuando se estudian estos asuntos con más rigor ha de precisarse qué tipos de sucesos se pueden considerar, ya que si el espacio muestral es continuo, el conjunto de todos sus subconjuntos es demasiado amplio. Nosotros consideraremos sólo experimentos de espacio muestral finito y podremos tomar como suceso cualquier subconjunto de **E**.

3. PROBABILIDAD

Una experiencia previa

Dijimos en la introducción que para el estudio de los fenómenos aleatorios es importante considerar ciertas regularidades que aparecen tras efectuar un gran número de pruebas. Nosotros hemos realizado, con la ayuda de un ordenador, la siguiente experiencia.

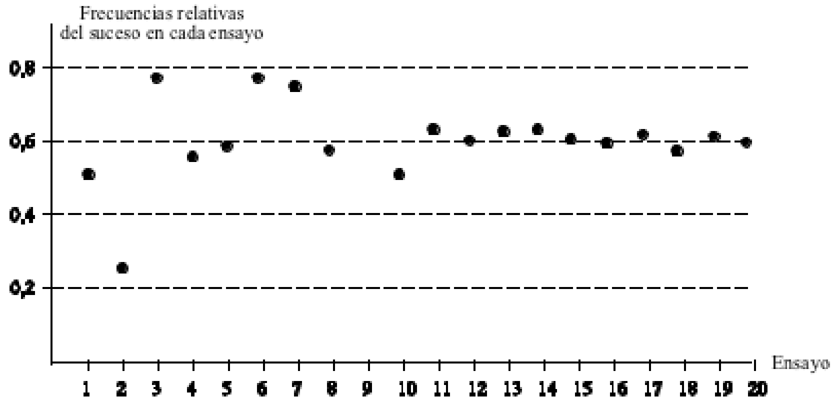


En una urna hemos colocado cinco bolas, iguales en todo, salvo en el color. Tres de ellas eran blancas y dos negras. A continuación hemos extraído una bola, hemos visto su color y la hemos devuelto a la urna. Y hemos repetido esa operación un total de 10 veces. Ha salido bola blanca en 5 ocasiones. Ése ha sido el primer *ensayo* o conjunto de pruebas.

El segundo conjunto de pruebas ha consistido en extraer bola, devolviéndola a la urna cada vez que se anotaba su color, 20 veces. Ha vuelto a salir bola blanca en 5 ocasiones. Lo hemos anotado.

En el tercer conjunto de pruebas hemos extraído bola 30 veces; en el cuarto, 40… en el décimo, 100, en el undécimo hemos sacado bola 200 veces, después 300, y así hasta el vigésimo ensayo, en el que hemos extraído una bola 2.000 veces. En esta última ocasión salió bola blanca 1.181 veces.

A continuación hemos calculado la frecuencia relativa del suceso *extraída una bola de la urna, es blanca,* en cada uno de los veinte ensayos. Es decir, hemos calculado el cociente entre el número de veces que ha salido bola blanca en cada ensayo y el número de extracciones de que dicho ensayo constaba. Por último, hemos representado dichas frecuencias relativas en el siguiente gráfico:



El gráfico muestra algo ya anunciado: *la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número fijo al aumentar el número de pruebas.* En tal verdad de carácter empírico, conocida como *ley de azar* —aunque quizás fuera mejor hablar de *hipótesis de azar,* por tratarse de algo indemostrable— tiene su base la Teoría de la Probabilidad. La probabilidad de un suceso constituirá una idealización del número al que hemos llamado frecuencia relativa. Convendrá por ello mencionar algunas propiedades de ésta, pues es razonable que en la definición de probabilidad se incluyan como exigencias lo que en el caso de la frecuencia relativa son propiedades fácilmente comprobables.

(Por cierto: El número al que tienden las frecuencias relativas de nuestra experiencia es 0'6, o sea, 3/5. Y recuerda que había tres bolas blancas de un total de cinco…)

Frecuencia relativa. Propiedades

Supongamos que tras efectuar N pruebas de un experimento aleatorio un suceso $\boldsymbol{A}$ ha ocurrido n_A veces. Se define la *frecuencia relativa de* $\boldsymbol{A}$ en dicha muestra de N pruebas mediante la igualdad:

$$f_r(A) = \frac{n_A}{N}$$

Como consecuencia de la definición anterior resulta que:

1. Para cualquier suceso **A** y cualquier número de pruebas:

$$0 \le f_r(A) \le 1$$

2. Si **E** es el suceso seguro:

$$f_r(\mathbf{E}) = 1$$

3. Si **B** es otro suceso, incompatible con A**,** que en las N pruebas ha ocurrido n_B veces:

$$f_r(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} = f_r(\mathbf{A}) + f_r(\mathbf{B})$$

Definición (de probabilidad)

Considerado un experimento aleatorio, llamaremos *probabilidad* de un suceso **A** a un número, $P(\mathbf{A})$, obtenido de tal manera que se cumpla:

$P(\mathbf{A}) \ge 0$, cualquiera que sea el suceso **A**.
$P(\mathbf{E}) = 1$, es decir, el suceso seguro ha de tener probabilidad igual a la unidad.
Si **A** y **B** son incompatibles, entonces: $P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B})$

Observaciones

1.- La primera de las condiciones anteriores se expresa a veces como $0 \le P(\mathbf{A}) \le 1$, que guarda una mayor semejanza con la correspondiente propiedad de la frecuencia relativa; como veremos, de las tres condiciones exigidas se deduce que $P(\mathbf{A}) \le 1$ (ningún suceso puede tener probabilidad mayor que 1), por lo que no es necesario imponer dicho requisito expresamente.

2.- La probabilidad de un suceso, que es un número comprendido entre cero y uno, se expresa a menudo en forma de porcentaje, y así diremos que un suceso tiene una probabilidad del 80%, por ejemplo, queriendo decir que su valor es 0'8.

Propiedades de la probabilidad

Si hemos logrado asignar a cada suceso **A** de un experimento una probabilidad $P(\mathbf{A})$, se habrá de verificar:

$P(\varnothing) = 0$, o sea, el suceso imposible tiene probabilidad nula.
$P(\mathbf{A'}) = 1 - P(\mathbf{A})$, cualquiera que sea el suceso **A**.
Si **A** y **B** son compatibles, entonces: $P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B}) - P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

Observa que de la igualdad $P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{A'}) = 1$ se deduce que:

La probabilidad de cualquier suceso ha de ser menor o igual que 1.

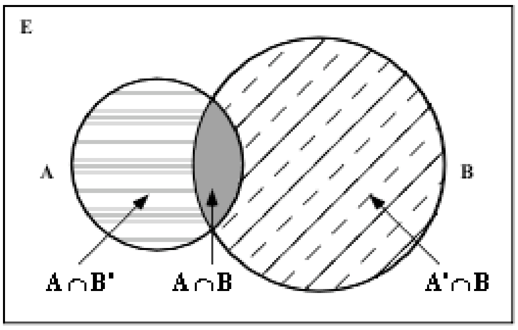
Las propiedades anteriores no son difíciles de demostrar:

• La primera se deduce de que cualquiera que sea el suceso **A**, como **A** y Ø son incompatibles, se tendrá: $P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A} \cup \varnothing) = P(\mathbf{A}) + P(\varnothing)$, luego: $P(\varnothing) = 0$

• La segunda es consecuencia de que siendo un suceso **A** y su contrario **A'** incompatibles y tales que: $\mathbf{A} \cup \mathbf{A'} = \mathbf{E}$, resulta: $1 = P(\mathbf{E}) = P(\mathbf{A} \cup \mathbf{A'}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{A'})$

• En cuanto a la tercera, se tiene:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B'})$$
$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$$
$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B'}) \cup (\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$$



y como $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B'})$ y $(\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$ son incompatibles dos a dos:

$$P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B'})$$
$$P(\mathbf{B}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + P(\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$$
$$P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B'}) + P(\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$$

Despejando en la primera igualdad $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B'})$; en la segunda $P(\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$, y llevando ambos valores a la tercera, resulta, finalmente:

$$P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B}) - P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

4. CÓMO ASIGNAR PROBABILIDADES

Llegados aquí, el paso siguiente es el más delicado: cómo asignar probabilidades. A tal fin pueden seguirse básicamente dos procedimientos, que dan lugar a las probabilidades llamadas *a posteriori* y *a priori*, respectivamente.

Probabilidades a partir de las frecuencias relativas

Este procedimiento, basado en la *hipótesis de estabilidad de las frecuencias relativas,* consiste en determinar experimentalmente las probabilidades de los sucesos anotando sus frecuencias relativas tras realizar un gran número de pruebas. Ese modo de proceder, único posible en la mayoría de las aplicaciones reales del cálculo de probabilidades, es normalmente correcto. Las probabilidades así obtenidas se llaman probabilidades *a posteriori.*

Ejemplo

Coge una chincheta y lánzala al aire primero en una tanda de 10 lanzamientos, luego en otra de 20, después, de 30… veces y anota la frecuencia relativa, en cada grupo de lanzamientos, del suceso consistente en que quede con la punta hacia arriba. Haz la gráfica de esas frecuencias relativas. ¿Se aproximan éstas cada vez más a algún número? ¿Cuál dirías que es la probabilidad de dicho suceso?

Probabilidades a partir de casos igualmente probables: Ley de Laplace

Este segundo procedimiento, limitado a experimentos en los que el espacio muestral **E** está formado por **n** sucesos elementales:

$$\mathbf{E}=\left\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3...\ \alpha_n\right\}$$

consiste en admitir el llamado *postulado de indiferencia*, esto es, en aceptar que no existiendo ninguna razón que favorezca la realización de uno de los sucesos elementales respecto de los otros, todos ellos son *equiprobables:*

$$P(\alpha_1)=P(\alpha_2)=P(\alpha_3)=...=P(\alpha_n)$$

Aceptada tal hipótesis, como los sucesos α_i son incompatibles dos a dos y, además:

$$\mathbf{E}=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3\cup...\cup\alpha_n$$

resulta:

$$P(\mathbf{E})=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+P(\alpha_i)+...+P(\alpha_n)=1$$

y, por consiguiente:

$$P(\alpha_i)=\frac{1}{n}$$

Considerado, ahora, un suceso **A**, bastará con determinar los h sucesos elementales que lo formen (podemos suponer que son $\alpha_1,\alpha_2...\alpha_h$): $\mathbf{A}=\left\{\alpha_1,\alpha_2...\alpha_h\right\}$ para poder escribir:

$$P(\mathbf{A})=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_h)=\frac{h}{n}$$

La probabilidad de un suceso vendrá dada por el *cociente entre el número de casos favorables a la verificación de dicho suceso y el número de casos posibles,* que es la clásica *Regla de Laplace.* (De una probabilidad así calculada se dice que es una probabilidad *a priori* porque para ser establecida no necesita de experimentación previa).

Regla de Laplace: Probabilidad de un suceso $= \dfrac{\text{Núm. de casos favorables}}{\text{Núm. de casos posibles}}$

Ejemplos

1.- Lanzamos un dado. Considerados los seis sucesos elementales α_i, donde α_i consiste en obtener **i** puntos, se tendrá: $P(\alpha_i) = \dfrac{1}{6}$. Entonces, si el suceso **A** consiste, por ejemplo, en obtener *puntuación impar,* se tendrá:

$$P(\mathbf{A}) = P(\alpha_1 \cup \alpha_3 \cup \alpha_5) = P(\alpha_1) + P(\alpha_3) + P(\alpha_5) = \frac{3}{6}$$

resultado al que también hubiéramos llegado dividiendo el número de casos favorables a la obtención de puntuación impar entre el número de casos posibles.

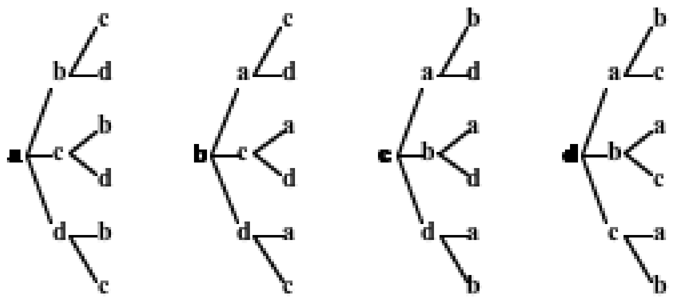
2.- Lanzamos al aire tres monedas. Los casos posibles son ocho. Los casos favorables a obtener 2 caras, son tres. La probabilidad de obtener dos caras será, por consiguiente 3/8.

5. ALGO DE COMBINATORIA

La aplicación de la regla de Laplace se ve facilitada si se manejan con soltura algunos conceptos de combinatoria ya estudiados en otros cursos. Los recordamos brevemente en lo que sigue, pero con el consejo de que para resolver un problema de probabilidad, más que de utilizar fórmulas irreflexivamente, trates de hacer un razonamiento específico para el caso del que se trate.

Variaciones sin repetición

Supongamos que disponiendo de cuatro elementos distintos: **a**, **b**, **c** y **d**, quisiéramos formar tantos grupos como fuera posible con tres de ellos, considerando distintos dos de tales grupos cuando, aun constando de los mismos elementos, éstos se hallaran en distinto orden. Una forma de proceder sería construir el siguiente *diagrama en árbol:*



Tendríamos entonces las variaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3. Su número se representa por $V_{4,3}$ y, como se observa:

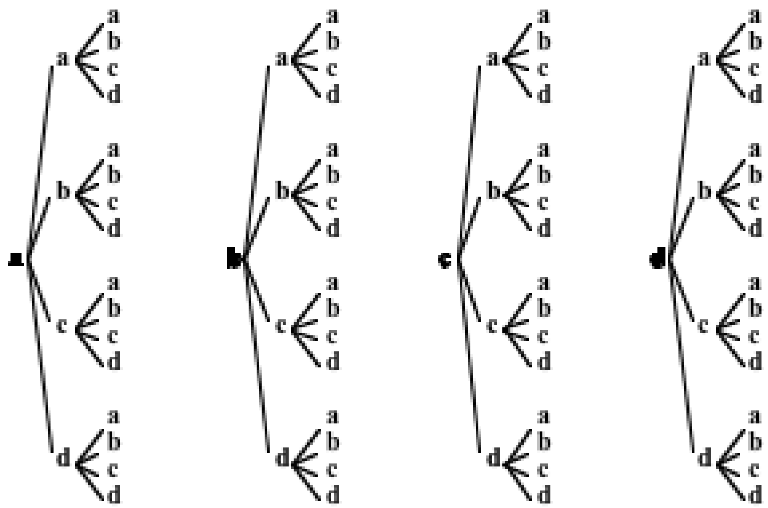
$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

En general, si disponiéndose de ***m*** elementos distintos entre sí se forman todos los grupos posibles con ***n*** de dichos elementos (supuesto $m \geq n$), considerando dos grupos diferentes cuando difieren en algún elemento o en el orden en que éstos aparecen, se obtienen las llamadas *variaciones de orden **n** de los **m*** elementos. Su número es:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

Variaciones con repetición

Supongamos que disponiendo de cuatro elementos distintos: **a**, **b**, **c** y **d**, quisiéramos formar tantos grupos como fuera posible con tres de ellos, *pudiéndose repetir los elementos* y considerando distintos dos de tales grupos cuando, aun constando de los mismos elementos, éstos se hallaran en distinto orden. Una forma de proceder sería construir el siguiente *diagrama en árbol:*



Tendríamos entonces las variaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3. Su número se representa por $VR_{4,3}$ y, como se observa:

$$VR_{4,3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

En general, si disponiéndose de ***m*** elementos se forman todos los grupos posibles con ***n*** de dichos elementos, pudiéndose éstos repetir y considerando dos grupos diferentes cuando difieren en algún elemento o en el orden en que éstos aparecen, se obtienen las llamadas *variaciones con repetición de orden **n** de los **m*** elementos. Su número es:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Permutaciones sin repetición

A las *variaciones sin repetición de orden m de m elementos* (en cada una aparecen todos los elementos y sólo se distinguen en el orden en que éstos aparecen) suele llamárselas *permutaciones de m elementos*, utilizándose el símbolo $\mathbf{P_m}$ para indicar su número:

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

producto que también se representa por **m!** *(factorial de m).*

(En el caso particular de que m = 0, se define 0! = 1).

Combinaciones sin repetición

Hasta ahora el orden en el que aparecían los elementos de un grupo influía en el resultado final; y así, por ejemplo, AMOR y ROMA son palabras distintas aunque estén formadas por las mismas letras. Pero no siempre sucede eso: Si las letras **a**, **b**, **c** y **d** representan cuatro preguntas de un examen, de las que hay que elegir tres, daría lo mismo elegir las preguntas **a**, **b** y **c** que las **c**, **a** y **b**, o las **c**, **a** y **b**, etc. Es decir, las 6 variaciones de cuatro elementos tomados de tres en tres: **abc**, **acb**, **bac**, **bca**, **cab**, **cba** quedan reducidas a una sola. El número total de grupos que podrían formarse con este nuevo criterio sería el resultado de dividir $V_{4,3}$ entre 6; es decir, entre P_3.

Llamaremos *combinación de **m** elementos tomados de **n** en **n*** a cada uno de los grupos que pueden formarse con **n** de entre los **m** elementos (supuesto $m \geq n$), considerándose dos grupos diferentes sólo si se distinguen en algún elemento. Su número, al que representaremos por $C_{m,n}$, viene dado por la igualdad:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Es fácil comprobar —basta con multiplicar numerador y denominador por $(m-n)!$— que el cociente anterior puede expresarse de esta otra forma, conocida como *número combinatorio m sobre n:*

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Ejemplo

En la Lotería Primitiva hay que acertar 6 números de entre 49. Para asegurarse el primer premio hay que efectuar *sólo* $C_{49,6}$ apuestas, o sea, 13.983.816

6. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Los conceptos de probabilidad condicionada y de independencia estocástica son de importancia capital en la teoría de probabilidades. Para definir la probabilidad condicionada procederemos de forma semejante a como hicimos al definir la probabilidad: nos apoyaremos en las propiedades de las frecuencias relativas. Adelantemos que si con la probabilidad simple lo que pretendíamos era *medir la duda o la certeza* de que se produjera un suceso sin más, con la probabilidad condicionada lo que intentaremos medir será la *duda* (o la certeza) de que ese suceso se verifique, supuesto que se haya verificado otro.

Cuestión previa

Supongamos que tras efectuar N pruebas de un experimento aleatorio, cierto suceso **A** ha ocurrido n_A veces y, de entre esas n_A veces que ha ocurrido A, otro suceso B ha ocurrido n_{AB} veces. Se tendrá:

$$f_r(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{n_{AB}}{N} = \frac{n_{AB}}{n_A} \cdot \frac{n_A}{N} = \frac{n_{AB}}{n_A} \cdot f_r(\mathbf{A})$$

Es decir:

$$\frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{f_r(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{f_r(\mathbf{A})}$$

cociente que mide la frecuencia relativa con la que ocurre **B**, en relación con el número total de veces en que ocurre **A**. De dicho cociente surge el concepto de probabilidad condicional.

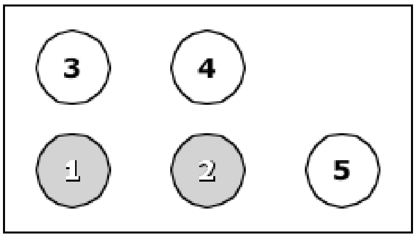
Probabilidad condicional

Considerados un experimento aleatorio y uno de sus sucesos, **A**, al que corresponde una probabilidad $P(\mathbf{A}) > 0$, llamaremos *probabilidad condicional de otro suceso, **B**, respecto del suceso **A***, al número:

$$\boxed{P(\mathbf{B} / \mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})}}$$

Ejemplos

1.- Supongamos que de la urna de la figura extraemos una bola. Vamos a considerar los siguientes sucesos y sus probabilidades:



A: La bola extraída es *par*. $P(\mathbf{A}) = \frac{2}{5}$

B: La bola extraída es *blanca*. $P(\mathbf{B}) = \frac{3}{5}$

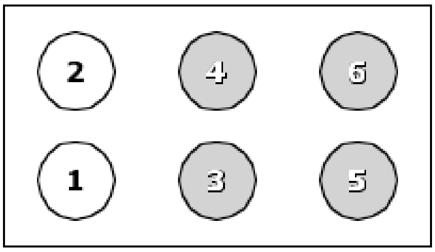
Antes de saber si la bola elegida es *par* o *impar*, la probabilidad que asignamos a que sea *blanca* es 3/5. Pero supongamos que ya supiéramos que la bola elegida es *par*. En ese caso, parece razonable que la probabilidad que le asignásemos al suceso *la bola es blanca* fuera 1/2 y no 3/5. Notemos que:

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$$

Como vemos, $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \neq P(\mathbf{B})$, por lo que diremos que ***A* y *B* son dependientes.**

[Es fácil probar que, en este caso, también es $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) \neq P(\mathbf{A})$]

2.- Supongamos ahora que la composición de la urna fuera ésta otra. Entonces:



A: La bola extraída es *par*. $P(\mathbf{A}) = \frac{3}{6}$

B: La bola extraída es *blanca*. $P(\mathbf{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

En este caso: $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$

Al ser $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = P(\mathbf{B})$ diremos que los sucesos ***A* y *B* son independientes.**

[Es fácil probar que, en tal caso, también es $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})$]

Probabilidad compuesta

La fórmula de la probabilidad condicional de un suceso **B** respecto de otro **A**:

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})}$$

puede ser escrita de esta otra forma:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A})$$

expresión llamada *fórmula de la probabilidad compuesta.*

Para el caso de tres sucesos se tendría:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = P([\mathbf{A} \cap \mathbf{B}] \cap \mathbf{C}) = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cdot P[\mathbf{C}/(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] = P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \cdot P[\mathbf{C}/(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})]$$

Y para el caso de cuatro sucesos se llegaría a:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{D}) == P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \cdot P[\mathbf{C}/(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})] \cdot P[\mathbf{D}/(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})]$$

procediéndose de forma semejante para cuando fueran cinco, seis sucesos, etcétera.

Sucesos dependientes e independientes

Hemos visto antes que si **A** y **B** son sucesos de un cierto experimento aleatorio, en general es $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \neq P(\mathbf{B})$, $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) \neq P(\mathbf{A})$ y se dice que **A** y **B** son sucesos dependientes.

Se tendrá, recordemos: $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B}/\mathbf{A})$

Por el contrario, si $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = P(\mathbf{B})$ y $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})$ diremos que **A** y **B** son sucesos independientes.

En este caso: $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) \cdot P(\mathbf{B})$

En general, diremos que **n** sucesos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ … $\mathbf{A_n}$ son *mutuamente independientes* si la probabilidad de que se verifiquen simultáneamente cualquier número de ellos es igual al producto de sus probabilidades respectivas.

7. PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

Ejemplo

Celebradas elecciones en una ciudad, los partidos X_1, X_2 y X_3 obtuvieron el 40%, el 35% y el 25%, respectivamente, de los concejales. Se sabe que la probabilidad de que un miembro del partido X_1 sea mujer es 0,3; la de que lo sea alguien del partido X_2, 0,2; y la de que lo sea alguien del partido X_3, 0,4. Se celebra la primera sesión del ayuntamiento y hay que elegir por sorteo un concejal para que la presida. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte elegida una mujer?

Considerados los sucesos: **B**: *La persona elegida es mujer,* $\mathbf{A_i}$: *La persona elegida pertenece al partido X_i* (i = 1, 2, 3), se tiene:

$$P(\mathbf{A}_1) = \frac{40}{100} \qquad P(\mathbf{A}_2) = \frac{35}{100} \qquad P(\mathbf{A}_3) = \frac{25}{100}$$

$$P(\mathbf{B}/\mathbf{A_1}) = 0{,}3 \qquad P(\mathbf{B}/\mathbf{A_2}) = 0{,}2 \qquad P(\mathbf{B}/\mathbf{A_3}) = 0{,}4$$

Por otra parte, los sucesos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$, incompatibles dos a dos, cumplen:

$$\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 = \mathbf{E} \text{ (suceso seguro)}$$

Además, $\mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{E}$, luego:

$$P(\mathbf{B}) = P[\mathbf{B} \cap (\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3)] = P[(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_1) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_2) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_3)]$$

y al ser los sucesos $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_i$ incompatibles dos a dos:

$$P(\mathbf{B}) = P(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_1) + P(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_2) + P(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_3)$$

Por último, aplicando la fórmula de la probabilidad compuesta:

$$P(\mathbf{B}) = P(\mathbf{B}/\mathbf{A_1}) \cdot P(\mathbf{A_1}) + P(\mathbf{B}/\mathbf{A_2}) \cdot P(\mathbf{A_2}) + P(\mathbf{B}/\mathbf{A_3}) \cdot P(\mathbf{A_3}) = \frac{29}{100}$$

Caso general

La fórmula anterior es generalizable al caso de **n** sucesos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ … $\mathbf{A_n}$, incompatibles dos a dos, tales que $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 \cup ... \cup \mathbf{A}_n = \mathbf{E}$. Siendo **B** otro suceso, se tendrá:

$$\boxed{P(\mathbf{B}) = P(\mathbf{B}/\mathbf{A_1}) \cdot P(\mathbf{A_1}) + P(\mathbf{B}/\mathbf{A_2}) \cdot P(\mathbf{A_2}) + P(\mathbf{B}/\mathbf{A_3}) \cdot P(\mathbf{A_3}) + ... + P(\mathbf{B}/\mathbf{A_n}) \cdot P(\mathbf{A_n})}$$

igualdad que se conoce como *fórmula de la probabilidad total.*

Teorema de Bayes

En las condiciones del ejemplo anterior, ¿cuál sería la probabilidad de que habiendo resultado elegida una mujer perteneciera al partido X2, es decir, $P(\mathbf{A}_2 / \mathbf{B})$? Se tendría:

$$P(\mathbf{A}_2 / \mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{B})} = \frac{P(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_2)}{P(\mathbf{B})} = \frac{P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_2) \cdot P(\mathbf{A}_2)}{P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_1) \cdot P(\mathbf{A}_1) + P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_2) \cdot P(\mathbf{A}_2) + P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_3) \cdot P(\mathbf{A}_3)} = \frac{7}{25}$$

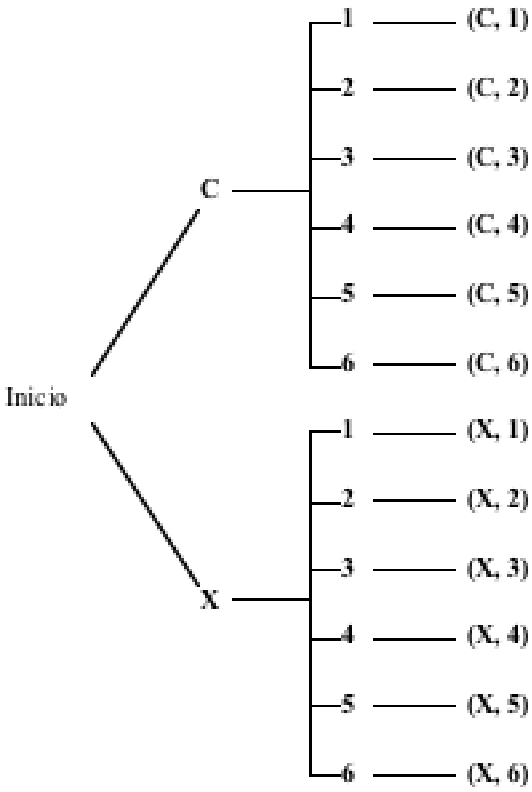
En el caso general de **n** sucesos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ … $\mathbf{A_n}$, incompatibles dos a dos y tales que $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 \cup ... \cup \mathbf{A}_n = \mathbf{E}$, siendo **B** otro suceso, se tendría

$$P(\mathbf{A}_\mathbf{i} / \mathbf{B}) == \frac{P(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_\mathbf{i})}{P(\mathbf{B})} = \frac{P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_\mathbf{i}) \cdot P(\mathbf{A}_\mathbf{i})}{P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_1) \cdot P(\mathbf{A}_1) + P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_2) \cdot P(\mathbf{A}_2) + ... + P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_\mathbf{n}) \cdot P(\mathbf{A}_\mathbf{n})}$$

La importancia de la igualdad anterior, conocida como *fórmula de Bayes* estriba en que mediante ella pueden calcularse probabilidades *a posteriori;* esto es, *probabilidades de lo que podrían considerarse las causas, conocidos los efectos.*

8. PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS SUCESIVOS

Hasta ahora sólo hemos considerado experimentos simples, que no pueden descomponerse en otros más sencillos. Pero a menudo un experimento consiste en la realización, uno tras otro, de varios experimentos más sencillos. Tal cosa sucede si, por ejemplo, lanzamos una moneda y, luego, un dado. Los espacios muestrales en estos casos pueden construirse mediante diagramas de árbol, como se ve en el siguiente diagrama:



¿Cómo asignar probabilidades a los sucesos de los experimentos compuestos?

Para responder, distinguiremos entre dos supuestos: que los experimentos simples que forman el experimento compuesto sean *físicamente* independientes o dependientes. Dedicaremos las siguientes líneas a precisar esta idea.

Experimentos independientes

Sea un experimento consistente en la realización sucesiva de otros dos experimentos, tales que el resultado que se produzca al realizar el primero de ellos **no modifique las condiciones** en que se efectúa el segundo. Y sean **E** y **F** los correspondientes espacios muestrales. Pues bien:

Si (α,β) es un suceso elemental correspondiente al experimento compuesto, tomaremos como base la fórmula de la probabilidad compuesta para sucesos independientes para establecer como probabilidad de (α,β):

$$P(\alpha,\beta) = P(\alpha)\cdot P(\beta)$$

En el ejemplo anterior, al tratarse de experimentos independientes, en tanto que el resultado del lanzamiento de la moneda no influye en las condiciones en que se efectúa el lanzamiento del dado, se tendría, pongamos por caso:

$$P(\mathbf{C},\mathbf{5}) = P(\mathbf{C})\cdot P(\mathbf{5}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

La probabilidad de un suceso que consista en la realización de varios sucesos elementales del experimento compuesto la calcularemos como hasta ahora, sumando las probabilidades de cada uno de dichos sucesos elementales. Así, en nuestro ejemplo:

$$P[(\mathbf{C},\mathbf{3}),(\mathbf{X},\mathbf{3}),(\mathbf{X},\mathbf{6})] = P(\mathbf{C})\cdot P(\mathbf{3}) + P(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{3}) + P(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{6}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+ = \frac{1}{4}$$

Si uno o los dos sucesos que forman el suceso del experimento compuesto no son elementales, el problema se resuelve expresando tal suceso como unión de los oportunos sucesos elementales. En nuestro ejemplo, la probabilidad de obtener cara y puntuación impar, pongamos por caso, sería:

$$P[(\mathbf{C},\mathbf{3}),(\mathbf{X},\mathbf{3}),(\mathbf{X},\mathbf{6})] = P(\mathbf{C})\cdot P(\mathbf{3}) + P(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{3}) + P(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{6}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

Observa que esta probabilidad coincide con el producto de las probabilidades de uno y otro suceso por separado:

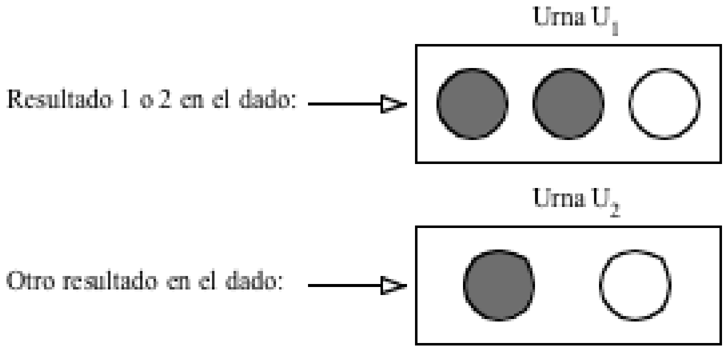
$$P(\mathbf{C},\text{puntuación impar}) = P(\mathbf{C})\cdot P(\text{puntuación impar}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

Experimentos dependientes

Cuando en un experimento compuesto de otros dos el resultado del primero sí modifique las condiciones en que se efectúa el segundo, procederemos de forma semejante a la anterior, pero tomando como base la fórmula de la probabilidad compuesta para sucesos dependientes, entendiendo la probabilidad condicional en el segundo experimento como la probabilidad de que habiendo ocurrido cierto suceso en el primer experimento, en el segundo ocurra otro. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo

Se tienen un dado y dos urnas. En la primera, $\mathbf{U_1}$, hay 2 bolas negras (N) y 1 bola blanca (B); en la segunda, $\mathbf{U_2}$, 1 bola negra y otra blanca. El experimento que vamos realizar consiste en lanzar el dado, en primer lugar, y observar su puntuación. Si sale un *1* ó un *2*, (suceso $\mathbf{A_1}$), extraeremos una bola de $\mathbf{U_1}$. Si la puntuación obtenida es superior a 2 (suceso $\mathbf{A_2}$), la bola la extraeremos de $\mathbf{U_2}$:



Como la probabilidad de que la bola que se extraiga sea blanca o negra se modifica según sea la puntuación obtenida tras lanzar el dado, se trata de experimentos dependientes. Las probabilidades condicionadas, de acuerdo con la regla de Laplace, serán:

$$P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_1) = \frac{1}{3}; \quad P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_2) = \frac{1}{2}; \quad P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_1) = \frac{2}{3}; \quad P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_2) = \frac{1}{2}$$

donde $P(\mathbf{B} / \mathbf{A}_1)$, por ejemplo, es la probabilidad de que habiéndose obtenido un *1* ó un *2* al lanzar el dado y, en consecuencia, habiendo extraído una bola de U_1, ésta sea blanca.

Llegados aquí, las probabilidades que pueden interesar son de uno de estos dos tipos:

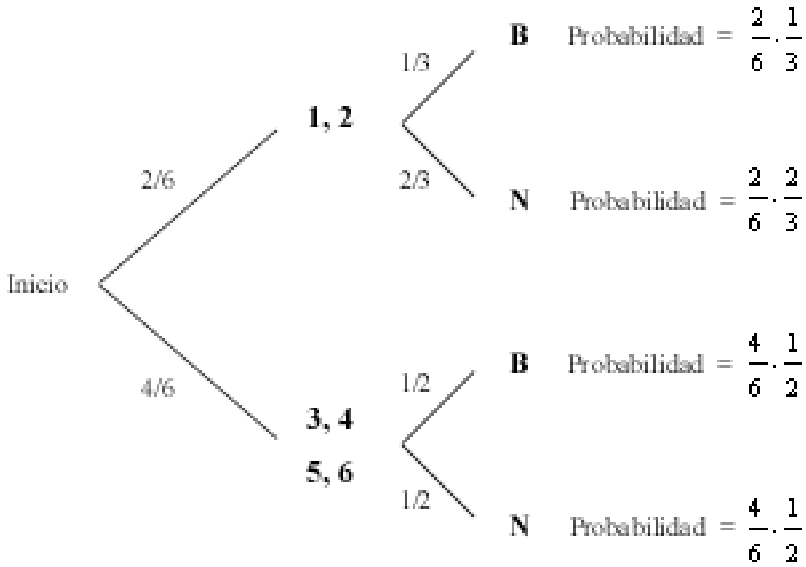
1.- Probabilidad de obtener una puntuación igual a *1* ó *2* y *bola negra*, por ejemplo Bastaría con que calculásemos:

$$P(\mathbf{A}_1, \mathbf{N}) = P(\mathbf{A}_1) \cdot P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

2.- Probabilidad de que la bola extraída sea negra, también por ejemplo. Basándonos en la fórmula de la probabilidad total, escribiríamos:

$$P(\mathbf{N}) = P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_1) \cdot P(\mathbf{A}_1) + P(\mathbf{N} / \mathbf{A}_2) \cdot P(\mathbf{A}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

Si prefiriésemos ayudarnos de diagramas de árbol observaríamos que para calcular $P(\mathbf{B})$, por ejemplo, *bastaría con sumar las probabilidades de llegar a **B** por todos los caminos posibles.*



Observaciones finales

Lo dicho líneas atrás es fácilmente generalizable al caso de experimentos compuestos de más de dos experimentos simples. Y, en particular, al caso, bastante frecuente, de que el experimento que efectuemos consista en realizar repetidamente un mismo experimento simple. El caso más común puede ser el de la extracción, una tras otra, de varias bolas de una urna. Según se trate de *extracciones con devolución* (cada bola extraída se reintegra a la urna antes de extraer la siguiente) o *sin devolución*, estaremos ante una composición de experimentos independientes o dependientes.

Así, por ejemplo, si de una urna en la que hay 4 bolas blancas (B), 2 rojas (R) y 6 negras (N), se extraen una tras otra, *con devolución,* tres bolas, la probabilidad de (R, B, B) será:

$$P(\mathrm{R, B, B}) = P(\mathrm{R}) \cdot P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{B}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12}$$

En cambio, si la extracciones se hicieran *sin devolución*, la probabilidad de ese mismo suceso sería:

$$P(\mathrm{R, B, B}) = P(\mathrm{R}) \cdot P(\mathrm{B/R}) \cdot P[\mathrm{B/(R,B)}] = \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10}$$

Añadiremos, para finalizar, que el experimento que consiste en extraer una tras otra varias bolas de una urna, sin devolución, o varias cartas de una baraja, también sin devolución, es equivalente, a todos los efectos, al consistente en sacar simultáneamente dichas bolas o dichos naipes.

7. EJERCICIOS

1.- Se extrae una carta de una baraja española y se consideran los sucesos: **A** = Sale una sota. **B** = Sale una espada. Di qué sucesos elementales forman los sucesos:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}\,,\ \mathbf{A'} \cap \mathbf{B}\,,\ \mathbf{A} \cap \mathbf{B'}\,,\ \mathbf{A} \cup \mathbf{B'}$$

2.- **A** y **B** son tales que $P(\mathbf{A}) = \frac{3}{4}$, $P(\mathbf{B'}) = \frac{2}{3}$, $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{1}{4}$. Halla $P(\mathbf{A'})$ y $P(\mathbf{A'} \cap \mathbf{B})$.

3.- Se lanzan 2 dados. Siendo **A** el suceso *la suma de puntos es par* y **B** el *al menos se obtiene un uno,* calcula $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$.

4.- Un jugador empedernido se dirigió a Galileo extrañado de que al lanzar tres dados la suma *10* apareciera con más frecuencia que la *9,* cuando, según él, los casos favorables a la suma *9* serían seis (126, 135, 144, 225, 234, 333) y los favorables a *10* (136, 145, 226, 235, 244, 334) también serían seis. ¿Qué opinas tú sobre eso?

5.- De una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras se extraen simultáneamente 3 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean blancas? ¿Y de que sean de distinto color? ¿Y la de que dos sean rojas y la otra negra?

6.- Un profesor distraído escribe tres cartas a tres amigos diferentes y, al introducirlas en los sobres, lo hace al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de sus amigos reciba su carta? ¿Y la de que ninguno reciba la suya?

7.- En cierto país, la probabilidad de que un hombre de 25 años llegue a los 75 años es de 0,8. Calcula la probabilidad de que si elegimos tres hombres de 25 años de dicho país: **a)** Sólo uno llegue a los 75 años. **b)** Al menos uno llegue a los 75 años.

8.- De una baraja española de 40 naipes se extraen simultáneamente 3 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo?

9.- ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando una moneda 12 veces salga al menos una cara? ¿Y la de lograr 12 caras o 12 cruces?

10.- Calcula la probabilidad de que en un grupo de diez personas haya dos, al menos, que cumplan años el mismo día.

11.- De una urna en la que hay cuatro bolas blancas y seis negras se extraen una tras otra, con devolución, cinco bolas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres blancas?

12.- Una caja contiene cinco lámparas eléctricas, de las que dos están defectuosas. Si probamos una tras otra hasta localizar las dos defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de suspender el proceso en la tercera prueba?

13.- El problema que el Caballero de Meré propuso a Pascal consistía, más o menos, en averiguar cuántas veces había que lanzar un par de dados para que la probabilidad de obtener un *6* doble fuera mayor que la de no obtenerlo. ¿Cuál es la respuesta?

14.- Se tiene una baraja española de 40 naipes y se extraen uno tras otro, sin devolución, tres de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as, un rey y otro as, en ese orden?

15.- Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos blancas y una roja?

16.- Un examen consiste en elegir al azar 2 temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos. Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen? ¿Qué probabilidad tiene de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

17.- Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad igual a 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.

18.- Calcula la probabilidad de que un lanzador de arco acierte en un blanco, sabiendo que puede hacer tres intentos y que la probabilidad de acierto en cada intento es 0'25.

19.- Un alumno hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide: **a)** Probabilidad de que pase al menos una prueba. **b)** Probabilidad de que no pase ninguna prueba. **c)** ¿Son las pruebas sucesos independientes? **d)** Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

20.- Las probabilidades que tienen tres personas de resolver cierto problema de probabilidades son 1/3, 1/4 y 1/5, respectivamente. Calcula la probabilidad de que, propuesto tal problema a las tres personas: **a)** el problema sea resuelto; **b)** el problema sea resuelto exactamente por dos personas.

21.- El 30% de las ratas inyectadas con una sustancia mueren antes de los 2 días, y el 60% sobreviven 3 días. Calcula la probabilidad de que una rata que ha sobrevivido 2 días sobreviva 3 días.

22.- Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas. **a)** Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca? **b)** Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

23.- En cierto curso de inglés se han matriculado el doble de chicas que de chicos. Sabiendo que el 25% de las mueres fuman y que no lo hace el 60% de los varones, determina la probabilidad de que seleccionada al azar una persona de ese curso sea fumadora.

24.- Una urna contiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color? ¿Y la de que sean del mismo color?

25.- Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna B tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas. Halla la probabilidad dad de que la urna elegida haya sido la A.

26.- Se dispone de 3 urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas. **a)** Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean rojas? **b)** Si las dos bola extraídas son rojas, ¿cuál es la probabilidad de que procedan de la urna B?

27.- Una urna contiene tres bolas blancas y cinco negras. Otra, dos bolas blancas y tres negras. Se extrae una bola de la primera urna, se introduce en la segunda y, a continuación, se extrae bola de ésta última. Calcula la probabilidad de que esta bola sea blanca. ¿Y si la primera bola se hubiera extraído de la segunda urna y la segunda de la primera?

28.- En cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar: **a)** Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños? **b)** Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños? **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

29.- En un país, el 12% de la población padece cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

30.- En tres máquinas, *A*, *B* y *C*, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%. Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina *A*?

31.- Una caja *A* contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja *B* contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de *A* a *B* y después se extrae una bola de *B*, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.

32.- Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna B, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la B.

33.- Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.

34.- Sean *A* y *B* dos montones de cartas. En *A* hay ocho *oros* y cinco i y, en *B*, cuatro *oros* y siete *espadas*. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son *espadas*. Halla la probabilidad de que las hayamos sacado del montón *B*.

35.- El 60% de los alumnos de un instituto son chicas. Fuman el 40% de las chicas y el 30% de los chicos. Se ve a cierta persona en unos lavabos, escondiéndose para la práctica de tan nefasto vicio. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

36.- Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes, etc.)? ¿Y la de que hayan nacido en el mismo mes?

37.- Dos jugadores (*A* y *B*) inician cierto juego con 3 € cada uno. Al finalizar cada partida, el ganador recibe 1 € del perdedor. Sabiendo que *A* tiene probabilidad 0,6 de ganar cada partida y que el juego finaliza cuando alguno de los dos se queda sin dinero, **a)** ¿cuál es la probabilidad de que *A* tenga 200 € tras jugar 2 partidas? **b)** ¿cuál es la probabilidad de que *A* tenga 4 € tras jugar 3 partidas? **c)** ¿cuál es la probabilidad de finalizar el juego tras jugar 3 partidas?

38.- A partir de la información recogida en el censo municipal de cierta ciudad, se ha determinado que un 40% de sus residentes tienen menos de 30 años, y que un 5% del total de personas con menos de 30 años, tienen menos de 10 años. Si se elige al azar una persona en dicha ciudad y denotamos por X su edad en años cumplidos obtén: **a)** $P(X \geq 10)$ **b)** $P(10 \leq X < 30)$.

39.- En una empresa figuran en nómina un total de 1000 personas, de las cuales 350 son mujeres. Sabiendo que los transportes públicos son utilizados para acudir al trabajo, por un 40 % de los varones, y no son utilizados por el 25 % de las mujeres, obtén la probabilidad de que elegida al azar una persona en dicha empresa, resulte ser usuaria de los transportes públicos para acudir a su trabajo.

40.- El personal de cierta empresa está constituido por un 60% de personal obrero, un 25% de personal técnico, siendo el resto personal administrativo. A todos los trabajadores de dicha empresa se les pregunta si estarían dispuestos a admitir una reducción en el número de horas semanales de trabajo con la consiguiente disminución económica en su nómina. Contesta afirmativamente un 40% del personal obrero, un 30% del personal técnico y un 60% del personal administrativo. Si seleccionamos al azar un trabajador en esa empresa, determina la probabilidad de que: a) Haya contestado afirmativamente. b) Pertenezca al personal administrativo y haya contestado negativamente.

41.- El equipo directivo de cierta empresa del sector de la hostelería está constituido por 25 personas, de las que un 60% son mujeres. El gerente tiene que seleccionar a una persona de dicho equipo para que represente a la empresa en un certamen internacional. Decide lanzar una moneda; si sale cara selecciona a una mujer y si sale cruz a un hombre. Sabiendo que 5 mujeres y 3 hombres del equipo directivo no hablan inglés, determina la probabilidad de que la persona seleccionada hable inglés.

42.- En un laboratorio se estudia el comportamiento de ciertos ratones ante una vacuna. El 60% de los ratones son machos y el resto hembras. Por experiencias anteriores se sabe que la probabilidad de que uno de los ratones macho reaccione ante la vacuna es 0,25, y la de que reaccione una hembra 0,4. Se elige un ratón al azar y se comprueba que no ha reaccionado ante la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hembra?

43.- En un estudio realizado en cierta universidad se ha determinado que un 20% de sus estudiantes no usan los transportes públicos para acudir a sus clases y que un 65% de los estudiantes que utilizan los transportes públicos también hacen uso del comedor universitario. Calcula la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante en esa universidad resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

44.- Una empresa dedicada a la fabricación de componentes eléctricas somete su producción a un control de calidad. En el proceso de control la componente ha de superar tres controles (C_1, C_2 y C_3, en ese orden). El control C_1 la rechaza con probabilidad 0,15 o la pasa al control C_2, quien a su vez la rechaza en el 7% de los casos o la pasa al control C_3. Finalmente, en C_3 se rechaza con probabilidad 0,02 o se etiqueta como correcta. Determina la probabilidad de que una componente eléctrica seleccionada al azar en la producción de dicha empresa, sea rechazada.

45.- El ganado ovino de una región es sometido a un control sanitario para comprobar que está libre de cierta enfermedad infecciosa. En el proceso de control cada animal es sometido a las pruebas P_1, P_2 y P_3 (en ese orden). Por la experiencia se sabe que en el 95% de los casos P_1 da resultado negativo, que 10 de cada 100 ovejas sometidas a P_2 dan resultado positivo y que, con probabilidad 0,03, P_3 da resultado positivo. Sabiendo que si una prueba da resultado positivo el animal es sacrificado, determina la probabilidad de que una oveja sometida a dicho proceso de control no sea sacrificada.

46.- Los hábitos de estudio de un estudiante son: si estudia una noche, con probabilidad 0,25 lo hace la noche siguiente y, si no estudia una noche, con probabilidad 0,6 lo hace la noche siguiente. Cierto lunes por la noche lanza un dado y si sale 4 ó 6 estudia. Teniendo en cuenta sus hábitos de estudio ¿qué probabilidad hay de que estudie el miércoles siguiente por la noche?

Tema 8

Distribuciones binomial
y
normal

1. INTRODUCCIÓN

En el curso pasado estudiaste las series o distribuciones estadísticas: Se consideraba una variable estadística, se observaba qué valores tomaba en una muestra y a partir de esos datos se construía la correspondiente distribución de frecuencias. En ella se calculaban parámetros como la media y la desviación típica, que resumían en pocas *palabras* dicha distribución. Si, por recurrir a un ejemplo sencillo, lanzábamos un dado un cierto número de veces y anotábamos las frecuencias de cada uno de los seis posibles resultados, teníamos la distribución de frecuencias para esa serie de lanzamientos. Pero, ante ese mismo dado, cabía otra actitud: la que consistía en definir una variable aleatoria cuyos valores fueran las posibles puntuaciones al arrojarlo y asignar a cada uno de esos valores, no sus frecuencias, porque no lanzaríamos el dado, sino sus respectivas probabilidades. A ese conjunto de valores de la nueva variable, acompañados de sus respectivas probabilidades, era a lo que llamábamos *distribución de probabilidad.*

Al estudiar las distribuciones de probabilidad se distinguía entre las *discretas* y las *continuas,* distinción que se basaba en que la variable aleatoria tomase un conjunto de valores numerable (normalmente finito) o innumerable. Entre las primeras, la más importante es la distribución binomial, con un buen número de aplicaciones de carácter práctico. Entre las segundas, la más importante es la distribución normal, a la cual se ajustan e fenómenos de carácter biológico, psicológico, económico, etc. Este tema lo dedicamos a hacer un somero repaso a lo que ya estudiaste en el curso pasado.

2. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Ejemplo

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas. Representando por C la obtención de *cara* y por + la de *cruz,* el espacio muestral es fácil de escribir:

E = { (+,+,+), (+,+,C), (+,C,+), (C,+,+), (+,C,C), (C,+,C), (C,C,+), (C,C,C)}

→ Pensemos, ahora, en una función, *X,* que a cada uno de los sucesos elementales anteriores le hiciera corresponder el número de *caras* de que consta:

$$X(+,+,+)=0 \quad X(+,+,C)=1 \quad X(+,C,+)=1 \quad X(C,+,+)=1 \quad X(+,C,C)=2 \quad X(C,+,C)=2 \quad X(C,C,+)=2 \quad X(C,C,C)=3$$

→ Entonces, identificando X con número de *caras,* expresiones del tipo $[X=k]$, $[X<k]$, $[X>k]$, donde k es un número real cualquiera, nos permitirían designar sucesos: los consistentes en que el número obtenido de caras fuera igual, menor o mayor que k, respectivamente. A estos sucesos, sin más que aplicar la regla de Laplace, podríamos asignarles sus probabilidades. En particular:

$$P[X=0]=\frac{1}{8} \qquad P[X=1]=\frac{3}{8} \qquad P[X=2]=\frac{3}{8} \qquad P[X=3]=\frac{1}{8}$$

→ Pues bien, de la función X anterior diremos que es una *variable aleatoria* y si escribimos en una tabla los valores tomados por la variable aleatoria y los correspondientes de la probabilidad, tendremos la *distribución de probabilidades* de dicha variable aleatoria

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Otro ejemplo

Consideremos el experimento consistente en lanzar dos dados. El espacio muestral, de 36 elementos, puede escribirse así:

E = {(1, 1), (1, 2), ... , (1, 6), (2, 1), ... , (6, 6)}

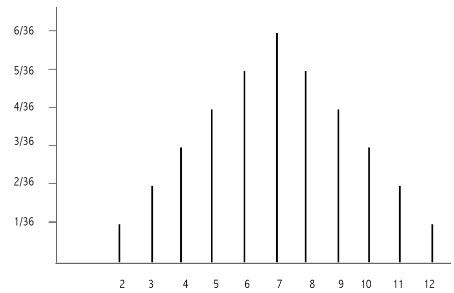
Una variable aleatoria, *X,* podría ser la que a cada suceso elemental le asociara la *suma de sus puntuaciones:* $X(i, j) = i + j$. Así, por ejemplo: $X(1, 1) = 2$, $X(3, 4) = 7$, etc. Podríamos, entonces, considerar sucesos como los siguientes:

$$[X=4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \qquad [X< 3.6] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}\ldots$$

La distribución de probabilidades sería ésta:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[X=x]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y podría representarse mediante el siguiente diagrama de barras:



3. PARÁMETROS DE UNA DISTRIBUCIÓN

Como vemos, las distribuciones de probabilidad son semejantes a distribuciones de frecuencias relativas. Podríamos decir, sin mucho rigor, que corresponden a muestras de extensión muy grande... Pues bien, al igual que en el caso de las distribuciones de frecuencias se definían la media o la varianza, estos parámetros pueden definirse en el caso de las distribuciones de probabilidad.

Definición (media de una variable aleatoria discreta)

➤ Dada una distribución discreta de probabilidades en la que la variable aleatoria X toma los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, si indicamos con p_i la probabilidad de que X tome el valor x_i, se llama *media de X* y se representa por μ al número:

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Observación

La media de una distribución de probabilidades también recibe el nombre de *esperanza matemática* o valor esperado. Ello tiene bastante que ver con los juegos de azar, en los que la media constituye una medida de las expectativas de ganancia:

→ Un estudiante dudaba de si apostar un euro en un juego que consistía en sacar una carta de la baraja; si salían oros, recibiría tres euros; en caso contrario, perdería el euro de la apuesta. ¿Qué hizo para averiguar si el juego era equitativo?

→ Consideró la variable aleatoria, *X,* cuyos valores son todas las ganancias y pérdidas posibles: $x_1 = +2$; $x_2 = -1$; y escribió la distribución de probabilidad: $p_1 = 1/4$ $p_2 = 3/4$. Después, calculó: $\mu = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} = -0.25$ y, tras observar que la esperanza de ganar era negativa y que si jugaba muchas veces perdería un promedio de 0.25 EUR por apuesta, pensó, por una vez en su vida, que las matemáticas le servían para algo.

Definiciones (varianza y desviación típica)

➤ *La varianza,* σ^2, de una distribución discreta de probabilidad de media μ, en la que los valores de la variable aleatoria son $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ con probabilidades p_i, se define así:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

➤ σ , raíz cuadrada de la varianza, es la *desviación típica.*

➤ Sin embargo, para calcular la varianza resulta mejor aplicar la siguiente fórmula, equivalente a la anterior:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2 - \mu^2$$

4. LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Ejemplo

➤ Tenemos una urna con 9 bolas, idénticas salvo en el color: 3 son negras y 6 blancas, y consideramos el experimento consistente en extraer una tras otra, con devolución, 5 bolas. Se considera, asimismo, la variable aleatoria siguiente:

X = Número de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones.

➥ Veamos cuál sería la probabilidad de, por ejemplo, $[X=2]$, es decir, de que haya 2 bolas blancas entre las 5 extraídas.

Simbolizando por **B** la extracción de bola blanca y por **N** la de negra, una forma de sacar 2 bolas blancas sería la del esquema:

$$\underset{1}{\mathrm{B}} \quad \underset{2}{\mathrm{B}} \quad \underset{3}{\mathrm{N}} \quad \underset{4}{\mathrm{N}} \quad \underset{5}{\mathrm{N}}$$

suceso cuya probabilidad es:

$$\frac{6}{9}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}=\left(\frac{6}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{9}\right)^3=\left(\frac{6}{9}\right)^2\cdot\left(1-\frac{6}{9}\right)^{5-2}$$

Pero también se tendría $[X=2]$ cuando se produjera la sucesión de extracciones:

$$\underset{1}{\mathrm{B}} \quad \underset{2}{\mathrm{N}} \quad \underset{3}{\mathrm{B}} \quad \underset{4}{\mathrm{N}} \quad \underset{5}{\mathrm{N}}$$

de igual probabilidad que la anterior. O cuando las bolas salieran así:

$$\underset{1}{\mathrm{N}} \quad \underset{2}{\mathrm{N}} \quad \underset{3}{\mathrm{B}} \quad \underset{4}{\mathrm{B}} \quad \underset{5}{\mathrm{N}}$$

Y podríamos seguir. ¿Cuántas veces? ¿Cuántos de estos sucesos elementales, todos ellos de igual probabilidad, formarían el suceso $[X=2]$? Pues tantos como grupos de 2 *lugares* pudiéramos elegir entre los 5 disponibles para *colocar* las dos bolas blancas, es decir:

$$C_{5,2}=\binom{5}{2}$$

En consecuencia:

$$P[X=2]=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^2\cdot\left(1-\frac{6}{9}\right)^{5-2}$$

➥ El razonamiento que habría que hacer para calcular la probabilidad de obtener cualquier otro número, k, entre 0 y 5, de bolas blancas sería análogo al anterior. Se llegaría sin dificultad a que:

$$P[X=k]=\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^k\cdot\left(1-\frac{6}{9}\right)^{5-k} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

siendo 6/9 la probabilidad de que, extraída una sola bola, sea blanca.

Definición (distribución binomial)

☞ Diremos que una variable aleatoria, *X*, sigue una distribución binomial, a la que representaremos por **B(n, p)**, si:

1° El experimento aleatorio consiste en realizar n pruebas consecutivas (ensayos de Bernouilli), tras cada una de las cuales sólo se consideran la realización de un suceso (*acierto,* para entendernos) y la de su contrario *(fracaso).*

2° Cada una de las n pruebas que constituyen el experimento es independiente de las anteriores, de modo que tanto la probabilidad de acierto, p, como la de fracaso, $q = 1 - p$, permanecen invariables en cada ensayo.

3° La variable aleatoria *X* se define así: *X* = número de aciertos en las n pruebas, y, por tanto, sus valores son 0, 1, 2, …, n.

Consecuencias

En general, razonando de forma semejante a la del ejemplo, llegaríamos a que en una **B(n, p)**

$$P[X=x]=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x} \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

Por otra parte, tras algunos calculos algo artificiosos se tendría, siendo $q = 1 - p$:

$$\mu = n\cdot p \qquad \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$$

5. ALGUNAS APLICACIONES

Primer ejemplo

❖ En un laboratorio se ha constatado que si se cruza un individuo con cierta característica genética, A, con otro que carezca de ella, la probabilidad de que el descendiente (que supondremos único) posea dicha característica es del 20%. Se cruzan **n** individuos del primer grupo, uno a uno, con otros **n** del segundo grupo. Y se desea hallar la probabilidad de que entre los **n** descendientes haya **k** con el rasgo A.

☞ Considerada la variable: *X = Núm. de descendientes, entre los n, con la característica* A el suceso *acierto* consistiría en que, elegido un descendiente, posea dicho rasgo. Su probabilidad es del 20%; o sea: **p= 0.2**. Y como se hacen **n** ensayos, cada uno independiente de los demás, y el valor de **p** se mantiene constante en cada uno de ellos, estaríamos ante una distribución **B(n, 0.2)**. Por tanto, la probabilidad buscada sería:

$$P[X=k]=\binom{n}{k}\cdot 0.2^{k}\cdot 0.8^{n-k}$$

Segundo ejemplo

❖ Supongamos que la probabilidad de que una mujer de 50 años viva 20 años más fuera 3/4. ¿Cómo calcularíamos la probabilidad de que, elegidas 5 mujeres de 50 años, todas llegaran a los 70? ¿Y la de que sólo lo hicieran dos de ellas?

☞ El suceso acierto consistiría en que elegida una mujer de 50 años, viviera 20 más; por tanto, p= 3/4. En consecuencia, considerada la variable: *X = número de mujeres entre las 5 que vivirán al menos 20 años* estaríamos ante una distribución binomial **B(5, 0.75)** y se tendría:

$$P[X=x]=\binom{5}{x}\cdot 0.75^{x}\cdot 0.25^{5-x} \Rightarrow \quad P[X=5]=\binom{5}{5}\cdot 0.75^{5}\cdot 0.25^{0}=0.24; \qquad P[X=2]=\binom{5}{2}\cdot 0.75^{2}\cdot 0.25^{3}=0.09$$

Advertencia

Para que un experimento compuesto de n experiencias sucesivas dé lugar a una distribución binomial, en sentido estricto, la probabilidad del *éxito* ha de mantenerse constante en cada prueba, lo cual no sucede exactamente en el ejemplo anterior, porque se entiende que al elegir una mujer se hace sin *devolución,* esto es, que no puede elegirse ninguna repetida, cosa que sí es posible en una distribución binomial pura. Lo que sucede es que cuando la población es suficientemente grande, la distribución que en rigor correspondería al experimento tiende a la binomial.

Ajuste de la binomial a una distribución de frecuencias

❖ A veces se dispone de ciertos datos en una muestra estadística y se sospecha que la variable seguiría en la totalidad de la población una distribución binomial. En tales casos procede efectuar lo que se llama *ajuste* de una distribución binomial de probabilidades a dicha distribución de frecuencias; o sea, procede determinar la distribución binomial que mejor se adapte a los datos previamente conocidos. ¿Cómo se realiza dicho ajuste?

☞ Para determinar la distribución **B(n, p)** a la que correspondan unas probabilidades lo más próximas posible a las frecuencias relativas de la muestra se tomará como media de la binomial la media de la distribución de frecuencias: $\mu = n\cdot p = \bar{x}$

De la igualdad anterior resulta: $p = \bar{x}/n$, y como n es conocido (es el máximo valor que puede tomar la variable), también lo será p, teniendo así resuelto el problema. Si fuera posible convendrá hacer una *estimación* de la *bondad* del ajuste.

Ejemplo

❖ Examinados en una fábrica 150 artículos de 4 componentes, el número de componentes defectuosos se distribuyó así:

Núm. de componentes defectuosos	*X*	0	1	2	3	4
Núm. de artículos	f (x)	63	61	21	3	2

Para ajustar una distribución binomial a tales datos y calcular las frecuencias esperadas (teóricas) correspondientes, procederíamos de la siguiente manera:

1.- Calcularíamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 63 + 1 \cdot 61 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{63 + 61 + 21 + 3 + 2} = 0.8$$

2.- De 0.8 = np, con n = 4, resulta: p = 0.2. Por tanto:

$$P[X = x] = \binom{4}{x} \cdot 0.2^x \cdot 0.8^{4-x}$$

3.- Finalmente, las frecuencias relativas teóricas serían:

f(0) = 0.4096; f(1) = 0.4096; f(2)= 0.1536; f(3) = 0.0256; f(4) = 0.0016

lo que en una muestra de 150 valores supondría unas frecuencias absolutas:

$n_0 = 61$, $n_1 = 61$, $n_2 = 23$, $n_3 = 4$, $n_4 = 1$

que no difieren mucho de las reales. Podríamos concluir que la distribución del número de componentes defectuosos seguiría un comportamiento aleatorio según la distribución **B(4, 0.2).**

6. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Variable aleatoria continua

Al contrario de lo que sucedía en los ejemplos anteriores, existen numerosos fenómenos en la biología, la economía, las ciencias sociales, etc., en los que los modelos probabilísticos que mejor resuelven ciertos problemas no son de carácter discreto, sino continuo, y en ellos la variable aleatoria podrá tomar, no ya un conjunto infinito, sino innumerable, de valores. ¿Cómo asignaremos probabilidades en tales casos? Supongamos, por ejemplo, que salimos a la calle y medimos la estatura de la primera persona con la que nos encontremos (si se deja). Aunque todas las estaturas fueran igualmente probables, que no lo son, ¿cómo asignaríamos una probabilidad al suceso la persona elegida mide 1'7659 m, si los casos favorables son uno solo y los posibles tantos como incontables números reales hay entre, por ejemplo, 1'50 y 2'10? Además, ¿dispondremos de un instrumento que permita medir estaturas con tal precisión?

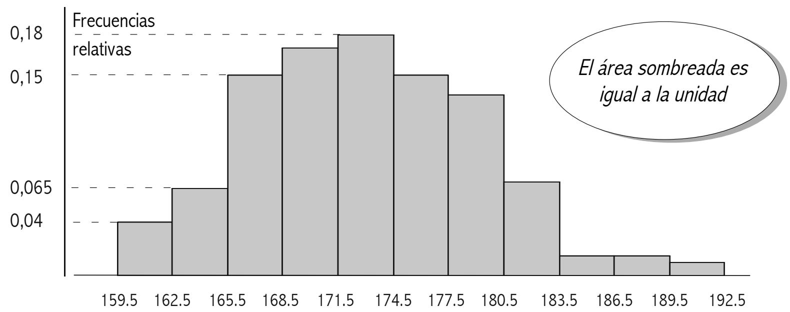
Afortunadamente, en la mayor parte de los fenómenos que tienen interés desde un punto de vista estadístico aparece una misma distribución continua; distribución que, precisamente por su frecuencia, por la regularidad con la que se presenta en numerosas situaciones, recibe el nombre de distribución normal. Recordaremos en lo que sigue cómo se trabajaba con ella, pues ya te debe resultar conocida desde el curso pasado.

Una experiencia previa

Se han medido las tallas de 200 estudiantes universitarios de 21 años de edad (los datos son auténticos y están tomados de *Curso de Estadística Descriptiva,* de G. Calot. Editorial Paraninfo. 1985). Los resultados obtenidos han sido los que se indican a continuación (se anotan sólo los cm que exceden a un metro):

68	71	67	70	67	80	60	79	72	79
73	70	72	71	65	74	68	79	73	68
75	70	76	76	90	77	60	72	67	77
73	78	72	76	79	67	77	76	82	82
71	67	74	89	69	74	72	80	64	74
78	69	78	71	68	74	67	80	83	68
79	60	81	69	67	67	69	74	63	71
69	77	69	73	73	74	73	78	83	75
65	72	68	67	73	79	61	66	70	63
82	73	69	78	76	69	66	65	75	72
62	88	68	78	72	70	63	90	78	84
68	78	78	70	76	72	76	80	71	73
71	71	83	63	75	68	71	75	67	79
73	61	79	69	77	73	72	80	65	83
62	71	67	83	79	71	79	68	70	67
81	75	81	70	80	82	65	68	65	74
77	83	84	65	72	77	74	73	69	77
76	71	84	65	65	70	70	77	67	68
75	82	77	75	68	70	80	70	73	72
73	73	75	75	68	80	75	67	62	75

A continuación, tras agrupar los valores en intervalos de 3 cm de longitud, el primero de los cuales es el [159.5, 162.5], se ha dibujado el histograma de las frecuencias relativas.

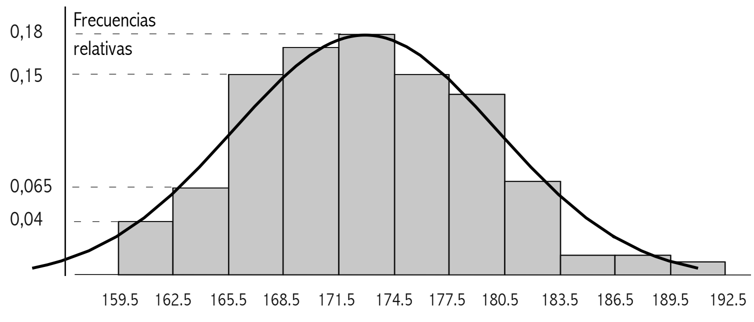


Si tomamos como base de todos los rectángulos la unidad, sus áreas coinciden con las frecuencias relativas. La suma de todas ellas, igual al área total del recinto sombreado, es la unidad.

➠ Para calcular la probabilidad de que, en esa muestra, un estudiante elegido al azar midiera menos de 168.5 cm, por ejemplo, bastaría con sumar las áreas de los rectángulos situados a la izquierda de ese valor: $0.04 + 0.065 + 0.15 = 0.255$.

➠ La probabilidad de que, en esa muestra, un estudiante midiera entre 171.5 y 177.5 cm, por ejemplo, coincidiría con el área de la parte del histograma situada a la derecha de 171.5 y a la izquierda de 177.5, es decir: $0.18 + 0.15 = 0.33$.

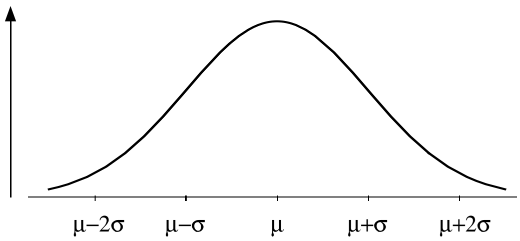
En la figura siguiente hemos repetido el histograma, pero hemos añadido la curva que tenderían a formar los lados superiores de los rectángulos del histograma si los intervalos se hubiesen tomado de la menor longitud posible y el número de estudiantes hubiera sido tan elevado como hubiéramos deseado. El área bajo dicha curva seguiría siendo la unidad, y si quisiéramos calcular probabilidades como las anteriores, pero no en la muestra, sino en la población, las áreas que habríamos de considerar serían las situadas bajo esa curva.



Justamente a una curva de ese tipo es a la que llamaremos curva normal. Se hallará más a la derecha o a la izquierda, según que la media sea mayor o menor. Será más o menos aplastada según sea mayor o menor la desviación típica. Y de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades siga tal curva, diremos que sigue una *distribución normal.* Convendrá examinar a continuación las principales propiedades de una curva que, por una de esas leyes no escritas de la naturaleza, aparece en múltiples fenómenos biológicos, sociales, psicológicos o de muchos otros tipos. Antes de ello, dediquemos un recuerdo a quien formuló por primera vez su expresión algebraica: Karl Friedrich Gauss (1777-1855), *princeps mathematicorum,* personaje que iluminó con su genio sin par cuantos parajes de las matemáticas recorrió a lo largo de su fecunda vida. En su honor, la curva que nos ocupa recibe el nombre de *campana* de Gauss.

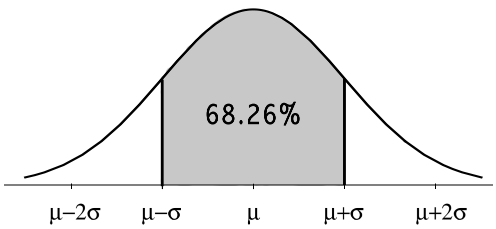
Definición (distribución normal)

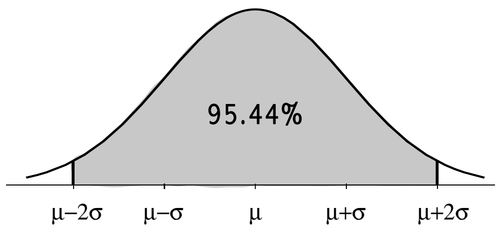
La distribución de probabilidades correspondiente a la curva siguiente recibe el nombre de *distribución normal,* y se designará por **N(μ,σ)**. Su media y desviación típica son iguales a μ y σ, respectivamente. En cuanto a la expresión algebraica de la función, podemos prescindir de ella, dado el carácter práctico que pretendemos dar a estas líneas.

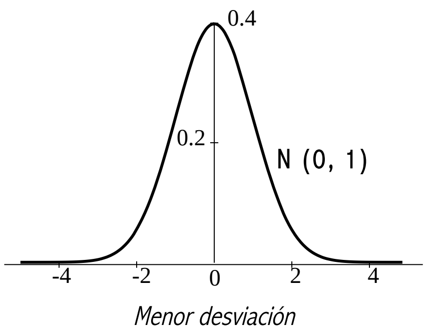


Las propiedades más notables de esta curva y, por consiguiente, de la distribución normal, son las siguientes:

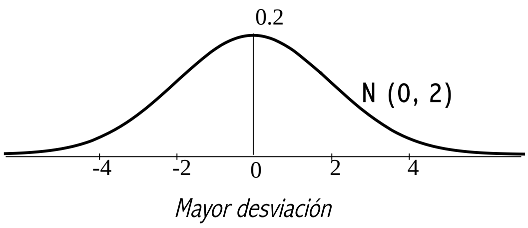
- El área bajo la curva normal es la unidad.
- La curva es simétrica respecto de la recta $x = \mu$. (por tanto las áreas situadas a la derecha e izquierda de la media son iguales).
- En la distribución normal coinciden media, mediana y moda.
- A los intervalos de centro la media y radio una y dos veces la desviación típica les corresponde el 68% y el 95%, aproximadamente, del total del área encerrada por la curva.
- Cuanto mayor es la desviación típica, más aplastada es la curva.







Menor desviación

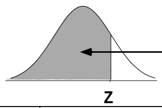


Mayor desviación

Cálculo de probabilidades en una distribución normal

❖ Dicho todo lo anterior, veamos ahora cómo se calculan probabilidades en una distribución normal. Es decir, cómo se hallan las probabilidades (áreas) de sucesos del tipo $[X \le a]$, $[a \le X \le b]$, etc. Nuestra tarea será más sencilla de lo que cabría esperar, pues existen unas tablas que facilitan esa labor. O, por mejor decir, una tabla, con distintas presentaciones, pues al no ser posible disponer de una distinta para cada una de las posibles distribuciones $N(\mu, \sigma)$, la que se utiliza es la correspondiente a la distribución normal *estándar o reducida,* que es la de media cero y desviación uno: N(0, 1). En ella aparecen los valores de las probabilidades (áreas) $P[Z \le z]$ para valores de z comprendidos entre 0 y 3.49. (Utilizaremos la letra ***Z*** para designar la variable en la distribución reducida).

Áreas limitadas por la curva normal tipificada N(0,1) desde $-\infty$ hasta z



Probabilidad $P[Z \le z]$

z	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7518	0'7549
0'7	0'7580	0'7612	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7996	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998

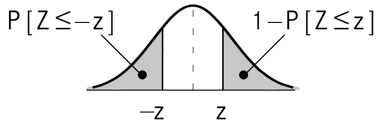
A la hora de servirnos de esa tabla para calcular probabilidades hay que distinguir entre dos supuestos:

• La distribución de partida es la N(0, 1).

➔ Una probabilidad del tipo $P[Z \le z]$, con $z \ge 0$, se obtiene directamente de la tabla. Así, por ejemplo, para hallar $P[Z \le 1.16]$ bastará buscar en la lista la intersección de la fila que empieza en 1'1 con la columna encabezada por 0'06, teniéndose:

$$P[Z \le 1.16] = 0.8770.$$

➔ Una probabilidad como P[Z≤–z] se hallará observando que:



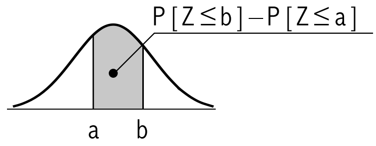
$$P[Z \leq -z] = 1 - P[Z \leq z]$$

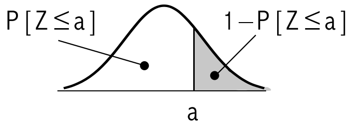
Así, por ejemplo: P[Z≤–1'72]=1– P[Z≤1'72]=1– 0'9573=0'0427.

➔ Una probabilidad del tipo P[a≤Z≤b] se obtendría mediante la igualdad: P[a≤Z≤b] = P[Z≤b] – P[Z≤a]

➔ Una probabilidad como P[Z≥a] se obtendría a partir de: P[Z≥a] = 1 – P[Z≤a]

Para justificar estas dos últimas igualdades no hay más que observar los dibujos siguientes:





• **La distribución de partida es la N(μ, σ).**

Si la distribución tiene de media μ y desviación típica σ se procede, en primer lugar, a la *tipificación de la variable.* Esto es, a pasar de la variable dada, X, a otra, Z, relacionada con la primera mediante la igualdad:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

pues con ello se logra, como puede demostrarse, que la nueva variable siga una distribución **N(0, 1)**. Bastará, entonces, con expresar en términos de Z las desigualdades en X de las que haya que calcular las probabilidades y proceder como antes. Haremos un ejemplo.

➔ Supongamos que se tratara de calcular P[12.6≤X≤16.4] en la distribución **N(15, 3)**. De acuerdo con el esquema:

$$Z = \frac{X - 15}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 12.6 & \Rightarrow z_1 = \dfrac{12.6 - 15}{3} = -0.80 \\ x_2 = 16.4 & \Rightarrow z_2 = \dfrac{16.4 - 15}{3} = \ \ 0.47 \end{cases}$$

se tendrá que el suceso [12.6≤X≤16.4] en la distribución N(15, 3) coincide con el [–0.80≤Z≤0.47] en la normal reducida. Por tanto:

$$\begin{aligned} P[12.6 \leq X \leq 6.4] &= P[-0.80 \leq Z \leq 0.47] = P[Z \leq 0.47] - P[Z \leq -0.80] = \\ &= P[Z \leq 0.47] - (1 - P[Z \leq 0.80]) = 0.6808 - (1 - 0.7881)0.4689 \end{aligned}$$

Observación importante

A menudo aparecen situaciones en las que los valores de la variable, que seguirá una distribución normal, se habrán redondeado. Observa, por ejemplo, la lista de estaturas de la página 101. Todas son valores enteros. ¿Quiere eso decir que ninguno de aquellos estudiantes medía 168.3 cm, por ejemplo? ¿O que nadie llegaba a los 170.85? No, no lo quiere decir, porque es perfectamente posible que alguno midiera 168.3 ó 170.85, si es que tiene sentido tal precisión al medir una persona. Al escribir valores enteros no excluimos otras posibilidades; lo que sucede es que cuando una medida no haya proporcionado un valor entero, la habremos aproximado al entero más próximo. Al de estatura 168.3 lo habremos incluido entre los de 168 cm y al de 170.85 entre los de 171.

Debido a ello, si nos dicen, por ejemplo, que los pesos de un grupo numeroso de personas siguen aproximadamente la distribución N(60, 5) y nos preguntan por la probabilidad de que una de esas personas pese 64 kg, lo que habremos de calcular será P[63.5≤X≤64.5]. Si nos preguntan por la probabilidad de que alguien pese entre 62 y 67 Kg. habremos de calcular P[61.5≤X≤67.5]. Conviene que tengas en cuenta esta advertencia, que en algunos casos habrá de ser de obligado seguimiento.

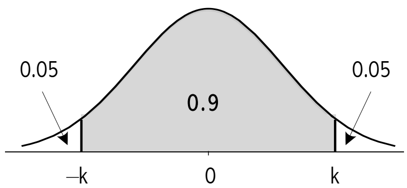
7. INTERVALOS CARACTERÍSTICOS

1. Como veremos más adelante, una cuestión que se plantea con gran frecuencia es la de, dada una distribución N(μ, σ), hallar a qué intervalo centrado en la media, (μ − k, μ + k), le corresponderá una probabilidad dada, **p**. O sea, se tratará de hallar el valor de k para el cual:

$$P[\mu - k \leq x \leq \mu + k] = \mathbf{p}$$

Al intervalo (μ − k, μ + k) se le llama *intervalo característico* correspondiente a la probabilidad **p** diciéndose también que **k** es el *valor crítico* correspondiente a **p**.

2. Así, por ejemplo, para hallar el intervalo característico correspondiente a una probabilidad **p**=0.9 en la distribución N(0, 1), observando la siguiente figura veremos que el área de cada una de las dos *colas* habrá de ser 0.05.



Se tratará, pues, de hallar k tal que $P[Z \leq k] = 0.95$. Basta con consultar la tabla anterior de la N(0, 1) para llegar a que k = 1.645.

Habitualmente se designa a la probabilidad **p** mediante (**1 − α**) y al correspondiente valor crítico se le designa por z_α, teniéndose, por tanto:

$$P[Z > z_\alpha] = \frac{\alpha}{2} \qquad\qquad P[-z_\alpha < Z < z_\alpha] = 1 - \alpha$$

Los valores críticos más utlizados, con los correspondientes valores de la probabilidad, son los siguientes:

p =1−α	0.50	0.90	0.95	0.99
z_α	0.674	1.645	1.96	2.575

pero, en general, para conocer los valores críticos z_α correspondientes a probabilidades cualesquiera se utiliza la siguiente tabla, que no es sino una disposición en forma distinta, pero equivalente, de la tabla de la N(0, 1) que ya hemos manejado.

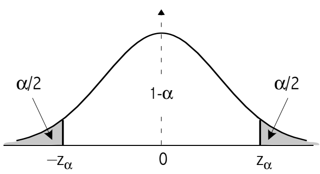


Tabla de valores de z_α, según los valores de α

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.772	0.706	0.690
0.5	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.6	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.7	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.8	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.9	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

Tabla para los pequeños valores de α

α	0.002	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.0000001
z_α	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892	5.327

3. En el caso de una distribución N(μ, σ), el intervalo de centro μ al que corrresponda una probabilidad dada, p = 1 − α (o sea, un intervalo en el que se halle el 100.(1 - α)% de los individuos de la población), será aquel en que:

$$-z_\alpha < \frac{x-\mu}{\sigma} < z_\alpha$$

es decir, el intervalo:

$$(\mu - z_\alpha \cdot \sigma \ , \ \ \mu + z_\alpha \cdot \sigma)$$

Así, por ejemplo:

El intervalo característico correspondiente a una **p = 1 − α** del **50%** será: $(\mu - 0.674\cdot\sigma \ , \ \ \mu + 0.674\cdot\sigma)$

El intervalo característico correspondiente a una **p = 1 − α** del **90%** será: $(\mu - 1.645\cdot\sigma \ , \ \ \mu + 1.645\cdot\sigma)$

El intervalo característico correspondiente a una **p = 1 − α** del **95%** será: $(\mu - 1.960\cdot\sigma \ , \ \ \mu + 1.960\cdot\sigma)$

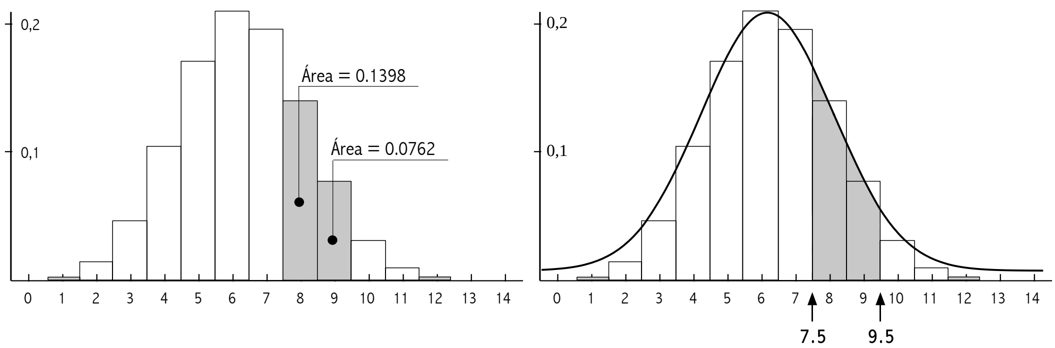
El intervalo característico correspondiente a una **p = 1 − α** del **99%** será: $(\mu - 2.575\cdot\sigma \ , \ \ \mu + 2.575\cdot\sigma)$

8. RELACIÓN BINOMIAL–NORMAL

Existen ocasiones en las que teniéndose que hallar probabilidades binomiales, los cálculos son muy laboriosos y, sin embargo, pueden obtenerse valores muy aproximados de las probabilidades utilizando en lugar de la distribución binomial una normal. Expondremos cómo se logra tal cosa mediante un ejemplo sencillo.

Ejemplo

→ Sea la distribución binomial **B(14,0.45)**. Calculadas las probabilidades de los sucesos [$X = x$, x = 0,1,...,14] se ha construido el histograma que aparece a continuación. Al ser iguales a uno las bases de todos los rectángulos, las probabilidades de los distintos valores de la variable coinciden con las áreas de los rectángulos.



(Aunque parezca que no hay rectángulos correspondientes a los valores 0, 13 y 14, hay que decir que sí existen, pero habida cuenta de que, por ejemplo, P[X=14]=0.000014, resultan minúsculos).

Como se observa en el histograma de la izquierda, la probabilidad de [7<X<10] en esa distribución binomial sería:

$$P[X=8]+P[X=9]=0.1398+0.0762=0.2160$$

Pero mira ahora la parte derecha de la figura. En ella se ha superpuesto al histograma la curva normal de igual media (μ=6.3) y desviación típica (σ=1.86) que la binomial. No hace falta ser un lince para percatarse de que a esa curva corresponden unas probabilidades (unas áreas) muy próximas a las de la binomial. Con la ventaja de que esos valores los podremos hallar consultando unas tablas. Lo único que habremos de tener en cuenta es que, al igual que sucedía cuando los valores de la variable continua se habían redondeado, para sustituir la suma de las áreas de los rectángulos por la contenida bajo la curva, habrá que considerar ésta entre los puntos obtenidos sumando y restando media unidad a los valores enteros dados. Así:

P[7<X<10] en la B(14,0.45) = P[7.5≤X≤9.5] en la N(6.3,1.86) = P[0.6451≤Z≤1.7204] en la N(0,1) = 0.2484

Naturalmente, como hemos tenido que calcular previamente las probabilidades binomiales para hacer el dibujo, sería absurdo conformarnos con valores aproximados, pero en otros casos, cuando n tome un valor mayor, ese cálculo es irrealizable. Precisamente por eso se efectúa la aproximación a través de la normal.

Admitiremos sin demostrarlo, conformándonos con el planteamiento intuitivo anterior, que las probabilidades en una binomial **B(n, p)** de media μ y desviación típica σ pueden sustituirse por las probabilidades en la normal **N(μ,σ)** con un error insignificante, siempre que los productos **n.p** y **n.q** sean mayores que 5.

Otro ejemplo

◆ Unos laboratorios farmaceúticos saben que el dos por ciento de los habitantes de una gran ciudad padecen la gripe. Están analizando los efectos de una vacuna y, a tal fin, encuestan a dos mil vecinos. ¿Cómo calculan la probabilidad de que tengan la gripe más de cincuenta de ellos?

En un primer intento los laboratorios plantean el cálculo como si se hallaran ante una distribución binomial: elegido un ciudadano, o tiene la gripe o no, siendo la probabilidad de que la tenga p = 0.02.(En sentido estricto, no se trataría de una distribución binomial). Lo malo es que tendrían que calcular:

$$P[X=51]=\binom{2000}{51}\cdot 0.02^{51}\cdot 0.98^{1949} \qquad P[X=52]=\binom{2000}{52}\cdot 0.02^{52}\cdot 0.98^{1948}$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$P[X=1999]=\binom{2000}{1999}\cdot 0.02^{1999}\cdot 0.98^{1} \qquad P[X=2000]=\binom{2000}{2000}\cdot 0.02^{2000}\cdot 0.98^{0}$$

y luego sumar los 1.950 valores anteriores. *Demasiado,* aunque utilizaran ordenadores para el cálculo.

En consecuencia, proceden de la siguiente forma:

① Hallan la media y la desviación de la distribución binomial:

$$\mu = n\cdot p = 200\cdot 0.2 = 40; \quad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{200\cdot 0.2\cdot 0.8} = 6.26$$

② Comprueban que n.p = 40 , n.q = 1960 son mayores que 5.

③ Pudiendo aproximar, en consecuencia, la binomial por la normal, calculan $P[X>50.5]$ en la distribución N(40, 6.26), concluyendo que la probabilidad buscada es aproximadamente igual a 0.05.

9. TEST DE NORMALIDAD

Si líneas atrás veíamos cómo se ajustaba la distribución binomial a una distribución de frecuencias, lo cierto es que son más numerosas las situaciones en las que la distribución teórica que mejor se adapta a una distribucion muestral es la normal. Cuando de los datos de una muestra parezca deducirse un comportamiento normal en la población, dos son las preguntas que se pueden formular:

1ª.- ¿Qué puede hacerse para confirmar o rechazar esa hipotética normalidad?
2ª.- En caso de confirmarse la normalidad ¿cómo calcular probabilidades?

El *test de normalidad de Kolmogorov,* llamado así en honor de un insigne matemático ruso, consiste en comparar la distribución muestral con la distribución normal de igual media y desviación típica. ¿Cómo? Pues, en el fondo, comparando el histograma de frecuencias relativas con la curva normal; viendo si son parecidos. Y ello se logra calculando las diferencias, en porcentaje, entre los valores que en la muestra se hallan por debajo de cada uno de los extremos superiores de los intervalos y las áreas correspondientes en la curva normal a los valores de la variable menores que dichos extremos. Si la máxima de tales diferencias, D_M, no supera cierta cota, se admite con un margen de error cuantificable la normalidad de la población de la que se haya extraído la muestra.

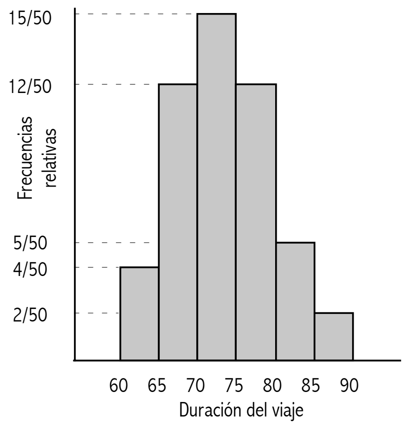
Nosotros, para simplificar, supondremos que se parte de muestras de 20 o más individuos y que, en su caso, el rechazo de la hipótesis de normalidad se hará con un margen de error del 5%; es decir, de manera que, por término medio, de cada cien veces que en igualdad de condiciones rechazásemos la hipótesis, nos equivocaríamos en cinco. En tal caso, puede demostrarse que para aceptar que la muestra procede de una población normal y que las diferencias son atribuibles al azar, basta con que la diferencia máxima, D_M, sea menor que $136/\sqrt{n}$, donde n es la extensión de la muestra.

Ejemplo

❖ Supongamos que durante cincuenta días un estudiante que se desplaza desde Cáceres a Badajoz ha cronometrado cuánto tarda el autobús de línea en efectuar su recorrido. Los resultados obtenidos los ha anotado en la siguiente tabla:

Minutos	[60, 65]	[65, 70]	[70, 75]	[75, 80]	[80, 85]	[85, 90]
Días	4	12	15	12	5	2

Como, a la vista del histograma de frecuencias relativas, existen razones para que sospechemos un comportamiento normal en la población, aplicaremos el test de Kolmogorov para confirmar o descartar tal hipótesis. A tal fin, calcularemos la media y la desviación típica de la muestra: $\bar{x} = 73.3$; $s = 6.19$



A continuación hallaremos la diferencia máxima, $\mathbf{D_M}$, en porcentaje, entre las frecuencias de los valores que en la muestra están por debajo de cada uno de los extremos superiores de los intervalos y las áreas que corresponden, en la curva normal de igual media y desviación, a esos valores de la variable. O sea, entre las áreas encerradas por los rectángulos situados a la izquierda de cada extremo superior de intervalo, por una parte, y los respectivos tramos de la curva normal, por otra. Los cálculos resultan sencillos si se disponen en una tabla como la siguiente. En ella se han tipificado los extremos superiores de los intervalos, para facilitar la búsqueda de la correspondiente probabilidad en la tabla de la N(0,1).

	Frec. absolutas	Frec. abs. acum. (%)	Extremos sup. interv.	Extremos . interv. (tipif)	Probab. en % en N(0,1)	Dif. Prob. – Frec.
Clases	n_i	F_i	L_i	$z_i = \frac{L_i - \bar{x}}{s}$	$P[Z \le z_i]$	$\lvert P[Z \le z_i] - F_i \rvert$
60-65	4	8	65	—0.53	9	1
65-70	12	32	70	—0.53	29	3
70-75	15	62	75	0.27	60	2
75-80	12	86	80	1.08	86	0
80-85	5	96	85	1.89	97	1
85-90	2	100	90	2.69	99	1

Así pues, $\mathbf{D_M} = 3$. Comparada esa diferencia máxima con $136/\sqrt{n}$ resulta:

$$\mathbf{D_M} = 3 < \frac{136}{\sqrt{n}} = \frac{136}{\sqrt{50}} = 19.23$$

y se acepta que la muestra corresponde a una población normal y que las diferencias observadas se deben al azar. En caso contrario, es decir, si D_M hubiera superado el valor anterior, hubiéramos rechazado la hipótesis con una probabilidad de que fuera cierta del 5%.

◆ Una vez confirmada la normalidad, la probabilidad de cualquier suceso se calculará como ya sabemos. Así, por ejemplo, para hallar la probabilidad de que un viaje cualquiera en el autobús dure entre 72 y 78 minutos bastará con calcular P[71'5≤X≤78'5] en la N(73'3, 6'19).

10. EJERCICIOS

1.- Se considera la variable aleatoria X = Número de mujeres entre 4 personas elegidas al azar. Representa su distribución de probabilidad.

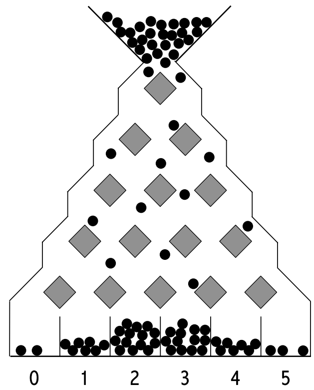
2.- Se lanza un dado cuatro veces y se considera la variable aleatoria, X, que indica el número de veces que se obtiene una puntuación divisible entre 3. Establece su distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.

3.- Se tiene un dado trucado, de forma que la probabilidad de que al lanzarlo se obtenga cualquier puntuación impar es doble que la de obtener cualquier puntuación par. Haz una tabla de la distribución de probabilidad de la variable X = puntuación obtenida tras lanzar el dado y calcula la esperanza matemática y la varianza.

4.- Se eligen al azar dos personas de un grupo de 3 hombres y 4 mujeres y se considera la variable aleatoria: X = número de mujeres entre las dos personas elegidas. Construye la distribución de probabilidad y calcula la esperanza matemática y la varianza.

5.- Calcula la probabilidad de que en un grupo de ocho personas, dos hayan nacido en el día de Navidad.

6.- En la figura se ha dibujado el llamado *aparato de Galton.* Las bolitas que van cayendo desde el depósito situado en la parte superior se van encontrando en su camino con unos obstáculos que hacen que la trayectoria seguida por cada una de ellas hasta llegar a las casillas numeradas de la parte inferior sea aleatorio. Tal y como está construido el aparato, las probabilidades de que una bola, llegada a un obstáculo, elija el camino de la derecha o el de la izquierda son iguales. Pues bien: Realizamos el experimento consistente en dejar caer una bola desde la parte superior y consideramos la variable X = número de la casilla en que dicha bola queda depositada. Halla la correspondiente distribución de probabilidad y dibuja su diagrama de barras.



7.- En un aparato de Galton de seis filas de obstáculos dejamos caer doscientas bolas. Calcula el número de bolas que llegarán aproximadamente a cada casillero.

8.- Calcula la probabilidad de que tras lanzar doce veces un dado se obtengan menos ases de los que cabe esperar. (Sugerencia: recuerda que a la media se la llama también valor esperado).

9.- De un total de 800 familias con tres hijos ¿cuántas cabe esperar que tengan exactamente dos niñas? (Puedes suponer que la probabilidad de *niño* y *niña* es la misma).

10.- La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es del 51.7%. Halla la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga: **a)** Por lo menos una niña; **b)** por lo menos un niño.

11.- En el año 1981, el 24'6% de la población extremeña era menor de 15 años. Si se hubieran elegido al azar 5 personas, ¿cuál hubiera sido la probabilidad de que dos fueran menores de 15 años? ¿Y la de que más de tres fueran menores de esa edad?

12.- Supóngase que la proporción de camisas defectuosas producidas en una fábrica es del 5 %. Si las camisas se empaquetan en cajas de 10 unidades, ¿qué proporción de cajas llevarán menos de 3 camisas defectuosas?

13.- En un examen tipo test se formulan 12 preguntas, para cada una de las cuales hay que elegir una de entre 3 respuestas. Un estudiante contesta al azar a todas las cuestiones. ¿Cuál es el número esperado de respuestas acertadas? ¿Y la probabilidad de que el estudiante conteste correctamente más de dos pero menos de siete preguntas?

14.- Ajusta una distribución binomial a la siguiente distribución de frecuencias y halla las frecuencias teóricas o esperadas.

X	0	1	2	3
f (x)	202	594	610	194

15.- Calcula el valor, en la distribución normal reducida, de: **a)** $P[Z\leq 1.73]$ **b)** $P[1.32\leq Z\leq 2.18]$ **c)** $P[Z\geq 0.78]$ **d)** $P[-2.3\leq Z\leq -0.27]$

16.- Calcula los valores de $P[X\leq 21]$, $P[X>31]$, $P[19\leq X\leq 28]$ en una distribución normal N(25,4).

17.- La presión diastólica de ciertos enfermos sigue una ley normal de media 92 mm Hg y desviación típica 12 mm. Hg. Halla la probabilidad de que elegido un paciente al azar: **a)** Su presión sea mayor que 115 mm. Hg. **b)** Su presión esté comprendida entre 85 y 104 mm. Hg.

18.- El peso en toneladas de los rollos de acero fabricados en una planta se distribuyen según una ley normal N(10, 0.5). Sólo se admiten los rollos con peso comprendido entre 9.5 y 11 toneladas. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un rollo dado?

19.- Se ha aplicado a 300 alumnos un test y se ha comprobado que los resultados se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. **a)** ¿Qué porcentaje de alumnos tendrá una puntuación comprendida entre 20 y 30? **b)** ¿Cuántos alumnos tendrán puntuación mayor de 42?

20.- En una distribución normal, el 15% de los valores de la variable son menores que 12, y el 40% de ellos, mayores que 16.2. ¿Cuáles son los parámetros de la distribución?

21.- ¿Qué porcentaje de los valores de una distribución $N(\mu,\sigma)$ se encuentran en el intervalo $(\mu-1.2\,\sigma, \mu+1.2\sigma)$?

22.- Las calificaciones obtenidas por los 2.870 alumnos que hicieron la selectividad en cierta ciudad siguieron una distribución N(5.5,1). Ordenados los alumnos según sus calificaciones, ¿qué calificación correspondería al lugar 2.050°? ¿En qué intervalo de centro 5.5 se encontraría el 40% de los alumnos?

23.- Una población de personas sigue una ley normal en la distribución de sus pesos. Se sabe que el 90% de la población pesa más de 50 Kg y que el 80% pesa menos de 80 Kg. Calcula la media y la desviación típica de la distribución de pesos.

24.- Los estudiantes de una universidad son sometidos a un test de inteligencia. Suponiendo que las puntuaciones alcanzadas siguen una ley normal con media igual a 100 puntos y desviación típica igual a 10 puntos, se pide hallar las probabilidades de que:
a) un estudiante obtenga más de 120 puntos. **b)** un estudiante obtenga menos de 80 puntos.

25.- Se sabe que el tiempo de tramitación, en días, de cierta documentación sigue una N(12,2) en la oficina A y una N(12,1) en la oficina B. Indica, justificando la respuesta, en cuál de las dos oficinas es más probable que la documentación tarde en tramitarse:
a) más de 12 días. **b)** menos de 10 días.

26.- Calcula, mediante aproximación a la distribución normal: **a)** $P[4\leq X\leq 7]$ en la B(12, 0.5). **b)** $P[X<30]$ en la B(100, 0.3).

27.- El 4% de los frigoríficos fabricados en una cadena de montaje son defectuosos. Si la producción mensual es de 2.000 frigoríficos, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes cualquiera el número de frigoríficos defectuosos esté comprendido entre 60 y 100?

28.- En un test hay 80 items, para cada uno de los cuales hay que elegir una de tres respuestas. La prueba se supera con un mínimo de 40 respuestas correctas. ¿Qué probabilidad tiene de superar el test quien seleccione todas las contestaciones al azar?

29.- Una persona acude diariamente a su trabajo en automóvil y ha comprobado que el tiempo empleado en el desplazamiento sigue una distribución normal de media 35'5 minutos y desviación típica 3'11 minutos. Si sale de su casa todos los días a las 8.20 y ha de estar en su trabajo a las 9.00, ¿cuántos días, de los 240 en que trabaja al año, cabe esperar que llegue tarde?

30.- Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso de tiro con arco fueron 0, 1, 2, 3… 10, dependiendo del número de dianas acertadas. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones puede aproximarse por la N(6'7, 1'2), halla: **a)** el porcentaje de participantes que obtuvo 6 puntos; **b)** la máxima puntuación del 10% de los peor clasificados; **c)** la mínima puntuación del 10% de los mejor clasificados.

31.- Una normativa europea obliga a que en los envases de yogur no debe haber menos de 120 gr. La máquina dosificadora de una empresa láctea hace los envases de yogur según una ley normal de desviación estándar de 2 gramos y media 122 gramos. **a)** ¿Qué tanto por ciento de los envases de yogur de esta empresa cumplirá la normativa? **b)** ¿Cuál deberá ser la media de la ley normal con la cual la máquina dosificadora hace los envases para que el 98 % de la producción de yogur de esta empresa cumpla la normativa? (La desviación se mantiene igual a 2)

32.- En cierta población, la edad de los individuos tiene una distribución normal con una media de 32 años y una desviación típica de 8 años. **a)** Halla la proporción de individuos menores de18 años. **b)** Si en la citada población viven 2 millones de personas, halla el número aproximado de personas mayores de 60 años.

33.- La estatura media de las aspirantes a fichar por un equipo femenino de baloncesto es 1'75 m, con una desviación típica de 2 cm. El 20% más altas son fichadas. ¿Cuál es la estatura mínima que permite jugar en el equipo?

34- Para contrastar la hipótesis de que una moneda está bien hecha se adopta el siguiente criterio: Si en una serie de 100 lanzamientos salen entre 40 y 60 caras (ambos incluidos) se acepta la hipótesis; en caso contrario, se rechaza. Halla la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad sea cierta.

35.- Se ha comprobado que la pérdida de peso, por evaporación, de cierto producto envasado en paquetes sigue una distribución normal de media 6'45 gramos y desviación típica 1'30 gramos. Calcula la probabilidad de que si se eligen dos paquetes al azar ambos hayan sufrido una pérdida de más de 8 gramos.

36.- En una población de estudiantes se ha comprobado que la calificación obtenida en inglés sigue un modelo normal de probabilidad con una media de 5, si se ha seguido el método de trabajo A, y con una media de 6, si se ha seguido el método de trabajo B. Sabiendo que el 4% de los alumnos que siguen el método A obtienen una calificación inferior a 3,5, y que el 2% de los alumnos que siguen el método B superan el 8, **a)** ¿Qué porcentaje de estudiantes adiestrados con el método A no superan las calificaciones de 6,5? **b)** ¿Qué porcentaje de estudiantes adiestrados con el método B obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6?

37.- En la ciudad A, la edad de sus 400.000 habitantes sigue una distribución normal de media 41 años y desviación típica 12 años. En la ciudad B, con el doble de habitantes, la edad se distribuye normalmente con media 47 años y desviación típica 8 años. ¿En cuál de las dos ciudades es mayor la proporción de habitantes mayores de 65 años? ¿Cuál de las dos ciudades tiene mayor número de habitantes con edad superior a 65 años?

38.- El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie se distribuye según una normal de media 52 y desviación típica 6,5. Se pide: **a)** Probabilidad de que una pieza fabricada pese más de 68 gramos. **b)** Si el 30% de las piezas fabricadas pesan más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

39.- Cierta máquina fabrica tornillos, de los cuales son defectuosos el 5%. Si los tornillos se envasan en cajas de 500, ¿cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 40 tornillos defectuosos?

40.- El teclado de una cierta máquina consta de los números 1, 2, 3, ... 9. Se pulsa dicho teclado al azar 100 veces, borrando cada vez la cifra obtenida. Halla la probabilidad de que salga par o múltiplo de 3 más de 60 veces. (Utiliza la aproximación de la binomial por la normal.)

41.- Las calificaciones en *Selectividad* de 825 estudiantes que desean seguir determinada carrera siguen una distribución N(6, 0.9). En la correspondiente facultad existen 120 plazas. ¿Cuál es la *nota de corte?*

42.- Las calificaciones de 1400 opositores siguen una distribución N(5.6, 0.8). Son seleccionados los 20 de mejor puntuación. ¿Cuál es la puntuación mínima para sacar plaza?

43.- Las pulsaciones por minuto, en reposo, de 420 aspirantes a ciclistas profesionales, siguen una distribución N(58, 6). Son seleccionados los 35 de menor número de pulsaciones. ¿Cuál es máximo número de pulsaciones que permite ser ciclista profesional?

44.- El diámetro de los tubos de cartón para un envase ha de estar entre 19 y 21 mm. La máquina que los fabrica proporciona tubos cuyos diámetros están distribuidos como una normal de media 19,5 mm y desviación típica 1,2 mm. **a)** ¿Qué porcentaje de tubos no será adecuado? **b)** ¿Cuáles habrían de ser la media y desviación típica de la producción para que el 95 % de los tubos sean adecuados?

45- Halla los intervalos característicos para el 90%, el 95% y el 96% en una distribución N(168,8)

46- La duración media de determinadas lámparas sigue una distribución N(230,10) (en días), Halla los intervalos característicos correspondientes a probabilidades del 90% y el 95%. Interpreta los resultados.

Tema 9

Inferencia estadística

1. INTRODUCCIÓN

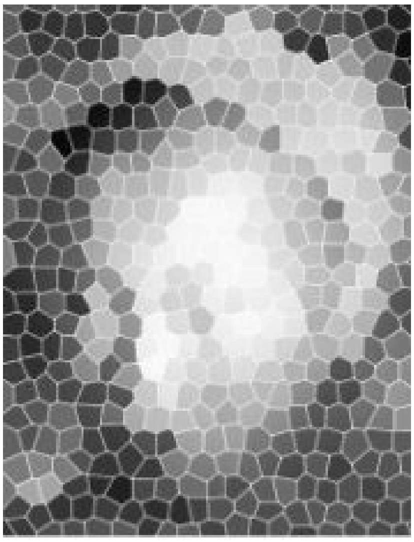
Existen, como sabes, muchas situaciones en las ciencias sociales, biológicas… en las que deseándose conocer ciertas características de una población estadística es imposible, por una u otra razón, examinar todos los elementos que la forman. Puede que se quiera conocer cuánto tardan en reaccionar los niños a una vacuna recién descubierta, por ejemplo, pero es claro que para averiguarlo no se podrá vacunar a todos. O puede que se desee saber cuántas horas ven al día la televisión por término medio los españoles, pero tampoco será posible preguntárselo a todos. En estos casos hay que recurrir a una muestra (cien niños, doscientos españoles…) para, tras calcular en ella los parámetros que interesen, inferir cuáles pueden ser esos mismos parámetros en la población.

En este tipo de problemas se presentan dos aspectos interconectados. El primero, cómo elegir una muestra que no induzca a error. Suele citarse a este respecto lo sucedido en EEUU en 1944 cuando una encuesta realizada a millones de personas por vía telefónica falló estrepitosamente al anunciar que Roosevelt perdería las elecciones presidenciales. En aquella época, tener teléfono en casa sólo estaba al alcance de familias de elevado nivel económico y la muestra que se utilizó, aunque de gran tamaño, resultó sesgada. De que no ocurra eso, es decir, de los procedimientos que permiten elegir muestras adecuadas, se encarga la teoría del muestreo. Daremos unas breves nociones sobre ella, explicando qué puede hacerse para que las muestras sean representativas de la población total.

El segundo aspecto al que nos referíamos es el que propiamente recibe el nombre de inferencia estadística. ¿Cómo puede inferirse de lo que ocurra en una muestra lo que ocurrirá en la población? ¿Cómo tomar decisiones que afecten a la población partiendo de los datos proporcionados por una muestra?

Adelantemos que estos problemas no se resuelven en términos absolutos, como sucede en otros campos de las matemáticas, sino en términos de probabilidad. Así, por ejemplo, si a partir de los datos de los viajes entre Cáceres y Badajoz citados en el tema anterior, quisiéramos estimar la duración media del viaje en la población no diríamos que dicho valor medio es tanto o cuanto, sino que se hallaría entre ciertos valores, con determinada probabilidad.

Permítenos un ejemplo: Si observas desde muy de cerca la imagen de la izquierda estarás manejando una muestra de una población. En principio sólo dispones de un conjunto de datos, que no dicen mucho. Sin embargo, si te alejas lo suficiente de la imagen y la observas de nuevo, empezarás a extraer más información, y posiblemente te hagas una idea tan parecida de lo que representa como si ves la imagen de la derecha, que representa la población. Habrás hecho una inferencia de los datos muestrales, para tener una imagen del conjunto. Éste es, en resumen, el objeto de las técnicas que estudiaremos: Obtener muestras e inferir datos sobre la población.



2. TEORÍA DE MUESTRAS

Nuestro objetivo va a ser a partir de ahora, el tratamiento estadístico de muestras. Pero ¿bajo qué condiciones resulta apropiada una muestra? Una primera cuestión a considerar es el tamaño que haya de tener. Parece evidente que a mayor tamaño más se acercarán los parámetros que calculemos a los de la población (y es cierto siempre que se tenga en cuenta la representatividad de la muestra, que es un aspecto que desarrollaremos ahora). En la práctica, el número de elementos de una muestra está determinado por varios factores: grado de fiabilidad deseado, dificultad en la elección de los elementos que la compongan, tiempo necesario para la elección, gastos originados...

La segunda y más importante cuestión es: ¿cómo deben ser elegidos los elementos que la compongan? Para ser válidas, las muestras han de ser representativas, esto es, si queremos inferir de los resultados de una muestra, en ella se ha de reproducir en igual porcentaje el carácter estudiado que en la población total. Por tanto, será necesario que en el momento de la elección de los elementos de la muestra comprobemos que todos los elementos de la población tiene igual probabilidad de ser elegidos. Cuando no se tienen en cuenta estos dos principios básicos las inferencias realizadas son deficientes. Existe una variedad de *mentiras estadísticas,* procedentes de afirmaciones basadas en pequeñas muestras, o en muestras no representativas. Así por ejemplo, si decimos que "8 de cada 10 profesores de matemáticas usan bata", no debemos inferir que el 80% de los profesores de matemáticas llevan esa prenda hasta que no sepamos de qué forma fueron elegidos los profesores examinados y cuántos fueron en total.

Las cuestiones referentes al tamaño de la muestra las estudiaremos más adelante. Veamos ahora algunas formas de elegirla.

Tipos de muestreos

Existen básicamente dos tipos de muestreo, los *aleatorios* y los *no aleatorios.* Los primeros son aquellos en que todos los miembros de la muestra han sido elegidos al azar, de forma que cada miembro de la población tuvo igual probabilidad de salir en la muestra. Este tipo de muestreo, que es el más consistente, es al mismo tiempo el que resulta más costoso. Instituciones oficiales como el INE (Instituto Nacional de Estadística) utilizan siempre muestreos aleatorios. Los segundos, los no aleatorios, carecen del grado de representatividad de los primeros, pero permiten un gran ahorro en los costes. Se eligen los elementos de la muestra en función de que sean representativos, según la opinión del investigador. Es el método que utilizan generalmente las empresas privadas, y presenta el inconveniente de que la precisión de los resultados no es muy grande.

Muestreo simple

Su utilización es muy sencilla, una vez que todos los elementos de la población han sido identificados y numerados (y éste es probablemente su mayor inconveniente). A partir de aquí, decidido el tamaño **n** de la muestra, los elementos que la compongan se han de elegir aleatoriamente entre los **N** de la población. El método más adecuado para la elección de esos elementos es la utilización de tablas de números aleatorios o programas informáticos o calculadoras que generan números aleatoriamente. También podrían sacarse bolas de una urna, como si de una lotería se tratase, cuyos números nos proporcionarían los elementos de la muestra.

Muestreo sistemático

Es análogo al anterior, aunque resulta más cómoda la elección de los elementos. Si hemos de elegir 40 elementos de un grupo de 600, se comienza por calcular el cociente 600/40 que nos dice que existen 40 grupos de 15 elementos entre los 600. Se elige un elemento de salida entre los 15 primeros y, suponiendo que sea el sexto, el resto de los elementos serán los sextos de cada grupo. La muestra estará formada por los números 6, 15+6 , 2x15+6, ... ,39x15+6

Este procedimiento simplifica enormemente la elección de elementos, pero puede dar lugar a una muestra poco representativa cuando los elementos se hayan numerados por algún criterio concreto, y los que ocupen el mismo lugar en cada subgrupo tengan todos una determinada característica.

Muestreo estratificado

A veces interesa, cuando las poblaciones son muy grandes, dividir éstas en subpoblaciones o estratos, sin elementos comunes, y que cubran toda la población. Una vez hecho esto podemos elegir de cada estrato, por muestreo aleatorio simple, un número de elementos igual o proporcional al tamaño del estrato. Este procedimiento tiene la gran ventaja de que se puede obtener una mayor precisión en poblaciones no homogéneas. Así, por ejemplo, si quisiéramos hacer una encuesta sobre el consumo del tabaco en un instituto de 2000 alumnos y para ello pensáramos en tomar una muestra de 100 alumnos, podríamos razonar de la siguiente forma: Dado que de los 2000 alumnos, 720 son de 3º de ESO, 700 de 4º de ESO, 340 de 1º de Bachillerato, y 240 de 2º de Bachillerato, tomaremos en cada estrato un número de individuos proporcional a su tamaño. Si 3º de ESO representa al 36% del alumnado, el 36% de la muestra (es decir 36 alumnos) se elegirán de este estrato por muestreo aleatorio simple, 35 para 4º de ESO, y así hasta completar los 100 elementos de la muestra.

Muestreo por conglomerados

A veces, para simplificar los procesos de toma de datos, se empieza por elegir ciertos conglomerados (que pueden ser bloques de viviendas, municipios, urnas electorales,...) y dentro de ellos se realiza el muestreo aleatorio.

Recogida de datos: la encuesta

Una vez decidido el tamaño y tipo de muestra, aparece el problema de cómo recoger los datos. La encuesta es el instrumento idóneo para este fin. Se debe establecer en primer lugar el objetivo de la misma, analizando el problema a investigar, eliminando lo que resulte superfluo, y centrándonos en los aspectos más relevantes. A continuación se elabora un cuestionario, formado por un conjunto de preguntas que han de ser respondidas por los encuestados. De su calidad depende en gran parte el resultado del trabajo. Existen una serie de factores que se han de tener en cuenta a la hora de redactar el cuestionario, entre los que destacan los siguientes:

• Las preguntas han de ser pocas (no más de 30) y cortas.

• Es preferible que las respuestas haya que elegirlas entre las ofrecidas en una lista *cerrada.* Si preguntamos a un encuestado si le gusta el sabor de un nuevo yogour, no podemos permitir respuestas de toda índole, sino que responda de acuerdo con una escala numérica o de valor. Por ejemplo, podemos valorar su gusto de 1 a 5, o bien: *nada, poco, regular, mucho, muchísimo.*

• Es preferible que las respuestas sean numéricas o al menos codificables (es decir que podamos expresarlas numéricamente, por ejemplo asignando valores del 1 al 5 a las respuestas del apartado anterior).

• Las preguntas deben ser redactadas de forma concreta y precisa (sin palabras abstractas o ambiguas), de manera que las repuestas sean inequívocas.

Elaborado el cuestionario debe ser realizado el *trabajo de campo,* es decir las entrevistas previstas, por medio de los encuestadores. Este trabajo también ha de hacerse bajo unas ciertas condiciones, que garanticen que las respuestas sean sinceras. Y una vez recopilados todos los datos, se procede a tabularlos, y describirlos, utilizando técnicas que ya estudiaste en cursos anteriores.

3. TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Distribución de medias muestrales

Consideremos una población (hipotéticamente infinita) en la que cierta variable X sigue una distribución, no necesariamente normal, de media μ y desviación típica σ. Cada vez que extraigamos de esa población una muestra de **n** valores, esa muestra tendrá a su vez una cierta media, $\bar{x}$. Podríamos considerar, por tanto, una nueva distribución: *la formada por los valores de la media en todas las posibles muestras de igual tamaño.* De dicha distribución, formada por los valores de la media en las muestras, se dice que es la *distribución muestral de las medias.* ¿De qué tipo será? ¿Cuáles serán su media y su desviación típica? Justificar adecuadamente las respuestas a las preguntas anteriores excede nuestras posibilidades. Nos limitaremos a enunciarlas, lo cual nos será suficiente.

Teorema central del límite (TCL)

☞ La distribución de las medias de todas las muestras de tamaño **n** ($n \geq 30$) de una población de media **μ** y desviación típica **σ** puede aproximarse por una distribución normal, cuya media y desviación típica son:

$$\mu(\bar{X}) = \mu\,; \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

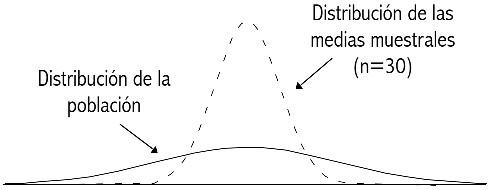
Además, si la población es normal, la distribución de las medias es normal con independencia del tamaño de las muestras.

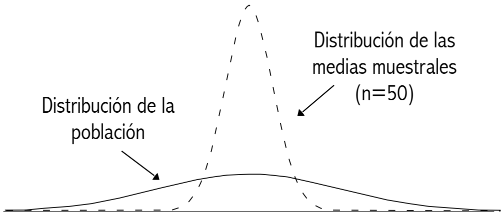
Repitamos: Las medias muestrales siguen una distribución de tipo *normal,* cuya media coincide con la media, μ, de la población, y esas medias se distribuyen alrededor de la media de la población con una desviación típica igual a la de la población dividida por la raíz de n. Además, según puede demostrarse, cuanto mayor sea el valor de n, mejor es la aproximación *normal.*

Observaciones

• Cuanto menor sea $\sigma/\sqrt{n}$, que mide la dispersión de las medias muestrales, más ajustadas estarán éstas a la media de la población. O sea, que *cuanto mayor sea el tamaño de las muestras menor será esta dispersión,* y por tanto más similares a la media de la población serán las medias obtenidas en las muestras.

• Observa la siguiente figura. La línea continua corresponde en ambos casos a la distribución de los datos de la población, que es normal N(μ,3). La línea discontinua, en el dibujo de la izquierda, corresponde a la distribución de las medias de las muestras de tamaño 30, es decir, a la N(μ, 3/$\sqrt{30}$). En el de la derecha, a la distribución de las medias de las muestras de tamaño 50, la N(μ, 3/$\sqrt{50}$). En los gráficos se comprueba que la distribución de la población y las de las medias muestrales tienen la misma media, pero estas últimas, al ser de menor desviación típica, son más estrechas, tanto más cuanto mayor sea el número de elementos que las forman.





• Por otra parte, del TCL se desprenden, en principio, dos aplicaciones. La primera, de escaso interés, si hemos de ser sinceros, la de hallar la probabilidad de que la media correspondiente a una muestra se halle entre determinados valores. La segunda, mucho más interesante, la de estimar entre qué valores y con qué probabilidad se hallará la media de la población, conociendo la media de una muestra. Precisaremos en lo que sigue estas cuestiones.

Ejemplo

❖ Supongamos que calificación media en la *Selectividad* en toda España fuera 5'3, correspondiendo a la distribución de calificaciones, que supondremos normal, una desviación típica igual a 1.5. Se trata de, en primer lugar, hallar la probabilidad de que elegida una muestra de 30 estudiantes, su calificación media esté comprendida entre 5 y 5'6 y, posteriormente, de hallar el intervalo característico de las medias muestrales correspondiente a una probabilidad $1 - \alpha = 0.95$

➨ Sabemos que en la población: $\mu = 5'3$; $\sigma = 1.5$, luego la distribución de las medias para muestras de 30 valores tendrá por media y desviación típica:

$$\mu(\bar{X}) = 5'3\,;\quad \sigma(\bar{X}) = \frac{1.5}{\sqrt{30}} = 0'274$$

Bastará, pues, con hallar P [5<X<5'6] en una distribución normal N(5'3, 0'274). Procediendo como de costumbre se llegaría a que la probabilidad pedida es del 72%, aproximadamente.

➨ En cuanto a la segunda cuestión, $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$, al que corrresponde como valor crítico: $z_\alpha = 1.96$. Por lo tanto, el intervalo característico para esa probabilidad del 95% será: $(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (4.76\ ,\ 5.84)$

Intervalos de confianza

Generalicemos: Tomadas muestras de tamaño n suficientemente grande ($n \geq 30$) de una población de media μ y desviación típica σ, ¿cuál es el intervalo característico (μ – E, μ + E) tal que la probabilidad de que la media muestral, $\bar{x}$, se encuentre en él sea $1-\alpha$?

◆ Dado que según el teorema central del límite $\bar{X}$ sigue la N $\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$, como:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \mu - E \quad \Rightarrow \quad z_1 = \dfrac{\mu - E - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = -\dfrac{E}{\sigma/\sqrt{n}} \\[2ex] \bar{x}_2 = \mu + E \quad \Rightarrow \quad z_2 = \dfrac{\mu + E - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{E}{\sigma/\sqrt{n}} \end{cases}$$

Si escribiéramos:

$$z_\alpha = \frac{E}{\sigma/\sqrt{n}}$$

resultaría:

$$P\,[\mu - E \leq \bar{X} \leq \mu + E] = P[-z_\alpha \leq Z \leq z_\alpha]$$

O sea: El intervalo buscado es el $(\mu - E, \mu + E)$, donde: $E = z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

De z_α se dice que es el *coeficiente de confianza* correspondiente a ese intervalo y a la probabilidad:

$$P[\mu - E \le \bar{X} \le \mu + E] = P[-z_\alpha \le Z \le z_\alpha] = 1 - \alpha$$

(que suele expresarse en porcentaje), la llamaremos *nivel de confianza* para ese coeficiente. Bastará con consultar la tabla de la N(0,1) –preferentemente en la forma dada en la pág. 105– para averiguar el coeficiente correspondiente a cada valor del nivel de confianza.

4. ESTIMACIÓN

El Teorema Central del Límite nos permite, pues, saber cómo se distribuyen las medias de las muestras de una población. Pero ahora veremos el problema recíproco que, como hemos dicho, es el realmente interesante: supondremos que de una población cuya media desconocemos se ha extraído una muestra suficientemente grande cuya media hemos calculado. ¿Cómo hacer una *inferencia* sobre la media en la población? ¿Qué *confianza* nos merecerá dicha estimación?

Intervalos de centro una media muestral

Veamos, pues, el asunto de los intervalos de confianza desde otro punto de vista. Supongamos que se desconoce la media de una población y que se extrae una muestra suficientemente grande de ella de media $\bar{x}$. Dado que:

$$|\bar{x} - \mu| < E \Leftrightarrow |\mu - \bar{x}| < E$$

la probabilidad anterior: $P\left[|\bar{x} - \mu| < E\right]$, la podremos considerar como la probabilidad de que μ esté en el intervalo $(\bar{x} - E,\ \bar{x} + E)$.

➡ Por *estimación de la media de la población* con un nivel de confianza (1–α) entenderemos la obtención del intervalo de centro la media muestral, $\bar{x}$, y radio E, para el que: $P[\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E] = 1 - \alpha$.

Observación importante

Como es comprensible, lo habitual en casos como el presente es que se desconozca la desviación típica de la población. Pues bien, admitiremos que, para muestras suficientemente grandes, la desviación típica de la población, σ, puede sustituirse por la muestral, o, mucho mejor aún, por la *cuasidesviación típica* [1] de la muestra, que se define así:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

En tal caso:

El nivel de confianza (1–α) corresponde al intervalo: $(\bar{x} - E,\ \bar{x} + E)$, con $E = z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx z_\alpha \dfrac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$

De E, radio del intervalo de confianza, diremos que es el *máximo error admisible.* Su valor nos indica en qué margen de la media muestral se encuentra la media poblacional al nivel de confianza asignado.

Ejemplo

Se desea efectuar una estimación del peso medio de los paquetes de galletas producidos en cierta fábrica, con un nivel de confianza del 95%. A tal fin se toma una muestra de 120 paquetes, de la que el peso medio resulta ser de 880 g y la cuasi desviación típica de 90 g. Como, en tal caso: $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow z_\alpha = 1.96$, será:

---

[1] Es decir, es la desviación típica de la muestra corregida al dividir por n – 1 en lugar de por n. De esa manera el valor de s aumentará, sobreestimándose la desviación típica para compensar el error cometido al tomar una muestra. De s^2_{n-1} se dice que es la *cuasivarianza* de la muestra.

$$E = z_\alpha \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{90}{\sqrt{120}} = 16.1$$

y, por tanto, el intervalo de confianza para un nivel del 95% sería el (880 – 16'1, 880 + 16'1) = (863'9, 896'1). O, en otras palabras: que considerado el intervalo (863'9, 896'1), de cada 100 muestras de 120 paquetes que tomásemos, 95, por término medio, contendrían la media de la población.

➡ Otra forma de expresar lo anterior consistiría en afirmar que a un nivel de confianza del 95%, la media poblacional es de 880 g con un error máximo de 16'1 g.

Si, recíprocamente, quisiéramos determinar qué nivel de confianza merece el intervalo $(880 - 10,\ 880 + 10)$, por ejemplo, como:

$$z_\alpha \cdot \frac{90}{\sqrt{120}} = 10 \Rightarrow z_\alpha = 1.2172$$

tendríamos que hallar $(1-\alpha) = P[-1'2172 \le Z \le 1'2172]$ en la N(0,1), obteniendo $(1-\alpha)$ = 78%, aproximadamente.

Quizás convenga, antes de seguir, insistir sobre algunos conceptos importantes:

- *Estimación:* Procedimiento utilizado cuando se quieren conocer las características de un parámetro poblacional (normalmente, la media), a partir del conocimiento de la muestra.
- *Intervalo de confianza:* Intervalo en el que sabemos que está un parámetro, con un nivel de confianza específico.
- *Nivel de confianza:* Probabilidad de que el parámetro a estimar se encuentre en el intervalo de confianza. Los valores más utilizados para el nivel de confianza son el 95%, 99% y 99,9%
- *Error máximo de estimación:* radio del intervalo de confianza. Nos indica en qué margen de la media muestral se encuentra la media poblacional al nivel de confianza asignado.

Relación entre nivel de confianza, error admisible y tamaño de la muestra

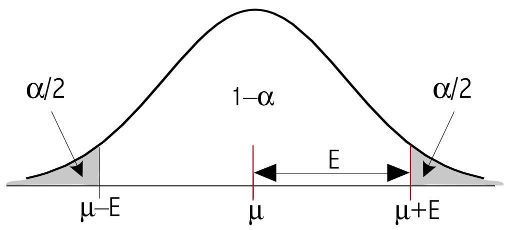
Hemos visto antes que:

$$z_\alpha = \frac{E}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad [*],$$

o lo que es lo mismo:

$$E = z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

expresión que nos relaciona el nivel de confianza (pues el valor de z_α nos da el de $1-\alpha$), el error admisible y el tamaño de la muestra.



De la igualdad anterior, y como ya era lógico sospechar, se deduce:

• Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, menor es el máximo error (el intervalo será más estrecho); o sea, la estimación será más precisa.

• Cuanto mayor sea $1-\alpha$ (o sea: cuanto más seguros queramos estar de nuestra estimación), mayor habrá de ser E, más amplio habremos de tomar el intervalo.

Ejemplo

Se desea establecer, con un nivel de confianza del 95% y un error máximo de 15 gr, el peso medio de las naranjas que se venden en un hipermercado. Si la desviación típica (conocida por numerosos casos anteriores) es de 60 gr ¿cuántas naranjas deberán ser escogidas al azar para poder establecer dicha media?

Despejando **n** en [*], se tiene $n=\left(\frac{z_{\alpha}\cdot\sigma}{E}\right)^2$, y como para $1-\alpha = 0.95$ es $z_{\alpha}=1.96$, basta sustituir y se llega a: $\mathbf{n=62}$

Distribución muestral de proporciones

☞ Como sabes, la distribución binomial B(n, p) indica cómo se distribuye el número de *éxitos,* correspondientes a un experimento realizado en igualdad de condiciones **n** veces, y en el que la probabilidad de éxito en cada prueba permanece constante e igual a **p**. Considerada la variable X = número de *éxitos,* sus posibles valores son 0, 1, 2, ..., n; y la distribución de X tiene por media y desviación típica: $\mu=n\cdot p$ y $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$, respectivamente, donde q=1–p. También sabes que si np>5, nq>5, la distribución binomial puede aproximarse por la normal de iguales media y desviación típica.

Si, ahora, definiéramos una nueva variable, Y, dada por: $Y=\frac{X}{n}$ sus posibles valores serían $\frac{0}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ... , $\frac{n}{n}$; es decir, las posibles proporciones de éxitos (expresados en tantos por uno) en las n pruebas.

La media y desviación típica de esta nueva variable Y que representaría la proporción de éxitos, serían:

$$\mu=\frac{n\cdot p}{n}=p \qquad \sigma=\frac{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}{n}=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$$

En aquellos casos en que, además, $np>5$, $nq>5$, utilizando la aproximación normal a la binomial podremos afirmar que:

> Las *proporciones de éxito* para un experimento binomial de **n** pruebas con probabilidad de éxito **p** en cada prueba se distribuyen según la:
>
> $$N\left(p,\ \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$$

Ejemplo

Aceptemos que la proporción de estudiantes de bachillerato en España que son chicas es del 60%. Cuando elijamos un alumno, y nos preguntemos si es chica, es como si realizáramos una prueba binomial con probabilidad de éxito p=0,6. Y si tomamos muestras aleatorias de, por ejemplo, 70 alumnos, el número de ellos que serán chicas deberá seguir una distribución B(70, 0´6); o sea, la proporción de mujeres, dado que np>5, nq>5, se distribuirá aproximadamente según la:

$$N\left(0.6\ ,\ \sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{70}}\right)=N(0.6\ ,\ 0.058)$$

En resumen: las proporciones que obtengamos para muestras de tamaño 70 se irán distribuyendo de forma *normal* alrededor del 60%, con una desviación típica del 5,8%. Y es a este tipo distribución a la que llamaremos *distribución muestral de proporciones.*

Otro ejemplo

Se sabe que 85 de cada 100 españoles han sufrido alguna vez la gripe. ¿Cuál es el intervalo característico para la proporción de españoles que han tenido la gripe, en muestras de tamaño 150, correspondiente a un nivel de confianza del 95%?

Las proporciones muestrales para muestras de tamaño 150 en una población normal se distribuirán según:

$$N\left(0.85\ ;\sqrt{\frac{0.85\cdot 0.15}{150}}\right)=N\big(0.85;\ 0.03\big)$$

es decir, se distribuyen de forma *normal* alrededor del 85% con una desviación típica del 3%. Como $1-\alpha=0.95 \Rightarrow z_{\alpha}=1.96$, el intervalo pedido será: $\big(0.85-1.96\cdot 0.03, 0.85+1.96\cdot 0.03\big)=\big(0.79, 0.91\big)$

Estimación de una proporción

➤ De forma semejante a como antes efectuábamos la estimación de la media de una población a partir de una muestra, ahora, establecido el concepto de distribución muestral de una proporción, podremos estimar una proporción en la población, partiendo de los datos de una muestra.

➤ Para concretar, supongamos que hemos tomado una muestra aleatoria de 500 españoles a las que preguntamos si han fumado alguna vez en su vida, obteniendo *sí* como respuesta en un 70% de los casos. Queremos determinar, con un nivel de confianza del 90%, el porcentaje **p** de toda la población que diría *sí.*

Como sabemos, las proporciones del *sí* en las muestras se distribuirán según la $N\left(p,\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$, pero ahora se da la circunstancia de que no conocemos la verdadera proporción **p**, por lo que utilizaremos en su lugar la proporción muestral $p'=0.7$ (lo cual no da lugar a error apreciable cuando las muestras son grandes). En consecuencia, las proporciones muestrales seguirán la distribución N(0.7, 0.02).

➤ Procediendo como en el caso de la estimación de medias llegaríamos a que en el 90% de las muestras de 500 personas que eligiésemos, las proporciones de fumadores estarían, como máximo, a una distancia de p igual a:

$$\pm z_{\alpha}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$$

es decir, a $\pm 1.65\cdot 0.02=\pm 0.033$, y en consecuencia, si suponemos que p' es una de tales proporciones (y será acertado suponerlo en un 90% de los casos), la verdadera proporción quedará siempre en el intervalo:

$$(p'-0.033\ ,\ p'+0.033)=(0.667\ ,\ 0.733).$$

Podríamos concluir, pues, diciendo que "con un nivel de confianza del 90%, la proporción de españoles que han fumado en alguna ocasión es del 70%, con un error máximo de $\pm$ 3,3 % "

Determinación del tamaño de la muestra para un nivel de confianza

Como sabemos, el error máximo en una estimación depende del tamaño de la muestra: a muestras mayores corresponden errores menores. Además, cuando queramos hacer una estimación, con un determinado margen de confianza, nos plantearemos que la cota de error tenga un determinado valor.

Supongamos, por ejemplo, que queremos conocer el porcentaje de alumnos de nuestro instituto que es favorable a celebrar el *día del Centro* el 12 de mayo (este carácter se considerará como *éxito),* en contraposición con los que prefieren otra fecha. Nos marcamos un nivel de confianza del 90%, y queremos que el error máximo no sobrepase el 10%. Puesto que:

$$E=z_{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$$

el tamaño de la muestra habrá de ser:

$$n=\frac{{z_{\alpha}}^{2}\cdot p\cdot q}{E^{2}}$$

Pero existe un problema: no conocemos p, ni tan siquiera el valor de p' en la muestra, puesto que la encuesta aún no ha sido realizada. Debido a ello se utilizará inicialmente p=0.5, pues para este valor se obtiene el máximo valor de $p\cdot q=p\cdot(1-p)$ y, por tanto, del tamaño de la muestra. En la práctica normalmente no se conoce el valor de p, y se utiliza el valor p=0.5, tal y como se indica en la ficha técnica de la mayoría de los estudios que se publican en la prensa

Ejemplo

Una cadena de televisión desea estimar con un error máximo del 3% y un nivel de confianza del 95% el porcentaje de audiencia de uno de sus programas. No tiene información previa sobre el posible valor de **p**. ¿Cuántos telespectadores deberán ser encuestados?

Para un nivel de confianza del 95% deberemos tomar $z_\alpha = 1{,}96$ y, como desconocemos p, tomaremos p=0,5. Con ello resulta n = 1068.

Bastará, pues, con encuestar sólo a 1068 espectadores (que representan una parte muy pequeña respecto del total de ellos) para poder asegurar, con un nivel de confianza del 95%, que el porcentaje que encontremos se hallará a menos de tres puntos porcentuales de la proporción exacta.

5. CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Para finalizar, en las próximas líneas veremos cómo puede actuarse para, basándose en datos estadísticos, tomar una decisión referente a la población de la que hayamos extraído luna muestra y cómo podremos controlar el margen de error que cometamos. A tal fin, desarrollaremos al unísono un par de ejemplos.

Primer caso

Queremos saber si una moneda está perfectamente equilibrada y, a tal fin, la lanzamos 100 veces, obteniendo un total de 33 *caras.* ¿Podemos aceptar que la moneda está equilibrada o habremos de rechazar tal hipótesis?

Segundo caso

En 1990 se realizó una prueba a todos los estudiantes de una ciudad, obteniéndose una media $\mu = 102$ puntos, con $\sigma = 11$ puntos. En 2002 se ha sometido a la misma prueba a una muestra de 400 estudiantes y la media ha sido $\bar{x} = 101$ puntos. ¿Podemos aceptar que no ha habido cambio en los conocimientos de los estudiantes y que, por lo tanto, la diferencia observada es fruto del azar?

Como vemos, en ambas situaciones hay unas *hipótesis de partida* y unos resultados obtenidos en sendas muestras, que no coinciden con los de las respectivas hipótesis. La cuestión que resolveremos es la de si esa diferencia entre las hipótesis de partida y los resultados de la muestra son *significativas* o si podemos atribuirlas al azar.

La situación, esquemáticamente, podríamos resumirla de la siguiente manera:

	Moneda	*Estudiantes*
Hipótesis	La moneda está equilibrada. La probabilidad de cara es: p=0.5	$\mu = 102$
Lo que sucede en la muestra	$p' = 0.33$	$\bar{x} = 101$
Cuestión a dilucidar	¿Pueden atribuirse al azar las diferencias observadas? ¿Admitiremos con cierto nivel de confianza que las muestras han sido extraídas de la población supuesta?	

De modo que si convenimos en establecer:

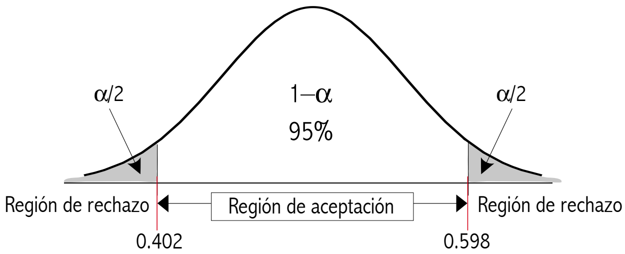
H_0 (hipótesis nula) = hipótesis inicialmente admitida. (siempre ha de incluir una igualdad)	H_1 = hipótesis alternativa.

tendríamos:

	Moneda	*Estudiantes*
H_0	$p = 0.5$	$\mu = 102$
H_1	$p \neq 0.5$	$\mu \neq 102$

Contraste de hipótesis para el caso de la moneda

Si **H_0** $(p = 0.5)$ fuera cierta, las proporciones de *caras* en las muestras de tamaño 100 seguirían una $N\left(p, \sqrt{pq/n}\right)$, es decir, una $N(0.5, 0.05)$. En tal caso, el 95%, por ejemplo, de las proporciones muestrales de caras estarían en el intervalo característico correspondiente a $1-\alpha = 0.95, z_\alpha = 1.96$; o sea, el intervalo $(0.5 - 1.96 \cdot 0.05, 0.5 + 1.96 \cdot 0.05) = (0.402, 0.598)$.

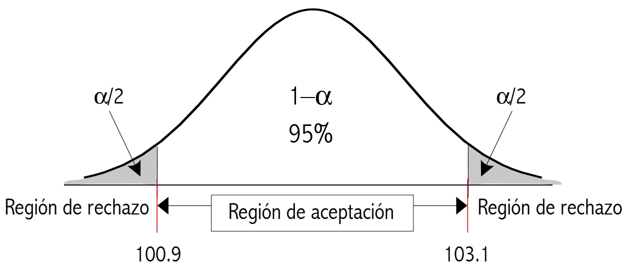


Dado que la proporción de caras obtenidas en la muestra, $p' = 0.33$, queda fuera de la región de aceptación, es muy poco probable (sólo un 5%) que la muestra corresponda a esa población. Debido a ello se rechazará la hipótesis, con un *nivel de significación* del 5%.

> El *nivel de significación* es, pues, la probabilidad de que rechazemos la hipótesis nula, siendo en realidad cierta. Podríamos decir, sin mucho rigor, que es la *cantidad de error* que nos podemos permitir.

Contraste de hipótesis para el caso de los estudiantes

Si **H_0** fuera cierta, la distribución muestral de las medias, dado que n = 400, sería $N\left(102, 11/\sqrt{400}\right) = N(102, 0.55)$. En tal caso, el 95%, por ejemplo, de las medias muestraless estarían en el intervalo característico correspondiente a $1-\alpha = 0.95, z_\alpha = 1.96$; o sea, el intervalo: $(102 - 1.96 \cdot 0.55, 102 + 1.96 \cdot 0.55) = (100.9, 103.1)$.



Como la media muestral, $\bar{x} = 101$, se halla en dicho intervalo, en la región de aceptación, se aceptará la hipótesis, con un nivel de significación del 5%. (O sea, que, en de cada cien veces que, en igualdad de condiciones, aceptáramos la hipótesis, dándola por cierta, nos equivocaríamos en cinco).

Último ejemplo de contraste de hipótesis para la media

Los refrescos *Colaloca* se venden en envases en cuya etiqueta puede leerse "Contenido: 250 cc". Una asociación de consumidores ha tomado una muestra de 36 envases, que proporcionan un contenido medio de 234 cc con una varianza de 18 cc^2. ¿Puede afirmarse con un 1% de significación que el contenido es menor de lo que anuncia la etiqueta?

Éste, a diferencia de los ejemplos anteriores, en los que los contrastes de hipótesis que hemos utilizado han sido *bilaterales* (la región de rechazo estaba constituida por dos *colas*, una a la derecha y otra a la izquierda de la región de aceptación), es un caso en el que lo procedente es realizar un contraste *unilateral:* La hipótesis nula no consistirá en que la media poblacional sea 250 cc, sino en que dicha media sea, al menos, de 250 cc.

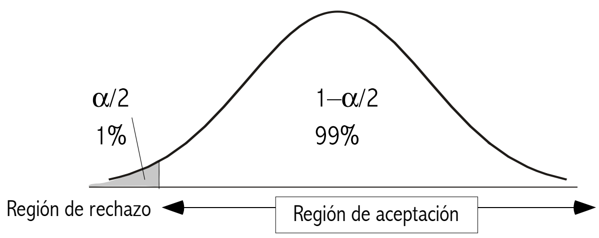
Procederemos como sigue:

Primer paso:

Establecemos la hipótesis nula, H_0: $\mu \geq 250$, con lo que la hipótesis alternativa, H_1, será: $\mu < 250$.

Segundo paso:

Observemos que, en este caso, la región de rechazo la forman los valores situados en la cola izquierda de la distribución:



Partiendo de que se diera el caso más extremo de la hipótesis nula ($\mu = 250$), la distribución muestral de las medias, n=36, sería $N\left(250, \sqrt{18}/\sqrt{36}\right) = N\left(250, 0.71\right)$. Si el área de la región crítica o de rechazo ha de ser 0.01, consultando la tabla de la normal tipificada, se obtiene que $z_{\alpha} = 2.33$. La región de aceptación, con un nivel de significación del 1% (el 99% de las medias muestrales habrían de hallarse en ella), sería la $(250 - 2.33 \cdot 0{,}71,\ \infty) = (248.3\ ,\ \infty)$.

Tercer paso:

Estableceremos la conclusión:

Dado que la media de la muestra no se halla en la región de aceptación, rechazaremos la hipótesis nula con un nivel de significación el 1%. O sea, que con un riesgo del 1% de equivocarnos (de cada cien veces que llegásemos a la misma conclusión, nos confundiríamos en una, por término medio) podemos decir que las etiquetas del refresco no reflejan la realidad y el contenido del envase es menor del anunciado.

Último ejemplo de contraste de hipótesis para la proporción

El fabricante de unas conservas de bonito afirma que el 90% al menos de sus envases superan los 500 gramos. Elegimos una muestra de 40 de esos envases y 6 de ellos pesaron menos de 500 gramos. Con un nivel de significación de 0,01, ¿podemos rechazar la afirmación del fabricante?

Dejamos al amable lector la resolución de este último problema.

6. EJERCICIOS

1.- Utilizando la siguiente tabla de números aleatorios elige 25 elementos de una población numerada del 1 al 300.

Tabla de números aleatorios

37331	20629	05871	14424	94678	05399	95604	79040
16526	22806	92963	95490	34551	06166	01571	55537
62626	42439	98390	29655	97945	64641	51301	90921
03067	39799	17667	31166	58864	00183	14411	53850
74862	21793	59250	27461	94718	15458	55696	57858
76817	13029	88834	83680	56172	87712	71585	20717
79135	94557	24287	16606	96420	78063	25156	38182
82185	14524	64774	77932	28400	29072	64044	05560
99429	21465	44928	18330	29547	08912	85833	26899
46640	12196	91021	32875	26630	21690	18749	50112

2.- Supongamos que en un instituto hay 250 alumnos de 1º de ESO, 200 de 2º, 175 de 3º y 150 de 4º de ESO. Además existen 200 alumnos de 1º de Bachilleraro y 275 de 2º. Explica cómo elegirías una muestra de 50 alumnos de dicho instituto, por muestreo aleatorio simple, sistemático y estratificado por niveles.

3.- Una biblioteca pública está organizada en cinco secciones (en el cuadro se indica el número de líbros existentes en cada sección). Con objeto de estimar el porcentaje de libros de edición española se quiere seleccionar una muestra de un 5% del número total de libros, a través de muestreo estratificado alealorio, considerando como estratos las secciones. Determina el número de libros que habría que seleccionar en cada sección, si: **a)** Consideramos afijación igual. **b)** Consideramos afijación proporcional.

Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4	Sección 5
500	860	1200	700	740

4.- En determinada provincia hay cuatro comarcas C_1, C_2, C_3 y C_4, con un total de 1.500.000 personas censadas. De ellas, 300.000 residen en C_1, 450.000 en C_2 y 550.000 en C_3. Se quiere realizar un estudio sobre las costumbres alimenticias en esa provincia basado en una muestra de 3.000 personas. **a)** ¿Qué tipo de muestreo deberíamos realizar si queremos que en la muestra resultante haya representación de todas las comarcas? **b)** ¿Qué número de personas habría que seleccionar en cada comarca atendiendo a razones de proporcionalidad? **c)** ¿Cómo seleccionaríamos las personas en cada comarca?

5.- Para realizar una encuesta sobre el consumo de fruta en cierta ciudad se tomó una muestra de forma que de cada barrio se consultaba a un número de personas proporcional a la superficie ocupada por el barrio. ¿Te parece un método fiable? ¿Por qué?

6.- Un distribuidor de alimentos quiere enviar un nuevo producto a una muestra de supermercados y elige una muestra de cada una de las 5 grandes cadenas de supermercados. ¿Qué tipo de muestreo está utilizando?

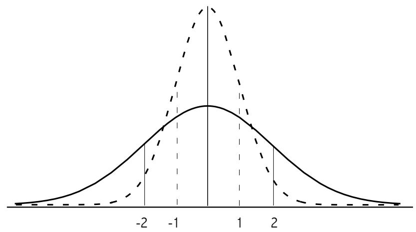
7.- La duración de las películas que programan en las cadenas de televisión sigue una distribución normal de media 105 minutos y desviación típica 35 minutos. Calcula la probabilidad de que la duración media de una muestra de 40 películas supere los 110 minutos.

8.- El peso de las barras de *kilo* de pan sigue una N(0.99, 0.04). Calcula la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 50 barras sea menor de 980 gramos.

9.- A una muestra de cien estudiantes varones de Bachillerato en cierta ciudad correspondió una estatura media de 1.73 m, siendo la desviación típica de 4.95 cm. Determina: **a)** El intervalo de confianza del 95% para la estatura media de la población. **b)** El intervalo de confianza del 99% para dicha estatura media.

10.- En una muestra de 50 jóvenes encontramos que la dedicación media diaria al ocio es de 250 minutos y la cuasi desviación típica de 7.3 minutos. Calcula el intervalo de confianza de la media de la población al 95% de nivel de confianza.

11.- En la figura de la derecha aparecen la curva de una distribución normal y la de la distribución de las medias muestrales de cierto tamaño. Se han dibujado también rectas que pasan por los puntos $\mu \pm \sigma$ de cada distribución. ¿Qué curva corresponde a la distribución de la población y cuál a la de las medias muestrales? ¿Cuál es el tamaño de las muestras?



12.- Se extrae una bola de una urna en la que hay tres bolas numeradas del 1 al 3. Halla la distribución de probabilidad de la variable *puntuación obtenida* y obtén su media. Escribe después la distribución de probabilidad de las medias de todas las muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Halla la media y la desviación típica de esta nueva distribución y compáralas con las de la primera.

13.- Calcula la probabilidad de que la media de una muestra de diez valores de una distribución normal difiera de la media de la población en menos del 10% de la desviación típica.

14.- Cierto banco ha hecho en una ciudad una encuesta, basada en un muestreo aleatorio a 36 adultos, sobre sus ingresos medios mensuales, obteniéndose 1250 € de media y una cuasivarianza de 90 €. Estima los ingresos *per cápita* en dicha ciudad con un intervalo de confianza del 95% y del 99%.

15.- El hipermercado *Carretoski* desea conocer cuánto gastan mensualmente como media los poseedores de una de sus tarjetas. Para ello diseña un muestra de 1000 clientes, sabiendo por experiencias previas que la desviación típica poblacional es de 200 €. Si desea tener una confianza del 99% en la estimación, ¿cuál será el error máximo que cometerá?

16.- Para conocer con un 99% de confianza y un error máximo de 1.5 € los gastos durante el fn de semana de los jóvenes de un barrio, se prepara una encuesta. ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra? (supón que σ=3.5 €)

17.- Al medir el tiempo de reacción a cierto estímulo, un psicólogo estima que la media del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuántas medidas deberá hacer para que sea del 99% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,1 segundos?

18.- A partir de una muestra aleatoria de 50 familias se ha determinado el intervalo de confianza al 99%: (42, 58) para el gasto medio mensual en electricidad por familia, expresado en euros. Determina: **a)** La estimación puntual que daríamos para el gasto medio mensual en electricidad por familia. **b)** ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar como mínimo al azar para garantizar, con una conflanza del 99%, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 3 euros?

19.- La duración de las bombillas fabricadas por una empresa sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 50 horas. Para estimar la duración se experimenta con una muestra. Calcula el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, se consiga un error en la estimación inferior a las 5 horas.

20- Una muestra aleatoria de 60 personas elegida para medir el nivel de colesterol en los habitantes de cierta ciudad produce una media de 235 mg/dl (miligramos por decilitro). Suponiendo que la desviación típica de la variable que mide las unidades de colesterol es de 28 mg/dl: **a)** Calcula el intervalo de confianza, con un nivel de confianza 0'95 para la media de la población. **b)** Determina el tamaño muestral necesario para reducir el intervalo de confianza anterior a la mitad.

21.- Halla el intervalo de confianza del 90% para la media de una población a partir de una muestra en que $n=40$, $\bar{x}=50$, $s=20$

22.- Tras tomar la temperatura a 30 enfermos de gripe a los que se ha suministrado un fármaco recientemente descubierto, resulta una temperatura media de 37'5°, con una cuasivarianza de 2'8°. Halla los intervalos de confianza del 90% y del 95% para la temperatura media de la población, así como el nivel de confianza correspondiente al intervalo (36'5, 38'5).

23.- El tiempo medio de espera en una consulta médica es de 15 min con una desviación típica de 6 minutos. Si tomásemos al azar un grupo de 35 enfermos: **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera del grupo fuera menor de 17 minutos? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera entre 12 y 16 minutos? **c)** ¿Entre qué valores se encontraría el tiempo medio con una seguridad del 95%? ¿Y del 99%?

24.- La estatura media de los niños de 10 años de cierta gran ciudad es de 135 cm con una desviación típica de 8 cm. Calcula el tamaño de muestra necesario para que el intervalo de confianza al 95% de la media muestral tenga una amplitud de 2 cm.

25.- Se quiere determinar con un nivel de confianza del 99% el peso medio de las pastillas producidas por ciertos laboratorios, siendo admisible un intervalo de confianza de una amplitud máxima de 0.08 gramos. Si la desviación típica de los pesos en la población es de 0.1 gramos, ¿cuántas pastillas deben tomarse en una muestra para estimar la media con ese nivel de confianza?

26.- Cuatro de cada diez habitantes de una determinada población lee habitualmente el periódico. Halla el intervalo característico para la proporción de habitantes de esa población que leen el periódico, en muestras de tamaño 49, correspondiente al 95%.

27.- Se sabe que 25 de cada 1000 yogures elaborados por una empresa pesan más de 100 gramos. ¿De qué tamaño habrá que tomar una muestra para que la proporción estimada de yogures de más de 100 gramos no difiera de la verdadera en más de un 5 % con un nivel de confianza de un: **a)** 95%. **b)** 99%. **c)** 99,9 %?

28.- ¿De qué tamaño conviene tomar la muestra de una línea de producción para tener una confianza del 95 % de que la proporción estimada de artículos defectuosos no difiere de la verdadera en más de un 1 %? (Se sabe por estudios previos que la proporción de objetos defectuosos es del orden del 0.05).

29.- Se pretende conocer la proporción de alumnos que beben alcohol durante el fin de semana. Se establece un margen de confianza del 95%, y se quiere que el error máximo sea del 3%. ¿Cuántos elementos deberían componer la muestra?

30.- Una empresa dispone de 4 centros comerciales (A, B, C y D) en determinada ciudad. La dirección de la empresa se plantea realizar algunas modificaciones en el horario de trabajo y decide consultar la opinión de sus trabajadores. Para ello, y a través de muestreo estratificado aleatorio con afijación igual, selecciona una muestra de 140 trabajadores, a los que pregunta si están a favor o en contra de la realización de tales modificaciones. Sabiendo que obtiene 56 respuestas a favor y que 7 trabajadores contestan en blanco: **a)** Obtén una estimación puntual para el porcentaje de trabajadores que están en contra de la realización de tales modificaciones y acompáñala con el error máximo cometido, para un nivel de confianza del 95%. **b)** Si en el centro comercial A, 7 trabajadores se mostraron favorables a las modificaciones, obtén la estimación puntual para el porcentaje de trabajadores del centro comercial A que están a favor, y acompáñala con el error máximo cometido, para una confianza del 98 %.

31.- En cierto instituto hay matriculados 800 alumnos. A una muestra seleccionada aleatoriamente de un 15% de ellos se les preguntó si utilizaban la cafetería del Instituto. Contestaron negativamente un total de 24 alumnos. **a)** Estima el porcentaje de alumnos que utilizan la cafetería del Instituto. **b)** Determina, con una confianza del 99 %, el error máximo cometido con dicha estimación.

32.- Se quiere realizar una encuesta a la población española para saber qué porcentaje aprueba la gestión del Gobierno. Suponiendo un margen de error del 3%, ¿a cuántas personas habría que entrevistar con un nivel de confianza del 99 %?

33.- Cierta empresa dispone de 1500 trabajadores. Con objeto de estimar el porcentaje de ellos que están dispuestos a utilizar un servicio de comedor, se seleccionó a través de muestreo estratificado aleatorio con afijación proporcional una muestra de tamaño 300 (se consideró tres estratos: personal directivo, personal administrativo y personal obrero). Sabiendo que en la muestra había 5 directivos y 25 administrativos, y que manifestaron su intención de utilizar el servicio de comedor 3 directivos y 90 obreros de la muestra obtenida, calcula: **a)** El número de directivos, administrativos y obreros existentes en esa empresa. **b)** El porcentaje estimado de obreros favorables a la utilización del servicio de comedor junto con su error máximo, con una confianza del 95%.

34.- En un sondeo a 800 personas elegidas al azar, realizado antes de una elección con sólo dos candidatos A y B, se obtuvo el siguiente resultado: 53% de votos para A y 47% para B. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane las elecciones?¿Y si la muestra se hubiera realizado con 2000 personas?

35.- Se realizó una encuesta a 350 familias, preguntando si poseían ordenador en casa o no, encontrándose que 75 de ellas lo poseían. Estima la proporción real de familias que dispone de ordenador, con un nivel de confianza del 95%. ¿Cuál es el error máximo?

36- Una empresa dispone de un total de mil trabajadores, distribuidos en dos factorías (F_1 y F_2). A través de muestreo estratificado aleatorio con afijación proporcional, se obtuvo una muestra de 50 trabajadores, a los que se les preguntó si estaban satisfechos con las condiciones de seguridad en que realizaban su trabajo. Un total de 30 respondieron negativamente. **a**) ¿En cuánto estimaríamos el porcentaje de trabajadores satisfechos con las condiciones de seguridad en su trabajo en esa empresa? **b)** Sabiendo que en F_1 hay 400 trabajadores y que 20 de los 30 que respondieron negativamente trabajan en F_2, estima el porcentaje de trabajadores satisfechos con las condiciones de seguridad en su trabajo, en cada una de las dos factorías. **c)** Para un nivel de confianza del 95%, halla los errores máximos cometidos con las estimaciones puntuales del apartado anterior.

37.- ¿Qué margen de error corresponde a una encuesta a 2.500 personas con un nivel de confianza del 95%? ($p=q=0.5$)

38.- Una gran compañía considera que el número medio de días de baja laboral por empleado es de 18. Mediante un estudio basado en 40 empleados elegidos aleatoriamente se ha obtenido una media de 16 días por año, con una cuasi desviación típica muestral de 2,4 días. ¿Se podrá admitir la hipótesis con un nivel de significación o riesgo del 5%?

39.- Se realizan 64 lanzamientos de un dado. ¿Cuántos *cincos* debemos obtener, como mínimo y como máximo, para aceptar que el dado no está trucado con un nivel de confianza del 95 %?

40.- Un equipo de psicólogos han comprobado que en cierta población infantil, el tiempo, en minutos, empleado en realizar determinada actividad manual sigue un modelo normal de probabilidad. Un grupo de 36 niños, seleccionados aleatoriamente en dicha población, realizaron esa actividad en un tiempo medio de 6.5 minutos con una desviación típica muestral de 1.5 minutos. A partir de esta información: **a)** ¿Qué error máximo cometeremos, con una confianza del 95%, si estimamos en 6.5 minutos el tiempo medio empleado en realizar la actividad manual en dicha población infantil? **b)** Para un nivel de significación del 1% ¿podríamos rechazar la hipótesis de que el tiempo medio en la población es de 7 minutos?

41.- Se ha comprobado que el tiempo de espera, en minutos, hasta ser atendido en cierto servicio de urgencias sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 100 personas que fueron atendidas en dicho servicio se ha calculado un tiempo medio de espera de 14.25 minutos y una varianza de 6.25 minutos^2. **a)** ¿Podremos afirmar con un nivel de significación del 5% ($\alpha=0{,}05$) que el tiempo medio de espera en ese servicio de urgencias no es 15 minutos? **b)** ¿Qué podríamos concluir si el nivel de significación hubiese sido del 0,1 % ($\alpha=0{,}001$)? **c)** ¿Existe contradicción en ambas situaciones?

42.- A partir de los datos recogidos sobre una muestra aleatoria de 121 pequeñas y medianas empresas de una region se ha calculado, para el año 2002, un beneficio medio de 89 millones de euros con una cuasivarianza de 30.25 millones de euros^2. **a)** ¿Podríamos rechazar con un nivel de significación del 0.001 la afirmación de que los beneficios medios en la pequeña y mediana empresa de dicha región son de 90 millones de euros? **b)** ¿Qué ocurriría para el nivel de significación 0. 05?

43.- Un equipo de educadores ha comprobado que en cierta población infantil el tiempo de reacción (en centésimas de segundo) ante determinado estímulo auditivo sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 100 niños de dicha población se ha obtenido una cuasi desviación típica de 12. Teniendo en cuenta la información proporcionada por esa muestra se ha contrastado la hipótesis de que la media poblacional es 50 frente a la hipótesis de que es distinta de 50, resultando que para un nivel de significación de un 5% se rechaza que la media poblacional sea 50, mientras que para un nivel de significación de un 1% se acepta que dicha media sea 50. **a)** ¿Cuál entre los siguientes sería el valor experimental con el que se ha realizado el contraste de hipótesis: 45, 49, 53? **b)** ¿Cuál sería el tiempo medio de reacción obtenido con los 100 niños de la muestra?

44.- Queremos estimar con error máximo del 3% el porcentaje de audiencia de un programa de televisión, con un 95% de confianza. No disponemos de información previa sobre el posible valor de p. ¿Cuántos telespectadores deberán ser encuestados?

45.- Tras comentar los resultados de una encuesta, una revista afirma: "En teoría, en 19 de cada 20 casos los resultados de esta encuesta, difieren en un punto porcentual de la proporción que se obtendría si hubiéramos encuestado a todos los españoles". ¿Podrías decir cuál fue el nivel de confianza y el tamaño de la muestra empleados en esta encuesta?.

46.- La ficha técnica de una encuesta elaborada por el C.I.S. fue:

Ambito: Nacional excepto Ceuta, Melilla y las Islas Canarias.
Universo: Personas mayores de 18 años.
Muestra: 1008 casos.
Entrevistas: Personales en el hogar del encuestado.
Selección: Aleatoria de secciones censales para la determinación del hogar y estratificada por edad y sexo para el entrevistado.
Trabajo de campo: Del 19 al 29 de diciembre de 1999.
Margen de error: $\pm 3{,}1\%$ para $p=q=0.5$, y un nivel de confianza del 95.5%

a) Calcula el error correspondiente a las estimaciones.

b) Si a una de las preguntas ha contestado afirmativamente el 68.3% de los encuestados, ¿cuál es el intervalo de confianza según los datos técnicos?