Contenidos

Tema I

Matrices

1.1 Concepto de Matriz o Tabla

Definición 1.1: Una matriz A de dimensión $m \times n$ es una tabla ordenada de $m \cdot n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas.

Una matriz de orden $m \times n$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde m indica el número de filas y n el número de columnas. El símbolo (a_{ij}) designa la matriz completa, mientras que a_{ij} representa el elemento que se encuentra en la fila i-ésima y en la columna j-ésima.

El número de filas multiplicado por el número de columnas recibe el nombre de **dimensión** de la matriz.

Si m coincide con n se dice que la matriz es cuadrada de orden n.

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

$$A = B \iff A, B \in \mathcal{M}_{m \times n} \wedge a_{ij} = b_{ij} \; \forall i = 1, \dots, m \; \forall j = 1, \dots, n$$

1.2 Algunos Tipos de Matrices

1.2.1 Atendiendo a la forma

Matriz fila: es aquella que tiene sólo una fila

$$A = (3 \quad 2 \quad 5 \quad 1)$$

También llamado **vector fila**.

Matriz columna: es aquella que tiene sólo una columna

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

También llamado **vector columna**.

Matriz cuadrada: es aquella que tiene igual número de filas que de columnas; en caso contrario se llama **rectangular**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

cuadrada **rectangular**

El conjunto formado por los elementos de la forma a_{ii} de una matriz cuadrada se llama **diagonal principal**

Se define **traza** de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal principal.

Matriz traspuesta: dada una matriz A, se llama **traspuesta** de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

De la definición se deduce que que si A es de dimensión $m \times n$, entonces la matriz A^t es de dimensión $n \times m$.

La matriz traspuesta cumple las siguientes propiedades:

1.- $(A^t)^t = A$
2.- $(A+B)^t = A^t + B^t$
3.- $(kA)^t = kA^t$
4.- $(AB)^t = B^tA^t$

Matriz simétrica: se llama así a toda matriz cuadrada tal que $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica o hemisimétrica: se llama así a toda matriz cuadrada que cumpla para todo i y j $a_{ij} = -a_{ji}$. Como consecuencia inmediata de ello, se deduce que la diagonal principal de una matriz antisimétrica está formada por ceros

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Atendiendo a los elementos

Matriz nula: es aquella en la que todos sus elementos son ceros.

Matriz diagonal: se llama así a toda matriz cuadrada en la que todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son ceros. Es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar: es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz unidad o identidad: es una matriz escalar con todos los elementos de la diagonal principal iguales a uno.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular: es una matriz cuadrada en la que todos los términos por encima (o por debajo) de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

tr. superior **tr. inferior**

1.3 Operaciones con las Matrices

1.3.1 Suma de Matrices

La suma de dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz $S = (s_{ij})$ de igual dimensión y cuyo término genérico es:

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La suma de las matrices A y B se designa por $A + B$.
La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$

2. Conmutativa: $A+B=B+A$

3. Elemento Neutro: La matriz nula $A+O=A$

4. Elemento Opuesto: El elemento opuesto de una matriz dada A, es la matriz $-A$, que se obtiene cambiando de signo a todos los elementos de A. $A+(-A)=O$

A partir de ahora, representaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas en las que sus elementos son números reales.

La diferencia de las matrices A y B se representa por $A-B$ y se define como

$$A-B=A+(-B)$$

La suma y la diferencia de dos matrices no está definida si sus dimensiones son diferentes.

Ejemplo 3.1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Producto de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz $A=(a_{ij})$ es otra matriz $B=(b_{ij})$ de la misma dimensión que A tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k. Es decir,

$$b_{ij}=k\cdot a_{ij}$$

El producto de un número real por una matriz verifica las siguientes propiedades:

- $k\cdot(A+B)=kA+kB$
- $(k+h)\cdot A=kA+hA$
- $k\cdot(hA)=(k\cdot h)A$
- $1\cdot A=A$, $O\cdot A=O$

donde A y B son matrices cualesquiera de la misma dimensión, k y h son números reales y 1 es el elemento unidad de los números reales.

Con todo esto, se dice que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con la suma, y con el producto por escalar, es un **espacio vectorial** real, llamado espacio vectorial de las matrices reales de dimensión $m\times n$, y se denota por

$$(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$$

1.4 Producto de Matrices. Matrices Invertibles

1.4.1 Producto de una Matriz Fila por una Matriz Columna

Se define el producto de una matriz fila por una matriz columna o **producto escalar** del siguiente modo:

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx'+yy'+zz'$$

1.4.2 Producto de dos Matrices

El producto de una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ por la matriz $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times p$, es otra matriz $P = (p_{ij})$ de dimensión $m \times p$ tal que cada elemento p_{ij} se obtiene multiplicando escalarmente la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda.

"El número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz"

$$A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $A(BC) = (AB)C$

2. No Conmutativa: El producto de matrices, en general, no es conmutativo, es decir, $AB \neq BA$

3. Si A es una matriz cuadrada de orden n, se tiene

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

siendo I_n la matriz unidad de orden n.

4. Dada una matriz cuadrada A de orden n, "SI" existe otra matriz B también de orden n tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

entonces se dice que B es la **matriz inversa** de A y se denota por A^{-1}, es decir, dos matrices cuadradas de orden n son inversas si su producto es la matriz unidad de orden n.

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es **regular** o **invertible**; caso contrario se dice que es **singular**.

5. El producto de matrices es distributivo respecto a la suma de matrices, es decir,

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

Ejemplo 4.1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 19 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

6. El producto es asociativo y conmutativo respecto a escalares.

$$k(AB) = (kA)B = A(kB) \;\; \forall k \in I\!R$$

1.4.3 Matriz inversa

Matriz inversa de A es aquella matriz que multiplicada por A nos da la identidad. Cumple las siguientes propiedades:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. La inversa de AB es $(AB)^{-1}$ donde $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

1.4.4 Método de Gauß-Jordan para hallar matriz inversa

Para hallar la matriz inversa de una matriz $n \times n$ por este método debemos formar una matriz de orden $n \times 2n$ donde las n primeras columnas las forman las columnas de la matriz dada y las n siguientes forman la matriz unidad.

Luego, y mediante las propiedades elementales de las matrices por filas, se consigue que en las n primeras columnas quede la matriz unidad, quedando en las n restantes columnas la matriz inversa.

Ejemplo 4.2:*Intentemos hallar la matriz inversa mediante este método de la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Formemos la matriz indicada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Realizando las operaciones $F_2 + F_1$, $2F_3 - F_2$ y $1/2F_2$ obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

1.5 Potencia de matrices

Se define la potenciación de una matriz A de la siguiente forma:

$$A^0 = I_d$$

$$A^1 = A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\ veces}$$

1.6 Rango de una Matriz. Cálculo por el Método de Gauß

El **rango** o **característica** de una matriz M es el número de filas o de columnas linealmente independientes. Sean

$$\begin{array}{ll} F_1 \equiv \text{fila } 1^{\underline{a}} & C_1 \equiv \text{columna } 1^{\underline{a}} \\ F_2 \equiv \text{fila } 2^{\underline{a}} & C_2 \equiv \text{columna } 2^{\underline{a}} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ F_m \equiv \text{fila m} & C_m \equiv \text{columna m} \end{array}$$

Se consideran las filas (o las columnas) como vectores. Entonces:

$$rg(M) = rg(F_1, F_2, \ldots, F_m) = rg(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

Ejemplo 6.1:
El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

es 2, ya que las dos primeras filas son linealmente independientes, y la tercera es igual al doble de la segunda menos la primera. Obsérvese que se cumple la misma relación con las columnas.

1.6.1 Cálculo del Rango por el Método de Gauß

El rango de una matriz no varía si se realizan las transformaciones elementales siguientes:

1. si se permutan dos filas o dos columnas,
2. si se multiplica o divide una fila o columna por un número real no nulo,
3. si a una fila o a una columna se le suma o resta otra paralela.

El rango de una matriz no varía si se suprimen:

4. las filas o columnas nulas,
5. las filas o columnas proporcionales a otras,
6. las filas o columnas combinación lineal de otras.

Las transformaciones anteriores nos permiten calcular el rango de una matriz por el método de Gauß.

Ejemplo 6.2:*Hallar, utilizando el método de Gauß el rango de la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

La fila 4ª es igual a la suma de la 2ª y 3ª

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

La fila 3ª es igual a la suma de la 1ª y 2ª

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad \textit{porque las filas no son proporcionales}$$

Ejemplo 6.3: *Utilizar el método de reducción para calcular el rango de:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a \to 2^a - 2\times 1^a \\ 3^a \to 3^a - 4\times 1^a}}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ 3^a \to 3^a - 2\times 2^a}}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

1.7 Ecuaciones matriciales

En este tipo de ecuaciones las incógnitas son matrices que deberán de calcularse mediante los mismos métodos que se usaban para las ecuaciones normales pero teniendo en cuenta las propiedades de las matrices. Hay que tener muy en cuenta que una matriz no se puede multiplicar indistintamente por la derecha o la izquierda.

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

PROBLEMAS DE MATRICES

1. Calcula a, b , c y d para que se cumpla:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$$

2. Con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

$$a)\ A+B-C \quad b)\ 3A-2B+5C \quad c)\ A^2-3B \quad d)\ AC-B \quad e)\ AB+BC-CA$$

3. Calcula $3AA^t - 2I_d$, siendo $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Halla los posibles productos.

5. Dadas dos matrices A y B demuestra que $AB \neq BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Encuentra todas las matrices que conmuten con:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ y\ b)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones:

$$a)\ A+B \quad b)\ 3A-4B \quad c)\ AB \quad d)\ AD \quad e)\ BC \quad f)\ CD \quad g)\ A^tC \quad h)\ D^tA^t \quad i)\ B^tA \quad j)\ D^tD \quad k)\ DD^t$$

8. Halla la n-ésima potencia de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Calcula A^n para $n \in I\!N$ para los siguientes casos de A:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Halla la matriz inversa de:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Calcula $B^{-1}A^2B$ siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

12. Halla las matrices inversas de:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

13. Determina el valor o valores de a para las siguientes matrices tengan inversas:
$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -a \end{pmatrix}$$

14. Estudia el rango de las siguientes matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

15. ¿Es posible que para dos matrices no cuadradas A y B pueda existir AB y BA?.

16. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Calcula $(A - I_d)^2(A - 5I_d)$.
   (b) Obtén A^t y razona si existe la matriz inversa de A.

17. Resuelve la ecuación matricial:
$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

18. Calcula X tal que $X - B^2 = AB$ siendo:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Resuelve las ecuaciones $a)$ $A = BX$ y $b)$ $A = XB$ siendo:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Calcula las matrices X e Y tales que sean solución de los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} 2X-3Y=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} \\ X+Y=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ X+3Y=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

21. Dos editoriales ponen a la venta los libros de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, matemáticas I y Latín I. La matriz A representa el precio de los distintos libros en las dos editoriales:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Mat. aplic. I} & \text{Mat. I} & \text{Latín I} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textit{Editorial I} \\ \textit{Editorial II} \end{array} & \begin{pmatrix} 2.100 & 3.000 & 2.500 \\ 2.700 & 2.900 & 2.300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dos librerias venden estos libros y obtienen las ventas que se muestran en la matriz B:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{Librería 1} & \text{Librería 2} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Matemáticas aplicadas I} \\ \text{Matemáticas I} \\ \text{Latín I} \end{array} & \begin{pmatrix} 200 & 175 \\ 150 & 100 \\ 100 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) ¿Qué representa el producto $A \cdot B$?.

(b) Si la librería 1 se queda con un 30% de las ventas y la librería 2 con un 35%, ¿Cuánto ganó cada una de las librerías con los libros de cada editorial?.

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Sean las matrices A y B, definidas como:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X tal que verifique $XB = A + B$

2. Sean dos matrices cuadradas A y B:

(a) ¿Tienen la misma solución las ecuaciones $AX = B$ y $XA = B$?. Razona la respuesta.

(b) ¿Puede ocurrir que una tenga solución y la otra no?.

(c) Resuelve ambas ecuaciones para:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula dos números reales x e y para que se verifique $A+xA+yI_d = 0$, siendo I_d la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

4. Determina los valores de a y b, de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

5. ¿Es conmutativo el producto de matrices?. Si la respuesta es afirmativa, demuéstralo; si es negativa, da un ejemplo que lo ponga de manifiesto.

¿Qué matrices conmutan con la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?.

6. En un cierto instituto, el 60% del alumnado de primero de BUP pasa a segundo de BUP, el 85% de segundo pasa a tercero, y el 90% de los de tercero pasa a COU. Repiten curso el 15% de primero, el 10% de segundo, el 5% de tercero y el 4% de COU. El resto abandona sus estudios y no se admiten esudiantes de otros centros salvo para comenzar el ciclo. Además, se sabe que el 65% de los estudiantes que terminan EGB cada año es el 95% de las que terminaron el anterior.

   (a) Construye una matriz de dimensión 5×5 que muestre la evolución entre cursos, de la población esudiantil en dicha localidad.

   (b) Si, en cierto curso, había 700 estudiantes que terminaban EGB, 400 en primero, 300 en segundo, 200 en tercero y 175 en COU, ¿Cuál será la distribución de estudiantes en el curso siguiente?.

7. Sea M la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I_d la matriz identidad de orden tres. Cacula la matriz J tal que $M = J + I_d$. Calcula también las matrices J^2, J^3 y J^{1994}.

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula:

$$a)\ (A+B)/2 \qquad b)\ (A-B)^2 \qquad c)\ A^{-1}$$

9. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo A la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Resuelve la ecuación $AX - B + C = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Determina las matrices A y B sabiendo que:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$

12. Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

   (a) Encuentra una matriz X que cumpla $3X - 2A = 5B$

   (b) Halla la matriz inversa de A.

SOLUCIONES DE MATRICES

1. $a = 5 \quad b = 12 \quad c = -6 \quad d = -4$

2. a) $A + B - C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ b) $3A - 2B + 5C = \begin{pmatrix} 47 & -13 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$

   c) $A^2 - 3B = \begin{pmatrix} 26 & -9 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ d) $AC - B = \begin{pmatrix} 34 & -11 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

   e) $AB + BC - CA = \begin{pmatrix} -40 & 11 \\ 26 & 12 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$

4. $AB = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 16 \\ -6 & 13 & 9 \\ -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -8 \\ -3 & 16 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $AC = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 4 \\ 4 & -12 & -11 \end{pmatrix}$

   $CA = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & -4 \\ 24 & 37 & -15 \end{pmatrix}$ $BC = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 20 \\ 8 & -14 & 4 \\ 3 & -10 & -5 \end{pmatrix}$ $CB = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 9 & -8 & 5 \\ -17 & 29 & -4 \end{pmatrix}$

5. Teórico.

6.
$$a) \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ y } b) \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

7.
$$a) A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad b) 3A - 4B = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -10 \\ 16 & 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad c) AB(no)$$
$$d) AD = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad e) BC = \begin{pmatrix} -11 & 3 & 12 & -18 \\ 11 & -5 & -8 & -6 \end{pmatrix} \qquad f) CD(no)$$
$$g) A^tC(no) \qquad h) D^tA^t = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad i) B^tA = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 3 \\ 16 & -4 & 17 \end{pmatrix} \qquad j) D^tD = 14$$
$$k) DD^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

8.
$$a)\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ B^n = \begin{pmatrix} 1 & 7n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ C^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ n3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}$$

9. a) $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $D^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.
$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

12. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \ No\ tiene$ $C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

    $D^{-1} = \ No\ tiene$ $E^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 27 & -31 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. $a)\ a \neq -1$ $b)\ a \neq \frac{9}{5}$

14. $$A = 3 \quad B = 2 \quad C = 2 \quad D = 2 \quad E = 2 \quad F = 3$$

15. Si, por ejemplo dos matrices de $3x2$ y de $2x3$

16. (a) Matriz nula.
    (b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si existe A^{-1}

17. $$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

18. $$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

19. $$a)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

20. $$\left\{\begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{5}{2} & -\frac{11}{10} \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} -\frac{13}{15} & -\frac{2}{5} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

21. (a) Ganancia de cada editorial en cada librería
    (b) 1) 697.500 2) 634.900

SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

1. $$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) No, sólo si da la casualidad de que $A^{-1}B = BA^{-1}$
   (b) No.
   (c) $$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 14 & 35 \end{pmatrix} \qquad X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \end{pmatrix}$$

3. $x = -1$ $y = 0$

4. $a = 2 \qquad b = -1$

5. No. Depende de cada alumno. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

6. No es obligatorio.

7. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = 0 \qquad J^{1994} = 0$

8. $a)\ (A+B)/2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ (A-B)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad c)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

9.
$$-\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 6 & 3/2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

10.
$$X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

11.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 28 & 14 \end{pmatrix}$$

12. (a) $X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$

(b) $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Tema II

Determinantes

2.1 Determinantes de segundo y tercer orden

En forma general se se define el **determinante** como:
La aplicación que asocia a cada matriz cuadrada un número real.

$$det : \mathcal{M}_n \longrightarrow I\!R$$

2.1.1 Determinantes de segundo orden

Dada la matriz cuadrada de 2º orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante** de A al número real

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Es decir, el determinate de una matriz cuadrada de 2º orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo 1.1:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 = -13$$

2.1.2 Determinantes de tercer orden

Dada la matriz cuadrada de 3er orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante** de A al número real

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

Esta es una fórmula fácil de recordar mediante la llamada regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ Productos positivos } - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ Productos negativos}$$

- Los productos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las dos diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

- Análogamente, se forman los productos con signo $-$ pero tomando como referencia la diagonal secundaria.

Aplicando la regla de Sarrus se tiene que:

- el determinante de la matriz nula es 0.
- el determinante de la matriz unidad I_3 es 1.
- el determinante de una matriz diagonal o triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 1.2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 0 - 5 - 8 - 0 + 30 = -19$$

2.2 Determinantes de orden n

Si pretendemos generalizar las definiciones dadas de determinantes de 2º y 3er orden a un determinante cualquiera de orden n, debemos analizar los dos principios básicos que han guiado la definición de estos casos particulares que son:

- Cada término del desarrollo del determinante es el producto obtenido al tomar un único elemento de cada fila y de cada columna.
- El signo de cada término depende de la elección del orden de las columnas, ya que las filas se pueden tomar ordenadamente.

Dada la matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante** de A al número real obtenido al sumar todos los productos posibles de n factores, elegidos entre los $n \times n$ elementos de la matriz dada, de modo que, en cada uno de ellos aparezca un elemento, y sólo uno, de cada fila y de cada columna. Se antepondrá a cada sumando (formado por el producto de n elementos) el signo $+$ ó $-$, según la permutación de columnas tenga un número par o impar de trasposiciones.

Ejemplo 2.1: *En el determinante de orden 3, veamos qué signo tendrían los sumandos:*

- $a_{11}a_{22}a_{33}$. *Las columnas (los segundos subíndices) están colocadas en el orden (123), es decir, cada número está en su sitio, no hay trasposiciones, hay un número par de trasposiciones (0) con lo que le asignamos el signo $+$.*
- $a_{12}a_{21}a_{33}$. *Las columnas tienen el orden (213). El 2 se antepone al 1, con lo que hay una trasposición: signo $-$.*
- $a_{12}a_{23}a_{31}$. *Las columnas son (231). El 2 está antes que el 1 y el 3 también. 2 trasposiciones, signo $+$.*

2.3 Propiedades de los determinantes

(1) Si los elementos de una fila o una columna se descomponen en dos sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna los primeros y segundos sumandos respectivamente, y en las demás los mismos elementos que en el inicial.

$$\det(F_1 + F_1', F_2, F_3) = \det(F_1, F_2, F_3) + \det(F_1', F_2, F_3)$$

Ejemplo 3.1:

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2+4 & 3+6 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

(2) Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\det(kF_1, F_2, F_3) = k\ \det(F_1, F_2, F_3) = \det(F_1, kF_2, F_3) = \det(F_1, F_2, kF_3)$$

Ejemplo 3.2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

(3) Si A y B son matrices cuadradas, entonces

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(4) Si se permutan dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial. **Ejemplo 3.3:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10+9-12-5 \;=\; 2 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12+5-10-9 \;=\; -2$$

(5) Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna con todos los elementos nulos, su determinante vale cero.

$$\det(F_1, F_2, 0) = 0$$

(6) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante vale cero.

$$\det(F_1, F_1, F_3) = 0$$

(7) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante vale cero.

$$\det(F_1, kF_1, F_3) = 0$$

(8) Si una matriz cuadrada tiene una fila (columna) combinación lineal de las restantes filas (columnas), su determinante vale cero.

$$\det(F_1, aF_1 + bF_3, F_3) = 0$$

Las propiedades **(5)**, **(6)**, **(7)** y **(8)** se pueden enunciar diciendo:
"si el rango de una matriz cuadrada de orden n es menor que n, su determinante es cero".
Reciprocamente:
"si el determinante de una matriz cuadrada de orden n es cero, su rango es menor que n.

(9) Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma una paralela, su determinante no varía.

$$\det(F_1 + F_2, F_2, F_3) = \det(F_1, F_2, F_3) + \underbrace{\det(F_2, F_2, F_3)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \det(F_1, F_2, F_3)$$

(10) Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma una paralela, multiplicada por un número, su determinante no varía.

$$\begin{aligned} \det(F_1 + kF_2, F_2, F_3) &= \det(F_1, F_2, F_3) + \det(kF_2, F_2, F_3) = \\ &= \det(F_1, F_2, F_3) + k\,\underbrace{\det(F_2, F_2, F_3)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \det(F_1, F_2, F_3) \end{aligned}$$

2.4 Cálculo de un determinante por el Método de Gauß

Utilizando conjuntamente las propiedades **(4)**, **(9)** y **(10)** del apartado anterior, dado un determinante se puede hallar otro que valga lo mismo y tal que todos los elementos de una fila o columna sean cero excepto uno de ellos. El cálculo del determinante se realiza entonces aplicando la definición.

Reducción total:

Repitiendo este proceso se puede obtener un determinante de valor igual al inicial con la propiedad de que todos elementos bajo la diagonal principal son nulos. Este método es el mismo que se utilizó para hallar el rango de una matriz.

El esquema final es: $\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \;=\; a \cdot b \cdot c \cdot d$

El determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Reducción parcial:

El proceso de reducción puede darse por terminado cuando el siguiente determinante a reducir sea de 2° o 3$^{\underline{\text{er}}}$ orden, ya que éstos se pueden calcular directamente. Los esquemas finales son:

$$\begin{array}{|cc|cc|} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ \hline 0 & 0 & c & m \\ 0 & 0 & n & d \end{array} \qquad \begin{array}{|c|ccc|} a & * & * & * \\ \hline 0 & b & m & n \\ 0 & p & c & q \\ 0 & r & s & d \end{array}$$

El determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal del determinante reducido por el determinante de 2° o 3$^{\underline{er}}$ orden, sin reducir.

Ejemplo 4.1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ F_4 \to F_4 - 3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ F_3 \to F_3 + F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 42$$

2.5 Cálculo de un determinante por los elementos de una fila o columna

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A, se obtiene una submatriz M_{ij} que recibe el nombre de **matriz complementaria o Menor** del elemento a_{ij}.

Ejemplo 5.1:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

es la matriz complementaria de a_{11}

Se llama **adjunto** de a_{ij}, y se designa por A_{ij}, al determinante de la matriz complementaria M_{ij} precedido del signo $+$ ó $-$ según la suma $i + j$ de los subíndices sea par o impar respectivamente.

Si A es una matriz cuadrada de 4$^{\underline{o}}$ orden, el desarrollo del determinante de A puede expresarse:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Este procedimiento es válido para cualquier fila o columna, por tanto:
"El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes".

Esta regla rebaja el orden del determinante que se pretende calcular a una unidad menos. Para evitar el cálculo de muchos determinantes, conviene que haya el mayor número posible de ceros en la fila o columna elegidas, y si no es así, obtenerlos por el método de reducción.

Ejemplo 5.2:*Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 - 2C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 1 + 27 = 19$$

2.6 Cálculo del rango de un conjunto de vectores y de una matriz por determinantes

Recordemos que:

- El rango de un conjunto de vectores es el número de vectores linealmente independientes que contiene dicho conjunto.

- El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

El cálculo del rango de un conjunto de vectores y de matrices por determinantes se basa en dos resultados recíprocos:

- Si dos vectores fila o columna de una matriz cuadrada son linealmente dependientes, su determinante es cero.
- Si el determinante de una matriz cuadrada es cero, al menos dos vectores fila y dos vectores columna son linealmente dependientes.

Para calcular el rango de una matriz, normalmente se usa el método de "orlar" la matriz. Se toma un elemento distinto de cero, seguidamente se consideran todos los determinantes de orden 2 que "orlan" (rodean) al elemento no nulo considerado. Si todos los determinantes de orden 2 son iguales a cero, el rango de la matriz es 1; si hay algún determinante de orden 2 distinto de cero, el rango de la matriz es por lo menos 2; se toma uno de los determinantes de orden 2 y se sigue orlando a éste con los determinantes de orden 3. Si todos los determinantes de orden 3 son iguales a cero, el rango de la matriz es 2; si hay algún determinante de orden 3 distinto de cero, el rango de la matriz es por lo menos 3; se toma uno de ellos como base y se sigue orlando con los determinantes de orden 4, y así sucesivamente.

Ejemplo 6.1:*Calcular mediante determinantes el rango de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -8+12+4-8=0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -14+16+12-14=0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -14+20+12-14=4$$

Hay un determinante de orden 3 distinto de cero, el rango de A es 3.

2.7 Cálculo de la matriz inversa por determinantes

Veremos en esta sección un método para hallar la matriz inversa que se basa en los determinantes. Este método es bueno para matrices cuadradas de orden 2 ó 3, ya que para órdenes superiores los cálculos son demasiado plúmbeos.

- Matriz adjunta:

Dada una matriz cuadrada A se llama **matriz adjunta** de A, y se representa por $\text{Adj}(A)$ o A^{adj} a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto correspondiente A_{ij}.

El adjunto A_{ij} es el determinante de la matriz complementaria M_{ij} precedido del signo $+$ ó $-$ según que la suma $i+j$ sea par o impar respectivamente.

Ejemplo 7.1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{llll} M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & A_{11} = & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & = 2 \\ M_{21} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & A_{21} = & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & A_{33} = & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & = 6 \end{array}$$

es decir

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Las **filas** de la matriz A y de su adjunta $\text{Adj}(A)$ verifican las dos siguientes propiedades:
- La suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos es igual al valor del determinante.
- La suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra fila diferente es igual a cero.

Si trasponemos los elementos de $\text{Adj}(A)$, las filas se transforman en columnas, y las propiedades anteriores se pueden escribir mediante el producto

$$A \cdot (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- <u>Matriz inversa:</u>

El producto de una matriz por la traspuesta de su adjunta proporciona una matriz escalar, en la que el valor constante es $\det(A)$. Para que aparezca la matriz unidad, basta dividir los dos miembros por $\det(A)$. Esto sólo será posible si $\det(A) \neq 0$. Por tanto si $\det(A) \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot (\text{Adj}(A))^t = I$$

y por definición de matriz inversa, siempre que $|A| \neq 0$:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{Adj}(A))^t}$$

y además se tiene que

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Ejemplos 7.2:

(1) En el ejemplo anterior

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (Adj(A))^t = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(2) Hallar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 3$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS DE DETERMINANTES

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 5 & -a \\ 2a & 4a^2 \end{vmatrix}$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -9 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad e)\ \begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad f)\ \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g)\ \begin{vmatrix} a & 2a & 3a \\ 2b & 4b & 6b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad h)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad i)\ \begin{vmatrix} -1 & a & -a \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

$$j)\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad k)\ \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix} \quad l)\ \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}$$

2. Prueba sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{vmatrix}$$

3. Halla los valores de a que anulan el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ a+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden 4, cuyos elementos están definidos como $A_{ij} = 2i - j$. Calcula el determinante de A.

5. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden 3, cuyos elementos están definidos como $A_{ij} = i + j$. Calcula el determinante de A.

6. Demuestra la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

7. (a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.
   (b) La matriz A verifica que $AA^t = I_d$. Halla los posibles valores del determinante de A.

8. ¿Cuales de las siguientes matrices tienen inversa?

$$a)\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} a & -1 & 4 \\ 3 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 5 & -1 & a \end{pmatrix} \quad i)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & a \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \quad k)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad l)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & x & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\ \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2 \qquad c)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12 \quad e)\ \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0 \quad f)\ \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & -3 & 1 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -61$$

10. Para los determinantes $A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}$, $A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$

   (a) Halla los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12}, cuando existan.

   (b) Halla los adjuntos de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12}, cuando existan.

11. Calcula los adjuntos de los elementos de la tercera columna de :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & a & 0 \\ 5 & 3 & b & -1 \\ 0 & 7 & c & 4 \\ 0 & 2 & d & 6 \end{pmatrix}$$

12. Halla las matrices adjuntas de las matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$$

13. Encuentra una respuesta razonada a las siguientes cuestiones:

   (a) En un determinante realizamos una cierta permutación de filas, ¿Qué podemos decir del valor del nuevo determinante obtenido?.

   (b) Se sabe que $det(A) = 5$, y que A es una matriz de orden 2. ¿Cuánto vale $det(3A)$?.

   (c) Dos matrices A y B son inversas. Si $det(A) = 3$, ¿Cuánto vale $det(B)$?.

14. Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Calcula las matrices inversas de:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad h)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix} \qquad i)\ \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

2. Resuelve la ecuación $det(A - xI_d) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, donde I_d es la matriz identidad de orden 3 y $x \in I\!R$ la incógnita.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$, averigua para que valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 2$.

4. Determina los valores de m que anulan el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$

5. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}$=10

6. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2$$

9. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Encuentra una matriz X qe verifique la igualdad $AB - X = A^2$
   (b) Calcula el determinante de X.
   (c) Calcula, si es posible, la inversa de X

10. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

11. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$$

12. ¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz A?,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Para los valores de a que se acaban de encontrar, calcula los determinantes de las matrices AA^t y A^tA.

13. Calcula las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Si A es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $B = (A^tA^{-1})^2$.

Halla el determinante de la matriz $(A^tA^{-1})^{276}$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & -1 \\ -t & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

   (b) En el caso $t = 2$, halla, si existe, la matriz X que cumple: $XA = (1 \;\; 0 \;\; -1)$

SOLUCIONES DE DETERMINANTES

1. $$a)\ -6 \quad b)\ -3 \quad c)\ 22a^2 \quad d)\ -127 \quad e)\ 111-37x \quad f)\ x^2-x$$
$$g)\ 0 \quad h)\ 0 \quad i)\ -4x-4 \quad j)\ 6 \quad k)\ -m^2-4m+1 \quad l)\ (m+1)^3+1$$

2. Teórico.

3. $a=-3,5$

4. 0

5. 0

6. Teórico.

7. (a) 1
   (b) ± 1

8. $$a)\ Si \quad b)\ Si \quad c)\ Si$$
$$d)\ Si\ x\neq 1 \quad e)\ Si\ x\neq \pm\sqrt{13}-4 \quad f)\ Si\ x\neq 1,-2$$
$$g)\ Si\ x\neq -1,-3 \quad h)\ Si\ x\neq -4,7 \quad i)\ Si\ x\neq 27/4$$
$$j)\ Si\ x\neq 2 \quad k)\ Si\ x\neq 1,-8 \quad l)\ Si\ x\neq 2$$

9. $$a)\ x=1 \quad b)\ x=-1,3 \quad c)\ x=\pm 1 \quad d)\ x=3 \quad e)\ \forall x\in I\!R \quad f)\ x=1,-10/3$$

10. (a)
$$m_{11}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \qquad m_{23}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} \qquad m_{32}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} \qquad m_{12}=\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix}$$
$$m_{11}=b \qquad m_{12}=a$$
$$m_{11}=\begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad m_{23}=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \end{vmatrix} \qquad m_{32}=\begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad m_{12}=\begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
(b)
$$A_{11}=a^2+b^2 \qquad A_{23}=b^2-ab \qquad A_{32}=b^2-ab \qquad A_{12}=b^2-ab$$
$$A_{11}=b \qquad A_{12}=-a$$
$$A_{11}=-bc \qquad A_{23}=-a^2b+a^2bd \qquad A_{32}=-2a^2cd-2ad \qquad A_{12}=a+ad+a^2c$$

11. $$A_{13}=170 \qquad A_{23}=-170 \qquad A_{33}=40 \qquad A_{43}=-55$$

12. $$a)\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix} ac-bc & 0 & b-a \\ b^2-c^2 & c-b & c-b \\ c^2-ab & b-c & a-c \end{pmatrix}$$

13. (a) Cambia de signo.
    (b) 45
    (c) 1/3

14.
$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

15.
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

16.

$a)$ $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $b)$ $-\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $d)$ $\frac{1}{a+6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14-a & 3a-2 & -20 \\ a-7 & 1-2a & 13 \end{pmatrix}$

$e)$ $\frac{1}{m^2+m-2}\begin{pmatrix} (m+1)/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ $f)$ $\frac{1}{3a-1}\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -a \\ -2 & 3 & -1 \\ (3-a)/2 & -2 & 2a \end{pmatrix}$

$g)$ $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ $h)$ $\frac{1}{2(4a-27)}\begin{pmatrix} 4a & 2a-9 & -12 \\ -2a & a-9 & 6 \\ -18 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

$i)$ $\frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} -a-1 & 1-a & 2a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ a^2+a & a^2-1 & -a^2-a \end{pmatrix}$

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. $4a+1$
2. $x = 1, 0, 4$
3. $m \neq -1, -3. A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -12 & 6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $m \neq -\frac{1}{3}$
5. $x = \pm\sqrt{2}$
6. Si $a = 1$ el rango es 2, si $a \neq 1$ el rango es 3
7. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $x = -1, 3$
9. (a)
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b) $|X| = 1$.
   (c)
$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
10. 0

11. $x = 3, -\frac{38}{8}$

12. $a = 3$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 66 & 21 & 45 \\ 21 & 14 & 7 \\ 45 & 7 & 38 \end{pmatrix} \qquad A^tA = \begin{pmatrix} 26 & 1 & 45 \\ 1 & 14 & 3 \\ 45 & 3 & 78 \end{pmatrix}$$

13.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & -10 & -3 \end{pmatrix}$$

14. $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; 2^{276}

15. (a) Siempre tiene.
    (b) $-\frac{1}{3}(1 \;\; 1 \;\; -1))$

Tema III

Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Soluciones y clasificación

Todo sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones o tres incógnitas y tres ecuaciones se pueden reducir a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ a''x & + & b''y & + & c''z & = & d'' \end{array}\right.$$

donde los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son números reales.

Una **solución de un sistema** de ecuaciones con dos incógnitas son dos números reales s_1 y s_2 tales que al sustituir x por s_1 e y por s_2 se verifican a la vez <u>las dos ecuaciones</u>.

Una solución de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas son tres números reales s_1, s_2 y s_3 tales que al sustituir x por s_1, y por s_2 y z por s_3 se verifican a la vez <u>las tres ecuaciones.</u>

Discutir un sistema es estudiar todas las soluciones que pueden presentarse en él. Los sistemas de ecuaciones pueden ser:

1. **Compatibles:** Si el sistema tiene solución. Que a su vez puede ser:
   - **Determinado:** Si tiene solución única.
   - **Indeterminado:** Si tiene más de una solución. Debemos de tener en cuenta que si un sistema de ecuaciones lineales tiene más de una solución entonces tendrá infinitas soluciones.
2. **Incompatible:** Si el sistema no tiene solución.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones. Es evidente que un sistema se puede resolver solo cuando es compatible.

3.2 Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones se dicen que son equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones. Dos sistemas de ecuaciones equivalentes deben de tener el mismo número de incógnitas aunque no el mismo número de ecuaciones.

Si tenemos un sistema de ecuaciones cualquiera, existen dos operaciones que podemos hacer con las ecuaciones que forman el sistema de tal manera que el sistema resultante mantenga las mismas y solo las mismas soluciones.

Criterio del producto Si se multiplican los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

Criterio de la suma Si a una ecuación de un sistema se le suma o se le resta otra ecuación del mismo, resulta otro sistema equivalente al dado.

Estos criterios se utilizan corrientemente para eliminar incógnitas en las ecuaciones del sistema.

3.3 Sistema de dos ecuaciones. Método de Gauß

Como se ha dicho antes, con los dos criterios de los sistemas de ecuaciones podemos eliminar incógnitas de las ecuaciones de un sistema, de tal forma que si tenemos un sistema de ecuaciones de dos incógnitas y dos ecuaciones, podemos eliminar una incógnita en una de las ecuaciones, quedándonos una ecuación con dos incógnitas y otra con una. Resolviendo fácilmente la segunda y sustituyendo en la primera obtendremos rápidamente la solución de nuestro sistema.

Ejemplo 3.1: *Resolver*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 6 \\ 9x & + & 4y & = & 108 \end{array}\right.$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 4y & = & 12 \\ 9x & + & 4y & = & 108 \\ \hline 15x & & & = & 120 \end{array}$$

despejando x obtenemos:

$$x = 8$$

y sustituyendo en la primera ecuación obtenemos:

$$y = 9$$

3.4 Sistemas de tres ecuaciones. Método de Gauß

La suma o diferencia de ecuaciones permite eliminar una incógnita y obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Para ello se eligen dos pares de ecuaciones de las tres posibles.

Elegidas las dos parejas de ecuaciones más adecuadas, se elimina la misma incógnita en ambas. El proceso es igual al seguido para dos ecuaciones y se resuelve de forma análoga para el caso de sistemas de dos incógnitas.

Ejemplo 4.1:*Resolver el sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 6z & = & -1 \end{array} \right.$$

Eliminando la incógnita "y", operando: $1^\circ + 2^\circ$ *y* $1^\circ + 3^\circ$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 4 \\ \hline 3x & & & + & 2z & = & 13 \end{array} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & 6z & = & -1 \\ \hline 3x & & & + & 4z & = & 8 \end{array}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -3x & - & 2z & = & -13 \\ 3x & + & 4z & = & 8 \end{array} \right.$$

como un sistema de dos incógnitas, obtenemos las soluciones:

$$x = 6 \text{ y } z = -\frac{5}{2}$$

sustituyendo en cualquier ecuación del sistema inicial y despejando "y", obtenemos:

$$y = -2$$

3.5 Ecuaciones dependientes de un sistema.

Dado un sistema se designa por:

E_1 la primera ecuación.

E_2 la segunda ecuación.

E_3 la tercera ecuación ..., y así sucesivamente.

del mismo modo se designa por:

aE_1 al producto de la primera ecuación por a.

bE_2 al producto de la segunda ecuación por b.

cE_3 al producto de la tercera ecuación por c ..., y así sucesivamente, donde a, b, c, ... son números reales.

Una ecuación E **depende** de la ecuación E_1, o de las ecuaciones E_1 y E_2, o de las ecuaciones E_1, E_2 y E_3 si:

- $E = a \cdot E_1$

- $E = a \cdot E_1 + b \cdot E_2$
- $E = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3$

Si una ecuación de un sistema depende de otras ecuaciones del mismo sistema entonces dicha ecuación no aporta ninguna condición nueva al sistema y por tanto si se elimina, el nuevo sistema mantendrá las misma soluciones que el sistema original.

3.6 Discusión de un sistema con parámetros

Algunas veces, en los sistemas de ecuaciones aparecen como coeficientes o términos independientes a, b, ..., k, m, ..., llamados **parámetros**, que pueden tomar como valor, cualquier número real.

Discutir un sistema con parámetros es hallar los valores de los mismos para los cuales el sistema resultante es compatible o no.

Para discutir un sistema por el método de Gauß hay que resolver el sistema. Obtenida la expresión de una incógnita o de las incógnitas en función de los parámetros, se impone la condición para que las expresiones tengan sentido matemático.

Ejemplo 6.1:*Resolver el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & & & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & mz & = & 1 \end{array}\right.$$

Restando a la tercera ecuación la primera y sumándole el doble de la segunda, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & & & + & 2z & = & 3 \\ & & & & (m+3)z & = & 6 \end{array}\right.$$

despejando z de la tercera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos el valor de x. Sustituyendo x y z en la primera, obtenemos el valor de y.

$$x = \frac{3-3m}{m+3} \quad y = \frac{2m-3}{m+3} \quad z = \frac{6}{m+3}$$

Veamos cuando tienen sentido estas soluciones:

- *Si* $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$

  En este caso, para cada valor de m el sistema es compatible determinado.

- *Si* $m = -3$

  La tercera ecuación $0 \cdot z = 6$ *no tiene sentido y por lo tanto es un sistema incompatible.*

3.7 Sistemas de ecuaciones lineales en general

<u>**Notación ordinaria**</u>:

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir del siguiente modo:

$$\left\{\begin{array}{lclclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

donde los a_{ij} son números reales llamados **coeficientes** del sistema; los b_{ij} también son números reales y reciben el nombre de **términos independientes**; $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las **incógnitas** del sistema. Si todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama **homogéneo**.

Recordemos que los sistemas que tienen al menos una solución se llaman **compatibles**. Si la solución es única, diremos que el sistema es **compatible determinado**. Si tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas) el sistema ser **compatible indeterminado**; por último, si el sistema no tiene ninguna solución se llama sistema **incompatible**.

Notación matricial:

Llamaremos matriz del sistema (1) a la matriz de orden $m \times n$ formada por los coeficientes del mismo:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema (1) es de orden $m \times (n+1)$ y se obtiene a partir de la matriz M añadiéndole la columna formada por los términos independientes:

$$M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Si designamos por X a la matriz columna formada por las incógnitas y por B a la matriz columna de los términos independientes, el sistema en forma matricial se escribe:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$M \cdot X = B$$

3.8 Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones; es decir, toda solución del primer sistema lo es del segundo, y recíprocamente. Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo número de incógnitas, aunque no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Recordemos los criterios de equivalencia:

Criterio 1: Producto o cociente por un número distinto de cero.

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

Criterio 2: Suma o diferencia de ecuaciones.

Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente al dado.

Criterio 3: Reducción de ecuaciones.

Si en un sistema de ecuaciones lineales una ecuación es combinación lineal de otras, puede suprimirse y el sistema resultante es equivalente al dado.

Si tomamos el sistema en forma matricial, estas propiedades coindicen con las propiedades de las matrices a la hora de calcular su rango.

3.9 Criterio de compatibilidad. Teorema de Rouché

Teorema de Rouché:

Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

$$(1) \text{ es compatible} \quad \Leftrightarrow \quad rg(M) = rg(M^*)$$

También se cumple lo siguiente:

- Si $rg(M) = rg(M^*) = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sist. comp. det. (solución única)
- Si $rg(M) = rg(M^*) < n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sist. comp. indet. (infinitas soluciones)

- Si $rg(M) \neq rg(M^*)$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible

  Si el sistema fuese homogeneo y resultase ser compatible determinado la solución sería la $x_i = 0$.

Ejemplo 9.1:

Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$det(M) = -1 - a^2 + 2 + 1 - a + 2a = -a^2 + a + 2 = -(a^2 - a - 2)$

Este determinante vale cero cuando $a = 2$ y $a = -1$

$$a^2 - a - 2 = 0, \qquad a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{array}$$

- *Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$:* $\Rightarrow rg(M) = 3 = rg(M^*) \Rightarrow$ *Sist. comp. det. (solución única)*

- *Si $a = -1$*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad rg(M) = 2$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad rg(M^*) = 3$$

  Tenemos que $rg(M) \neq rg(M^*)$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

- *Si $a = 2$*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad rg(M) = 2$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(M^*) = 2$$

  Tenemos que $rg(M) = 2 = rg(M^*) <$ n° de inc'ognitas (3) $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

  Para resolver un sistema con infinitas soluciones se procede del siguiente modo: sea r el rango de la matriz del sistema (que coincide con el de la matriz ampliada por ser éste compatible); se eligen r ecuaciones linealmente independientes y se pasan al segundo miembro las últimas $n - r$ incógnitas, obteniendo de esta manera un sistema de r ecuaciones independientes con r incógnitas.

  Las $n-r$ incógnitas que se pasan al segundo miembro se suelen designar con los símbolos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$, y en este caso se dice que las soluciones dependen de los parámetros $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$, que pueden tomar cualquier valor real.

  En el ejemplo anterior $r = 2$ y $n = 3$

  Consideramos las dos primeras ecuaciones (que son linealmente independientes) y llamamos $t_1 = z$.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & -2z & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1 + t_1 \\ 2x & + & y & = & 2 + 2t_1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 4y & = & -2-2z \\ 2x & + & y & = & 2+2z \\ \hline & & 5y & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \boxed{y=0} \quad \boxed{x=1+t_1}$$

$\boxed{\textit{Solución: } (1+t_1,\ 0,\ t_1)}$

3.10 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

En este apartado veremos los métodos más usuales empleados para resolver sistemas que se han verificado que son compatibles.

3.10.1 Método de Gauß

Este método es una generalización del método de reducción utilizado en los sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones y dos incógnitas, también llamado método de eliminación.

Consta de tres etapas:

1. **Reducción del sistema:** Consiste en convertir la matriz ampliada del sistema, mediante la utilización de las propiedades de las matrices para obtener el rango mediante filas, en una matriz que sea triangular en las columnas correspondientes a los coeficientes de las incógnitas

2. **Clasificación:** Una vez conseguida la matriz anterior, se clasifica en compatible o no de forma sencilla, ya que si aparece alguna fila en la matriz M que está compuesta solo por ceros y la misma fila en la matriz M^* no está compuesta solo por ceros, entonces es un sistema incompatible; en otro caso el sistema es compatible.

3. **Solución:** Se van despejando las incógnitas sucesivamente empezando por la fila de M que tenga más ceros.

Ejemplo 10.1: *Resuelve el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 6x & - & 2y & + & 7z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 5x & - & 4y & + & 6z & = & 7 \end{array}\right.$$

En primer lugar formemos la matriz M^*

$$M^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

Hacemos las siguientes operaciones: $F_2 - 2F_1$, $3F_3 - 2F_1$ y $3F_4 - 5F_1$, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 11 \\ 0 & -7 & -7 & 11 \end{array}\right)$$

Cambiamos la segunda fila por la tercera y hacemos $F_4 - F_2$, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Por último hacemos $F_4 - 3F_3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejando a partir de la tercera fila obtenemos:

$$z = 0 \;\; y = -\frac{11}{7} \;\; x = \frac{1}{7}$$

3.10.2 Método de Gauß-Jordan

Básicamente se utiliza el mismo sistema que por el método de Gauß pero consiguiendo que los elementos de la diagonal sean "1", con solo dividir cada fila por el valor del elemento que ocupa su diagonal.

Luego se repite el proceso de triangularización de Gauß con el otro "triángulo" de la matriz M hasta conseguir una matriz diagonal compuesta solo por unos y en la última columna de la matriz M^* se encontrarán las soluciones del sistema.

Ejemplo 10.2:*Siguiendo con el ejemplo 10.1 tendríamos, dividiendo por el valor de la diagonal:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -2/7 & -11/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Con la tercera fila hacemos cero los elementos que están encima del 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -11/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo lo mismo con la segunda fila ($F_1 + \frac{1}{3}F_2$)obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/21 \\ 0 & 1 & 0 & -11/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

3.10.3 Regla de Cramer

<u>Definición 10.1:</u> Se denomina **sistema de Cramer** a los sistemas de ecuaciones lineales que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, $m = n$, y el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, $|A| \neq 0$.

Regla de Cramer: La solución única de un sistema de Cramer se obtiene, para cada una de las incógnitas, dividiendo el determinante de la matriz que resulta de sustituir, en la matriz de los coeficientes, la columna que corresponde a los coeficientes de la incógnita que se calcula por la que forman los términos independientes, por el determinante de la matriz de los coeficientes.

Ejemplo 10.3:*Resuelve el siguiente sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 13 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 12 \\ x & + & y & + & 2z & = & 9 \end{array}\right.$$

Entonces obtenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

y aplicando la regla de Cramer, la solución se obtiene de la siguiente forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -1 & 5 \\ 12 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{100}{25} = 4 \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 & 5 \\ 3 & 12 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{25}{25} = 1 \;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{50}{25} = 2$$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Estudia la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

2. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+4y-5z=1 \\ x-5y+3z=-1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+2y+z=4 \\ -x+y-2z=-2 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y+z=2 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=-5 \\ 3x+2y=a \end{cases} \quad e)\begin{cases} a^2x+y=a^2 \\ ax+y=1 \end{cases} \quad f)\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{cases} \quad h)\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ mx-y=5 \\ x-2y+z=3 \end{cases} \quad i)\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x-my+2z=1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$$

$$j)\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y-2z=-2 \\ 2mx+my-z=1 \end{cases} \quad k)\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x-my+2z=1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases} \quad l)\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-2y+4z=2 \end{cases}$$

3. Discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$a)\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2x+4y-z=5 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y-3z=8 \\ x-y+z=5 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+ay=6 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=a \\ -2x-y=-4 \end{cases} \quad e)\begin{cases} 2x+y-2z-t=1 \\ x-y-z+t=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \quad f)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+mz=1 \\ x+4y+m^2z=1 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} ax+y+z=0 \\ (a+1)x+y-az=0 \\ x+(a+1)y=0 \end{cases} \quad h)\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \quad i)\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases}$$

$$j)\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -mx+y-2z=0 \\ -x-3y+3z=0 \end{cases} \quad k)\begin{cases} ax-2y+z-1=0 \\ x-2ay+az-3=0 \\ x-4y+az-a=0 \end{cases} \quad l)\begin{cases} x+y=5 \\ y+3z=m \\ x+z=1 \end{cases}$$

4. Discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$a)\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ x-y+mz=2 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y+z=m-1 \\ 2x+y+mz=m \\ x+my+z=1 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases} \quad e)\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 3x-4y-az=0 \end{cases} \quad f)\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2z=0 \\ 2x-y+az=0 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} mx-y-z=m \\ x-y+mz=m \\ x+y+z=-1 \end{cases} \quad h)\begin{cases} (m+1)x+y+z=3 \\ x+2y+mz=4 \\ x+my+2z=2 \end{cases} \quad i)\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+ay+az=2 \\ x+2ay+z=a \end{cases}$$

$$j)\begin{cases} mx+y-z=0 \\ -mx+(m-1)y=0 \\ -x-2y+(m+1)z=0 \end{cases} \quad k)\begin{cases} x+ay=ax \\ 3x+ay=ay \end{cases}$$

5. Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array} \right.$

   (a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

   (b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible e indeterminado.

6. Si la altura de Carlos aumenta el triple de las diferencias de las alturas de Antonio y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Antonio equivale a nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

7. Invirtiendo 1 millón de euros en acciones del tipo A y 2 millones de euros en acciones del tipo B, obtendríamos unos intereses totales anuales de 280.000 euros, y si invertimos 2 millones en A y 1 millón en B, obtenemos 260.000 euros. ¿Cuáles serían los intereses si se invirtieran 3 millones en A y 5 millones en B?.

8. De un número de tres cifras se sabe que la suma de estas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198, si se intercambian las de las unidades y las decenas, el número aumenta en 36. Encuentra el número.

9. Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación asciende a 352.500 euros. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete , que vale 1.500 euros; cuántos han pagado el 20% del billete y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20% es el doble del número de viajeros que han pagado el billete entero.

10. Un automóvil sube las cuestas a 54 Km/h. Las baja a 90 Km/h y en llano marcha a 80 Km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 38 minutos.¿Cuál es el camino llano entre A y B si se sabe que A y B distan 192 kilómetros.?

11. Con dos clases de café de 9 y 12 euros el kilo se quiere obtener una mezcla de 10 euros el kilo. Halla la cantidad que hay que mezclar de cada clase para obtener 30 kilos de mezcla.

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+3z=2 \\ 4x-3y+z=-1 \\ x+5y-6z=5 \end{array} \right.$$

   (a) Escríbelo en forma matricial.

   (b) Resuélvelo por el método de Gauss.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=m \\ -2x+y=-1 \\ x-my=-2 \end{array} \right.$$

   discútelo para los distintos valores del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible.

3. Discute en función del parámetro a, el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array} \right.$$

   ¿ Existe algún caso en que el sistema es compatible indeterminado?. En caso afirmativo, resuélvelo.

4. Los sueldos del padre, la madre y el hijo sumados dan 325.000 euros. La madre gana el doble que el hijo. El padre gana 2/3 de lo que gana la madre. Se trata de calcular cuanto gana cada uno.

5. Un grifo tarda 3 horas en llenar un depósito, mientras que otro solo tarda 2 horas en llenarlo. ¿Cuánto tardarán en llenarlo los dos grifos a la vez?. Razona la respuesta.

6. Se dispone de un recipiente de 24 litros de capacidad y de tres medidas, A, B y C. Se sabe que el volumen de A es el doble de B, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras se llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada una?.

7. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 7x - 8y + 8z = 22 \end{cases}$$

8. Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones lineales:
$$2x + y = 3 \qquad y - 2x = -6 \qquad 3y - 6x = -3$$
Representa e interpreta gráficamente la situación relativa de las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema.

9. Discute y , en su caso, resuelve, en función del parámetro, el sistema
$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ my + mz = 4 \\ 4x + y + z = 4 \end{cases}$$

10. Resuelve, según los diferentes valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = a \\ -x + (a+1)y = a \end{cases}$$

11. Dado el sistema
$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \end{cases}$$
   (a) Clasificalo y resuélvelo.
   (b) Añade al sistema una ecuación de modo que resulte otro sistema compatible indeterminado; lo mismo, para que resulte compatible determinado; lo mismo, para que resulte incompatible.

12. Discute en términos de m, y resuleve, cuando sea posible, el sistema
$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 6 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 5 \end{cases}$$

13. Sea el siguiente sistema de ecuaciones, en función del parámetro m:
$$\begin{cases} 3x + (2m+3)y = 1 \\ -3mx + y = 1 \end{cases}$$
   (a) Exprésalo en forma matricial, siendo los elementos de una de las matrices que intervienen las variables x e y.
   (b) Discútelo según los valores del parámetro m.
   (c) Determina su solución para $m = 5$.

14. Halla tres números sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más uno, que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero, el resultado es 5.

15. Si a un número de dos cifras se le suma 18, se obtiene el número con los cifras intercambiadas. Sabiendo que la suma de las cifras del número es 16, encuentra dicho número.

16. La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades de padre, madre e hijo es 80 años, y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tiene el padre, la madre y el hijo en la actualidad?.

SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Si $a \neq 1, -1$ S.C.D.; Si $a = 1$ S.C.I.; Si $a = -1$ S.I.
2. a) Sistema compatible determinado $x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$

   b) Sistema compatible determinado $x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$

   c) Sistema compatible indeterminado $x = z - 1/2 \quad y = 3/2 \quad z = z$

   d)Si $a = 5/7$ S.C.D. $x = -5/7 \quad y = 10/7$ Si $a \neq 5/7$ S.I.

   e) Si $a = 1$ S.C.I. $x, 1 - x$ Si $a = -1$ S.I. Si $a \neq 1, -1$ S.C.D. $x = \frac{a+1}{a} \quad y = -a$

   f) Si $a = -3$ S.I. Si $a = 1$ S.C.I. $x = -2y \quad y = y \quad z = -3y$

   Si $a \neq 1, -3$ S.C.D. $x = \frac{-2(a-1)^2}{2a^2+4a-6} \quad y = \frac{-5(a-1)^2}{2a^2+4a-6} \quad z = \frac{-(a-1)^2}{2a^2+4a-6}$

   g) Sistema compatible determinado $x = 1 \quad y = -5$

   h) Si $m \neq 3$ S.C.D. $x = 0 \quad y = -5 \quad z = -7$ Si $m = 3$ S.C.I. $x = x \quad y = 3x - 5 \quad z = 5x - 7$

   i) Si $m = -3$ S.I. Si $m = 2$ S.C.I. $x = 3/5 \quad y = z - 1/5 \quad z = z$

   Si $m \neq 2, -3$ S.C.D. $x = \frac{6-2m}{-m^2-m+6} \quad y = \frac{6-3m}{-m^2-m+6} \quad z = \frac{-2m^2+4m}{-m^2-m+6}$

   j) Si $m = 1$ S.I. Si $m \neq 1$ S.C.D. $x = 0 \quad y = \frac{6}{3m-3} \quad z = \frac{3m+3}{3m-3}$

   k) Si $m = -3$ S.I. Si $m \neq -3$ S.C.D. $x = \frac{3}{m+3} \quad y = \frac{6-3m}{m+3} \quad z = \frac{3-m}{m+3}$

   l) Sistema compatible indeterminado $x = x \quad y = x + 2z - 1 \quad z = z$
3. a) Sistema compatible determinado $x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$

   b) Sistema compatible determinado $x = 43/8 \quad y = -3/2 \quad z = -15/8$

   c) Si $a = 4$ S.C.I. $x = 3 - 2y \quad y = y$ Si $a \neq 4$ S.C.D. $x = 3 \quad y = 0$

   d) Si $a = 5$ S.C.D. $x = 1 \quad y = 2$ Si $a \neq 5$ S.I.

   e) No obligatorio. Con parámetro o cuarta variable.

   f) Si $m = 2$ S.C.I. $x = 1 \quad y = -z \quad z = z$ Si $m = 1$ S.C.I. $x = 1 - z \quad y = 0 \quad z = z$

   Si $m \neq 1, 2$ S.C.D. $x = 1 \quad y = 0 \quad z = 0$

   g) Si $a = -1$ S.C.I. $x = 0 \quad y = y \quad z = -y$ Si $a = 0$ S.C.I. $x = -y \quad y = y \quad z = -y$

   Si $a \neq 0, -1$ S.C.D. $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

   h) Si $m = 2$ S.C.I. $x = -5/3z \quad y = -z/3 \quad z = z$ Si $m \neq 2$ S.C.D. $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

   i) Sistema compatible indeterminado $x = x \quad y = x \quad z = x$

   j) Si $m = -2$ S.C.I. $x = x \quad y = 4/3x \quad z = 5/3x$ Si $m \neq -2$ S.C.D. $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

   k)Si $a = 1, -1, 2$ S.I. Si $a \neq 1, -1, 2$ S.C.D. $x = \frac{a-3}{a^2-1} \quad y = \frac{a-3}{2(a-2)} \quad z = \frac{a^3-8a-15}{(a-2)(a^2-1)}$

   l) Sistema compatible determinado $x = \frac{8-m}{4} \quad y = \frac{m+12}{4} \quad z = \frac{m-4}{4}$
4. a) Si $m = 1, -1$ S.I.

   Si $m \neq 1, -1$ S.C.D. $x = \frac{m-4}{1-m} \quad y = \frac{m^3+6m^2-7m+2}{1-m^2} \quad z = \frac{m^2-3m+10}{1-m^2}$

   b) Si $m = 1$ S.I.

   Si $m = 2$ S.C.I. $x = 1 - z \quad Y = 0 \quad z = z$

   Si $m \neq 1, 2$ S.C.D. $x = m + 1 \quad y = \frac{2-m}{m-1} \quad z = \frac{m}{1-m}$

   c) Si $m = 1$ S.C.I. $x = x \quad y = -2x \quad z = x$

   Si $m \neq 1$ S.C.D. $x = \frac{1}{m-1} + 3 \quad y = \frac{2}{1-m} \quad z = \frac{m-2}{1-m}$

   d) Si $m = 1$ S.I.

   Si $m = 2$ S.C.I. $x = 1 - z \quad y = 0 \quad z = z$

   Si $m \neq 1, 2$ S.C.D. $x = \frac{m^2-1}{m-1} \quad y = \frac{2-m}{m-1} \quad z = \frac{-m}{m-1}$

e) Si $a = -5$ S.C.I. $x = z/5 \quad y = 7/5z \quad z = z$
Si $a \neq -5$ S.C.D. $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$
f) Si $a = 2$ S.C.I. $x = -z \quad y = 0 \quad z = z$
Si $a = -3$ S.C.I. $x = 2/3z \quad y = -5/3z \quad z = z$
Si $a \neq 2, -3$ S.C.D. $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$
g) Si $m = -1$ S.I.
Si $m \neq -1$ S.C.D. $x = \frac{m-1}{m+1} \quad y = \frac{-3m^2-1}{m^2+2m+1} \quad z = \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}$
h)Si $m = 2, -3$ S.I.
Si $m = 0$ S.C.I. $x = 2 - 2z \quad y = 1 + z \quad z = z$
Si $m \neq 0, 2, -3$ S.C.D. $x = \frac{3}{m+3} \quad y = \frac{2m-9}{(m-2)(m+3)} \quad z = \frac{4m-3}{(m-2)(m+3)}$
i) Si $a = 2$ S.I.
Si $a \neq 2$ S.C.D. $x = \frac{a-4}{a-2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = \frac{a-4}{2(2-a)}$
j) Si $m = 1$ S.C.I. $x = 0 \quad y = y \quad z = y$
k) Si $a = 0$ S.C.I. $x = 0 \quad y = y$
Si $a \neq 0$ S.C.D. $x = 0 \quad y = 0$

5. (a) $3x - 2y + z = 6$
   (b) $5x - 5y + 2z = 9$
6. Carlos = 160 Antonio = 180 Juan = 175
7. A=2/25 B=1/10
8. 715
9. Todo = 150 20% = 300 50% = 50
10. Sube 27 baja 45 Llano 120
11. de 9 euros 20 kilos y de 12 euros 10 kilos

SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

1.
$$\left\{\begin{array}{cccc} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & z & -1 \\ x & 5 & -6 & 5 \end{array}\right.$$
   $x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1$
2. Si $m \neq 3, -3/2$ S.I. Si $m = 3$ S.C.D. $x = 1 \quad y = 1$
   Si $m = -3/2$ S.C.D. $x = -1/8 \quad y = -5/4$
3. Si $a = 1$ S.I. Si $a \neq 1, -1$ S.C.D.
   Si $a = -1$ S.C.I. $x = -3/2 \quad y = y \quad z = 5/2 - y$
4. Padre = 100.000; Madre = 150.000; Hijo= 75.000
5. 72 minutos
6. A = 8; B = 4; C = 12
7. $x = 2/5(5 - 4z) \quad y = -1/5(5 + 2z) \quad z = z$
8. Sistema incompatible. Dos paralelas y la otra secante.
9. Si $m = 0$ S.I. Si $m \neq 0$ S.C.D. $x = \frac{m+1}{m} \quad y = \frac{-9}{2m} \quad z = \frac{1}{2m}$
10. Si $a = 1$ S.C.D. $x = 3 \quad y = 2$ Si $a = -1$ S.C.D. $x = 1 \quad y = 0$
    Si $a \neq 1, -1$ S.I.

11. (a) S.C.I. $x = 2y - 3 \qquad y = y \qquad z = y - 2$
    (b) $2x - 4y = -6$; $x = y$; $x - 2y = 2$

12. Si $m = -2/3$ S.I.
    Si $m \neq -2/3$ S.C.D. $x = \frac{-6m-14}{-3m-2} \qquad y = \frac{16-6m}{-3m-2} \qquad z = \frac{15}{-3m-2}$

13. (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2m+3 & 1 \\ -3m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    (b) Si $m = -1/2$ S.I. Si $m = -1$ S.C.I. Si $m \neq -1, -1/2$ S.C.D.
    (c) $x = \frac{-12}{198} \qquad y = \frac{18}{198}$

14. $5/2 \qquad 1/2 \qquad 3$

15. 79

16. hijo $= 10$ madre $= 30$ padre $= 40$

Tema IV

PROGRAMACIÓN LINEAL

4.1 Desigualdades e inecuaciones

En la recta real se estudió la existencia de una relación de orden que daba lugar a las desigualdades. Esta relación de orden utilizaba el símbolo $\geq$ (mayor o igual que), $\leq$ (menor o igual que), $>$ (mayor que), $<$ (menor que), de tal forma que si tenemos que:

$$x \geq 2 \Longrightarrow x = 2 \text{ ó } x > 2$$

o sea, x puede tomar cualquier valor que sea superior a 2 o igual a él.

Una desigualdad es una comparación entre dos valores conocidos.

Las desigualdades en la recta real ya se han estudiado y utilizado en cursos anteriores, siendo su ampliación al plano lo que nos dedicaremos ha estudiar en este tema, abarcando su utilidad en problemas prácticos.

Empezaremos recordando que una **inecuación** es una desigualdad en la que intervienen incógnitas y valores desconocidos.

Ejemplo 1.1 :*Resolver:*

$$\frac{x}{2} - 3x + 4 < x - 2 \Longrightarrow x - 6x + 8 < 2x - 4 \Longrightarrow 7x > 12 \Longrightarrow x > \frac{12}{7}$$

Se define una **inecuación lineal** a cualquier expresión de la forma:

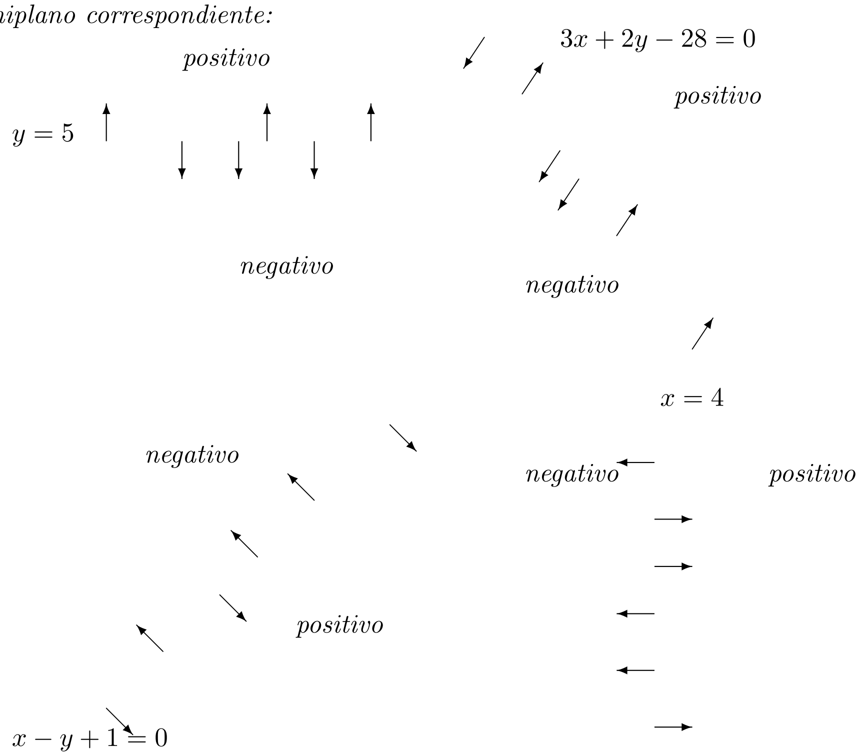
$$ax + by + c \geq 0 \qquad ax + by + c \leq 0 \qquad ax + by + c < 0 \qquad ax + by + c > 0$$

que geométricamente representa el conjunto de puntos de uno de los semiplanos en los que la recta $ax + by + c = 0$ divide al plano.

Recordemos tres detalles importantes de cursos anteriores:

- La ecuación $ax + by + c = 0$ define una recta en el plano.
- Toda recta del plano divide a este en dos partes llamadas semiplanos.
- Al sustituir cada punto de un semiplano en la ecuación de la recta, los valores obtenidos tienen el mismo signo.

Ejemplo 1.2 :*Veamos algunas rectas y los signos de los valores que obtendremos al sustituir un puntos del semiplano correspondiente:*



Por lo visto hasta ahora, las soluciones de la inecuación:

$$ax + by + c \geq 0$$

serían todos los puntos del semiplano que toma el valor positivo, incluyendo los puntos de la recta por no ser una desigualdad estricta.

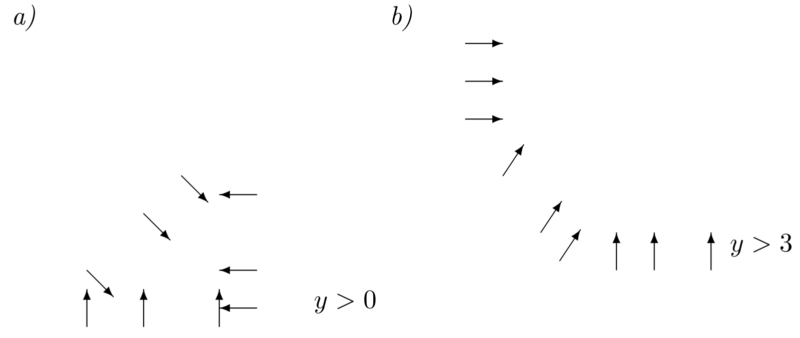
4.1.1 Sistema de inecuaciones lineales

Un sistema de inecuaciones lineales es una conjunto de inecuaciones con dos incógnitas de grado uno y una solución de un sistema de inecuaciones lineales son los puntos del plano (x_0, y_0) tales que satisfacen todas las inecuaciones del sistema.

Como hemos visto antes, cada inecuación tiene como solución un semiplano de puntos, por lo tanto, la solución de un sistema de inecuaciones lineales es el **recinto** del plano formado por la intersección de los semiplanos de soluciones de todas la inecuaciones.

Ejemplo 1.3 :*Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:*

$$a) \left\{ \begin{array}{rl} x - y + 1 & > 0 \\ y & > 0 \\ x & < 4 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{rl} 3x + 2y - 28 & > 0 \\ y & > 3 \\ x & > 2 \end{array} \right.$$



Resulta evidente resaltar que la solución de un sistema de inecuaciones es justamente la región que resulta de la intersección antes descrita y cuya interpretación geométrica es el gráfico realizado en el ejemplo.

La región de la solución de un sistema de inecuaciones es siempre un **conjunto convexo**, o sea, que el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto, se encuentra por completo en el conjunto.

4.2 Programación lineal

Esta parte de las matemáticas es relativamente reciente y se dedica a la optimización de procesos de todo tipo; matemáticos, sociales, económicos, ... Un **problema de programación lineal** es aquel en el que pretendemos hallar el máximo o el mínimo de una función, llamada función objetivo, sujeta a varias restricciones que vienen expresadas en forma de inecuaciones.

Ejemplo 2.1 :*Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 Kg de chocolate, 100 kg de almendras y 85 Kg de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 Kg de chocolate, 1 Kg de almendras y 1 Kg de frutas; la del tipo B contiene 2 Kg de chocolate, 1,5 Kg de almendras y 1 Kg de frutas. Los precios de las cajas del tipo A y B son 1.300 y 1.350 pesetas, respectivamente. Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta.?*

En todo problema de programación lineal deben aparecer:

- La función objetivo; que es la función que queremos optimizar.
- Las variables de decisión; que son los variables de las que depende la función objetivo.
- Restricciones ; son las inecuaciones que nos limitan los posibles valores de las variables de decisión.

A su vez, un problema de programación lineal puede ser, según la solución:

- Factible; con una solución, infinitas o no estar acotada.
- No factible; no hay solución, por tanto las restricciones son inconsistentes.

Ejemplo 2.2 :*Siguiendo con el ejemplo anterior:*

	Tipo A	*Tipo B*	*Disponible*
Chocolate	*3*	*2*	*500*
Almendras	*1*	*1,5*	*100*
Frutas	*1*	*1*	*85*
Precio	*1.300*	*1.350*	

4.3 Resolución de problemas

Un problema de programación lineal puede resolverse de dos formas diferentes, de forma analítica y de forma geométrica (gráfica). Veamos cada uno de los tipos, aunque la forma de plantear el problema es el mismo para ambos.

4.3.1 Etapas de planteamiento

A la hora de plantear un problema de programación debemos seguir los siguientes pasos:

- Formar una tabla donde estés recogidos todos los datos del problema.
- Determinar cuales van a ser las variables que formarán la función objetivo y nombrarlas.
- Determinar las restricciones que nos muestra el problema sin olvidar ninguna y siempre según las variables determinadas en el paso anterior.
- Determinar la función objetivo a optimizar.

Ejemplo 3.1 :*Siguiendo con el ejemplo anterior:*

	Tipo A	*Tipo B*	*Disponible*
Chocolate	*3*	*2*	*500*
Almendras	*1*	*1,5*	*100*
Frutas	*1*	*1*	*85*
Precio	*1.300*	*1.350*	
Función	*x*	*y*	*1.300x+1.350y*

Las restricciones serán:

- *El número de cajas no puede ser negativo:*

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

- *No se puede sobrepasar la cantidad de chocolate disponible:*

$$3x + 2y \leq 500$$

- *No se puede sobrepasar la cantidad de almendras disponible:*

$$x + 1,5y \leq 100$$

- *No se puede sobrepasar la cantidad de fruta disponible:*

$$x + y \leq 85$$

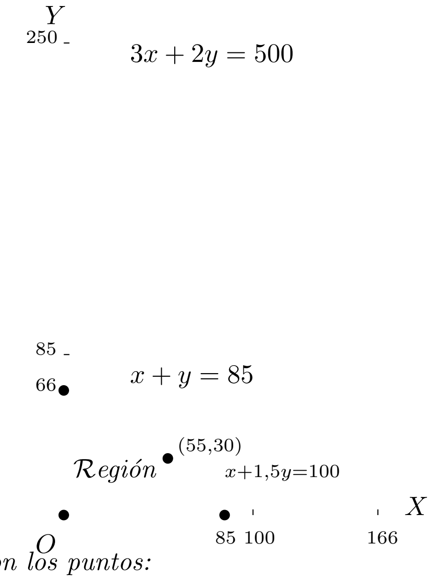
4.3.2 Método analítico

Una vez realizada la tabla correspondiente se pasan las restricciones al plano para conocer la región factible de las soluciones y utilizamos el siguiente teorema:

Si una función lineal tiene un máximo o un mínimo en un conjunto convexo, toma este valor en un vértice o en un lado de este conjunto.

Por tanto el siguiente paso será el de hallar los vértices de la región factible y, sustituyendo en la función objetivo, quedarnos con el que maximize o minimize a la función.

Ejemplo 3.2 :*Siguiendo con el ejemplo anterior.*
Construimos la región factible:



Los vértices de la región son los puntos:

$$(0,0) \qquad (85,0) \qquad (0,66) \qquad (55,30)$$

que sustituyendo en la función que queremos que sea máxima, obtenemos:

$$0 \qquad 110.500 \qquad 89.100 \qquad 112.000$$

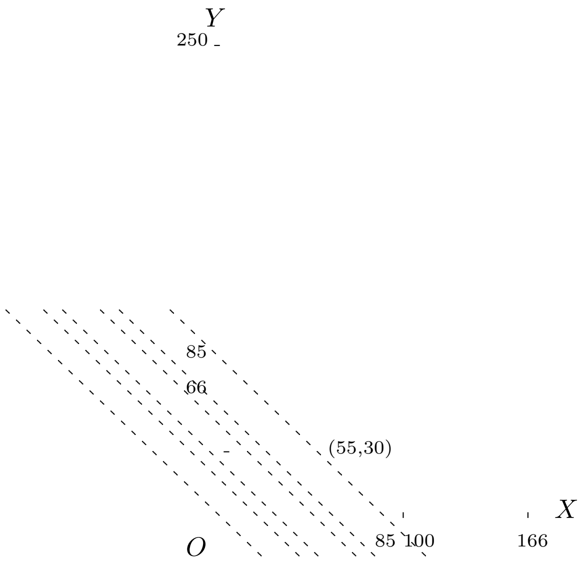
Luego la producción de máximo beneficio será de 55 cajas del tipo A y 30 cajas del tipo B.

4.3.3 Método geométrico (gráfico)

Con este método debemos de dibujar la región factible y además la función objetivo a la que iremos variando el término independiente para que vayan apareciendo rectas paralelas llamadas **rectas de nivel** y encontrar una de ellas que pase por un vétice de tal forma que de todas las rectas que pasen por los demás vértices tengan el término independiente menor si la ecuación de la recta tiene la forma:

$$ax + by = c$$

Ejemplo 3.3 : *Siguiendo con el ejemplo anterior.*
Dibujemos las rectas de nivel con trazos discontinuos.



4.4 Problemas del transporte

Este tipo de problema intenta de minimizar el coste que produce el envio de un cierto producto desde unos lugares de producción (orígenes) a unos lugares de consumo (destino) donde partimos de una producción que puede ser fija y una demanda de cada lugar de destino, conociendo de antemano los costes de envío del producto de cada lugar de partida a cada lugar de llegada.

La intención de este tipo de problemas es la de distribuir el producto entre sus demandantes con el menor gasto posible de forma que no se exceda de la demanda ni de la producción.

El método más sencillo de solucionar estos problemas es formar una matriz con los lugares de partida y los de llegada asignándole una cantidad (mediante variables) a cada lugar y obligándo a la hora de asignarlas que no sobrepase la demanda ni la producción. Luego obligaremos que todas estas cantidades sean positivas, con lo cual tendremos las inecuaciones que nos servirán a calcular la región factible y luego multiplicado cada elemento de las matrices correspondientes entre sí y sumándolas obtendremos la función objetivo que tendremos que minimizar.

Ejemplo 4.1 :*Sabemos que en Madrid se producen 2.000 copias de un determinado libro y en Zaragoza 3.000 del mismo. La demanda de este libro es de 2.000 copias en Barcelona, 1.500 en Sevilla y 1.500 en Bilbao. Si los costes de envío son:*

	Barcelona	*Sevilla*	*Bilbao*
Madrid	*20*	*25*	*30*
Zaragoza	*15*	*40*	*20*

Determina como debe hacerse la distribución para que tenga el menor coste posible.
<u>*Solución :*</u>
Obtenemos la matriz de las cantidades a repartir:

	Barcelona	*Sevilla*	*Bilbao*
Madrid	*x*	*y*	*2.000-x-y*
Zaragoza	*2.000-x*	*1.500-y*	*x+y-500*

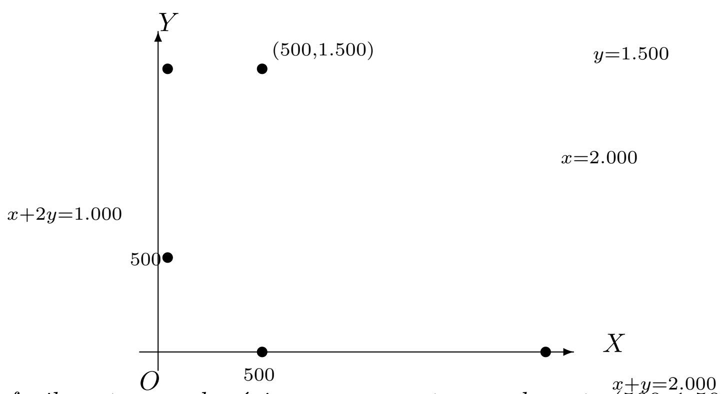
Luego las restricciones serán:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2.000 - x - y \geq 0 \\ 2.000 - x \geq 0 \\ 1.500 - y \geq 0 \\ x + y - 500 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2.000 \\ x \leq 2.000 \\ y \leq 1.500 \\ x + y \geq 500 \end{array}\right\}$$

La función objetivo será:

$$20x + 25y + 30(2.000 - x - y) + 15(2.000 - x) + 40(1.500 - y) + 20(x + y - 500) \Longrightarrow -5x - 25y + 140.000$$

Hallemos la región factible:



Se puede deducir facilmente que el mínimo se encuentre en el punto $(500, 1.500)$*, que es la solución del problema.*

PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

1. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa gráficamente la solución:

$$a)\left\{\begin{array}{l}2x+6<0\\ x+\frac{1}{3}\geq\frac{x}{2}\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l}x\leq 0\\ \frac{x}{3}+\frac{x}{3}-6\leq 5\end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{l}x+4<0\\ x+1<\frac{x}{2}\end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{l}x-2\leq 2x+1\\ 3-x<1-2x\end{array}\right. \qquad e)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ x+2<2x-5\\ 3x+6>x+7\end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{l}2x+3\geq 5\\ 4x-3>1\\ 3x-2<13\end{array}\right.$$

2. Dibuja las regiones factibles de los sistemas siguientes:

$$a)\left\{\begin{array}{l}x\geq y\\ x\geq 0\\ \frac{x}{3}\geq\frac{y}{2}\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\leq 0\\ \frac{x}{2}+3\leq y+4\end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{l}x+y\geq 3\\ x-y\geq 3\end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{l}x>0\\ y>0\\ x+2y<8\end{array}\right. \qquad e)\left\{\begin{array}{l}x>0\\ y>0\\ 2x+3y>6\end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{l}x>0\\ y>0\\ x+y<-1\end{array}\right.$$

$$g)\left\{\begin{array}{l}0,3x+0,4y\leq 0,9\\ 0,2x-0,1y\geq 1,2\end{array}\right. \qquad h)\left\{\begin{array}{l}y+3x-7\leq 0\\ y-6x+11\leq 0\end{array}\right. \qquad i)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ 0\leq y\leq 5\\ x-2y\leq 10\\ x+y\geq 10\end{array}\right.$$

$$j)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+3y\leq 20\\ x+y\leq 10\end{array}\right. \qquad k)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y-x+1\geq 0\\ y-4\leq 0\\ y+2x-5\leq 0\end{array}\right. \qquad l)\left\{\begin{array}{l}3x+4y\leq 12\\ 4x+y\geq 4\\ 4x+3y\geq 8\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$

3. Halla los máximos y mínimos de $f(x,y)=x+y$ en cada una de las siguientes regiones:

$$a)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 2x+y\leq 2\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x-y\geq 0\end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\geq 0\\ x-y\geq 0\\ 2x-y\leq 2\end{array}\right.$$

4. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x,y)=2x+3y$, sabiendo que:

$$\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 2y\geq -3x-6\end{array}\right.$$

5. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x,y)=3x+2y$, sabiendo que :

$$\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 2y\leq -3x+6\end{array}\right.$$

6. Maximiza y minimiza la función $f(x,y)=x-2y$ sometida a las restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l}x+y\leq 3\\ x\geq 0\\ y\geq -1\end{array}\right.$$

7. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x,y) = 5x + 2y$, sabiendo que:

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

8. Minimiza la función $f(x,y) = 2x + 8y$ sometido a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

9. Maximiza la función $f(x,y) = x + 2y - 3$ sometida a las restricciones :

$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 5y \leq 9 \\ 3x \leq 2 \end{cases}$$

10. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 4y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \leq 28 \\ 8x + 2y \geq 32 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

11. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 3y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y \leq 3 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

12. Calcula el máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x + 2y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ x \leq 3 \\ x - y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$

13. Maximizar la función $f(x,y) = -2x - 2y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 2y \leq 2x + 8 \\ 0 \leq 3x + 3y - 12 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

14. Para abonar una parcela de huerta se necesitan, por lo menos, 8 kg de nitrógeno y 12 Kg de fósforo. Se dispone de un producto M cuyo precio es de 30 pts/Kg y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto N que contiene un 20% de nitrógeno y un 20 % de fósforo, y cuyo precio es 40 pts/Kg. ¿Qué cantidades se deben tomar de M y N para abonar la parcela con el menor gasto posible?.

15. Dos yacimientos de oro, A y B , producen al año 2.000 y 3.000 Kg de mineral de oro, respectivamente, que deben distribuirse a tres puntos de elaboración: C, D y E, que admiten 500, 3.500 y 1.000 Kg de mineral, respectivamente, al año. El coste del transporte, en pts/Kg. es el que vemos en la tabla:

coste	C	D	E
A	1.000	2.000	3.000
B	1.500	1.750	2.000

¿Cómo ha de distribuirse el material para que el transporte sea lo más económico posible?.

16. Con 80 Kg. de acero y 120 de aluminio se quieren fabricar bicicletas de paseo y de montaña que se venderán a 120 y 90 euros, respectivamente. Para la de paseo son necesarios 1 Kg. de acero y 3 de aluminio y para la de montaña 2 kilos de cada uno de los metales. ¿Cuantas bicicletas de paseo y cuantas de montaña se deben fabricar para obtener el mayor beneficio?.

17. Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, F_1 y F_2. Los del tipo F_1 cuestan 180 euros y los del tipo F_2 300 euros Sólo dispone de sitio para 20 frigoríficos y de 4.200 euros para hacer las compras. ¿Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que a cada frigorífico le gana el 30% de su precio de compra.?

18. Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana y un vestido de señora necesita $2m^2$ de cada una de las telas.

    Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

19. Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg. de vitamina A, 3 mg. de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D.

    Para ello, se van a mezclar pienso de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0'20 euros y cuyo contenido vitaminico en mg por kilo es el siguiente:

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

    ¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?.

20. En Madrid y Soria se fabrican piezas para la construcción de barcos. Estos barcos se construyen en Cartagena, San Fernando y El Ferrol. Sabemos que Madrid fabrica el 60% de la producción total y Soria el 40%. Del total de piezas producidas, Cartagena necesita el 40%, San Fernando el 30% y El Ferrol el 30%. Los gastos de envio por piezas viene dada por la tabla adjunta:

	Cartagena	San Fernando	El Ferrol
Madrid	5	5	5
Soria	4	3	7

    Se han fabricado 1.000 piezas:

    (a) Indica en una tabla la cantidad de productos que cada origen envia a cada destino.
    (b) Determina la distribución de piezas para que el coste sea mínimo.

21. Un veterinario recomienda para un gato una dieta diaria en la que deben aparecer al menos cinco unidades de hidrato de carbono, 16 de proteínas y 7 de grasas. En el mercado existen dos productos, A y B, cuya composición por cada diez gramos de producto es:

	H. de carbono	Proteínas	Grasas
Producto A	4	6	2
Producto B	5	4	3

    Si el precio de una caja de 100 gramos del producto A es de 3 euros y el de una caja de 200 gramos del producto B es de 4'20 euros. ¿Cuántas cajas conviene comprar de cada tipo para tener el mínimo coste, teniendo en cuenta que el tratamiento hay que realizarlo durante 20 días?.

22. Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 Kg de café de tipo C y 800 Kg del tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La del tipo A consta de dos partes de café del tipo C y 1 del tipo K en la que gana 0'13 euros en kilo y la de tipo B que consta de una parte del tipo C y 2 del tipo K en la que gana 0'16 euros por kilo. Halla la cantidad de mezcla que la casa debe preparar de cada clase para que la ganancia sea máxima.

23. Para abastecer de madera a tres aserraderos, A_1, A_2 y A_3, hay dos bosques, B_1 y B_2, que producen 26 toneladas y 30 toneladas, respectivamente. Las necesidades de cada aserradero son: 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. Si los costes de transporte por tonelada de los bosques a los aserraderos son, en miles de euros, los que se indican en la tabla adjunta, propón el transporte con el coste mínimo.

	A_1	A_2	A_3
B_1	1	3	1
B_2	2	1	1

24. Desde dos almacenes, A y B, se tienen que distribuir frutas a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de frutas diarias y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste del transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado por los datos del cuadro. Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10	15	20
B	15	10	10

25. La capacidad de producción de una factoría permite elaborar diariamente 120 artículos del tipo A y 360 del tipo B. Las reglamentaciones existentes obligan a que al menos el 80% de la producción total se destine a la exportación, pero la capacidad de inspección aduanera es de sólo 200 productos diarios. El precio de los artículos del tipo A es cuatro veces el de los del tipo B. Planifica la producción diaria para maximizar los beneficios.

26. La compañia de viajeros VERDE utiliza dos autobuses, A y B, para realizar excursiones turísticas. La compañia planifica la temporada estimando que realizará, entre los dos autobuses, al menos 60 viajes, aunque no puede ocuparse de más de 200 excursiones.

    El programa de revisiones de los autobuses impone que el autobús A no puede hacer más de 120 viajes, aunque debe hacer al menos los mismos viajes que el autobús B.

    Si en cada trayecto el autobús A consume 300 litros de combustible y el B consume 200 litros, ¿Cuántos viajes debe hacer cada autobús para que el consumo sea mínimo?.

27. Un una empresa se fabrican diariamente dos tipos de aparatos: A y B. Como máximo puede fabricarse 3 aparatos de cada tipo y obligatoriamente, al menos, un aparato del tipo B. Indica todas las posibilidades de fabricación si se quiere realizar ventas por importe superior a 36 euros, teniendo en cuenta que los precios de los artículos A y B son, respectivamente, 18 euros y 6 euros.

28. Un camión puede transportar 9 toneladas como máximo por viaje. En un determinado viaje debe transportar, al menos, 4 toneladas de una mercancía A y un peso de mercacía B, que no sea inferior a la mitad que transporta de A.

    Sabiendo que se cobra 3 euros/Kg por el transporte de A, y 2 euros/Kg por el de B, ¿Cómo se debe cargar el camión para que la ganancia sea máxima?.

29. En un almacén hay 100 cajas del tipo A y 100 cajas del tipo B. La tabla nos informa del peso, del volumen y del valor de cada una

Tipo	Peso(Kg)	Volumen (dm^3)	Valor
A	100	30	450
B	200	40	750

    Una camioneta puede cargar 10.000 Kg. y un volumen máximo de 2.400 dm^3. Averigua cómo ha de cargarla para que el valor de las cajas que lleve sea el más alto posible.

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Halla los vértices del recinto del plano formado por las soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ 2y \leq x + 2 \end{cases}$$

2. Determina los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x - 8y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 12 \\ x - 4y \geq -20 \\ 3x + 2y \leq 24 \\ x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3. Determina los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 5x - 3y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$$

4. Determina los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 8 \leq 2x + y \leq 16 \end{cases}$$

5. Una empresa construye en dos factorías (F_1, F_2) tres tipos de barcos deportivos (A, B, C). La factoría F_1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual de 6 millones de euros, y F_2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 del tipo B y 2 del tipo C, siendo su coste mensual de 3 millones de euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente, a cierto club náutico, 3 barcos del tipo A, 15 del tipo B y 12 del tipo C. ¿Cuántos meses al año deberá trabajar cada factoría con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?.

6. Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8.000 y 15.000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10.000, 7.000 y 6.000 piezas, respectivamente. Los costes de transporte, en pesetas, por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Factoría 1	6	13	2
Factoría 2	4	4	12

7. Un granjero tiene dos almacenes de patatas, A_1 y A_2, que contienen 20 toneladas y 12 toneladas de patatas, respectivamente. Reciben encargos de tres clientes, C_1, C_2 y C_3 de 8, 10 y 14 toneladas. Las distancias entre los almacenes y los clientes se dan en la tabla adjunta.

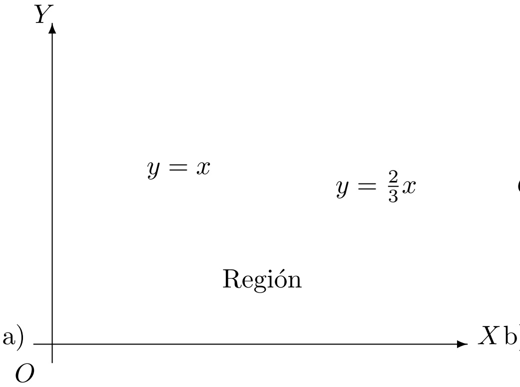
   Suponiendo que el coste del transporte sea una cantidad fija por kilómetro y tonelada, ¿cómo tendría que distribuirse las patatas para minimizar el coste del transporte?.

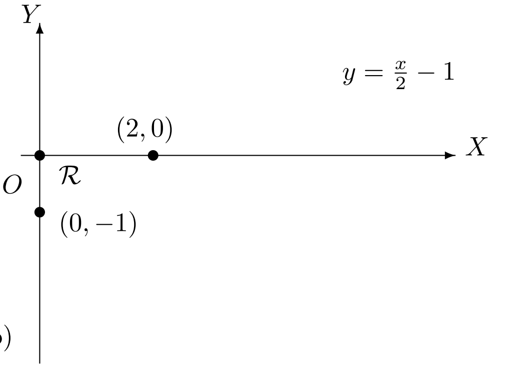
	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	5
A_2	6	2	4

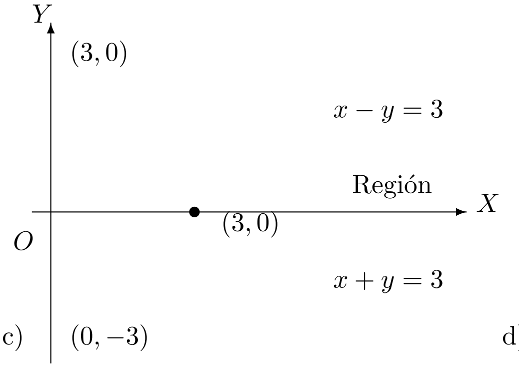
SOLUCIONES DE PROGRAMACION LINEAL

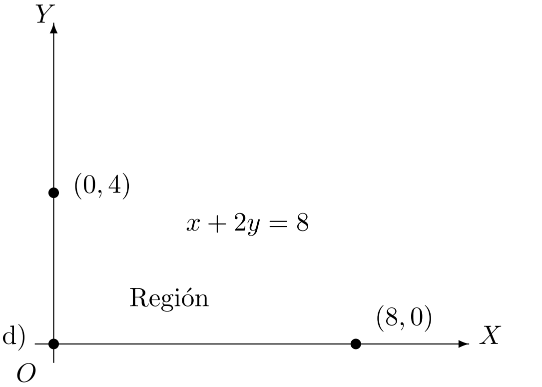
1.

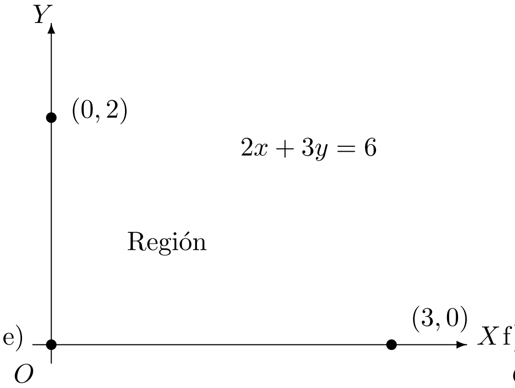
$a)$ $[-2/3,-3)$ $b)$ $x\leq 0$ $c)$ $x<-4$ $d)$ $[-3,-2)$ $e)$ $(1/2,7)$ $f)$ $(1,5)$

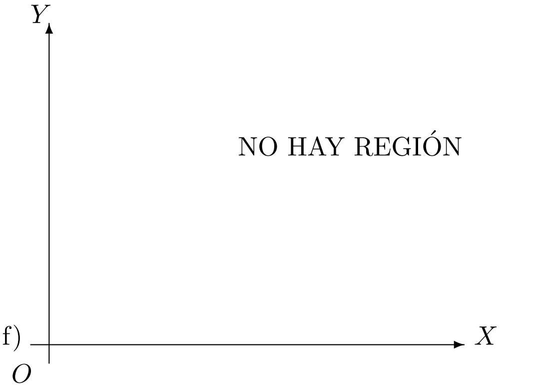
2. a)


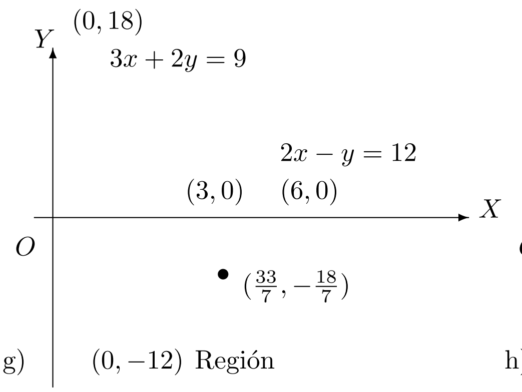
b)


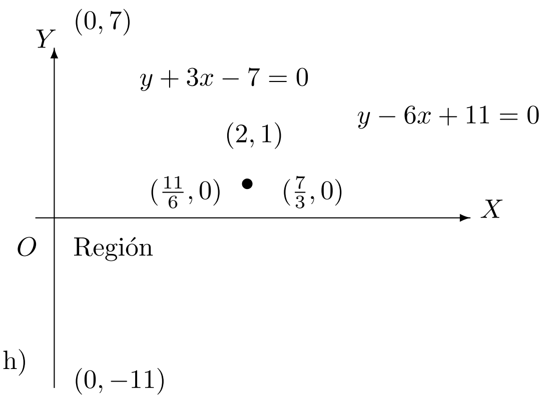
c)


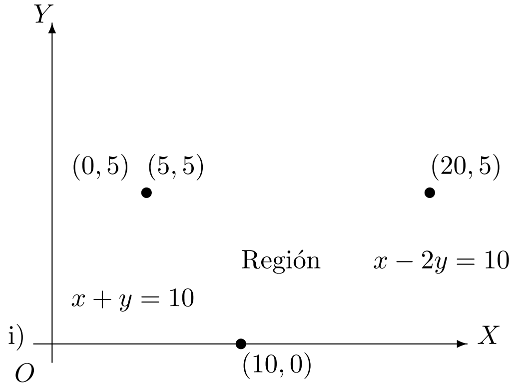
d)


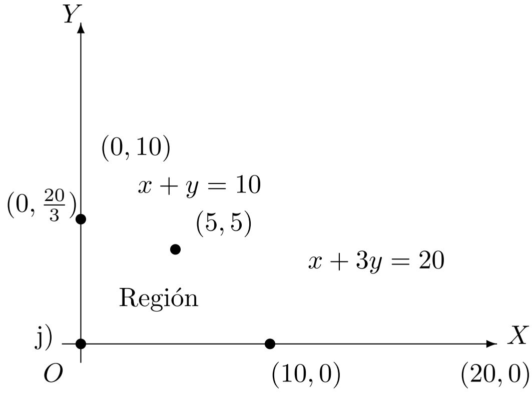
e)


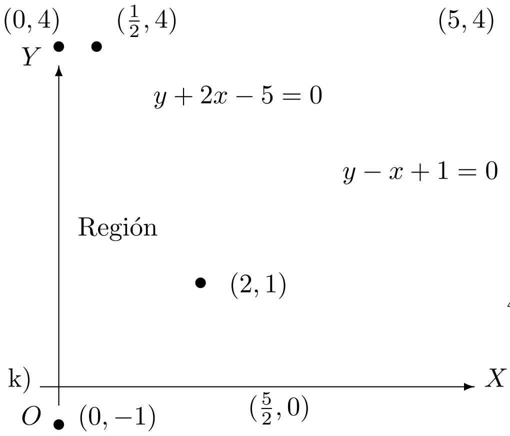
f)


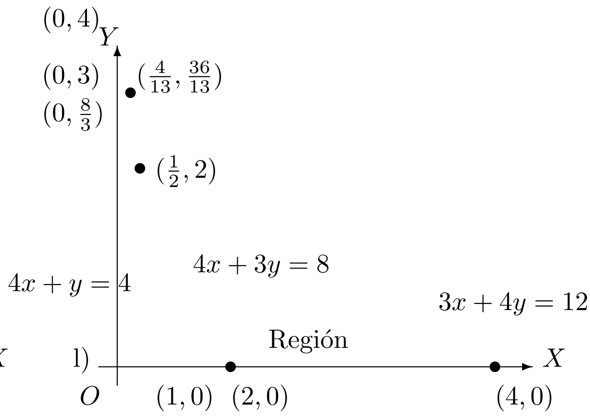
g)


h)


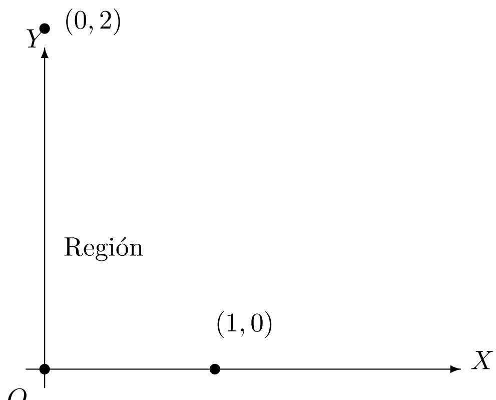




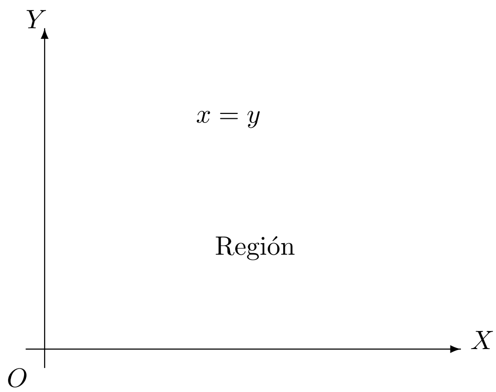




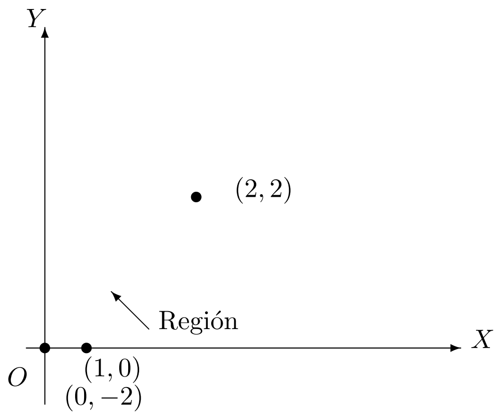
3. a) Máximo en $(2,0)$ y mínimo en $(0,0)$



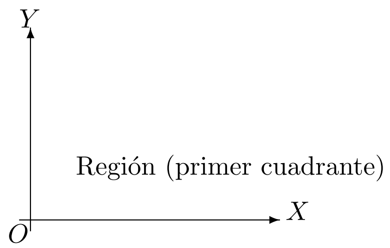
b) Máximo no hay y mínimo en $(0,0)$



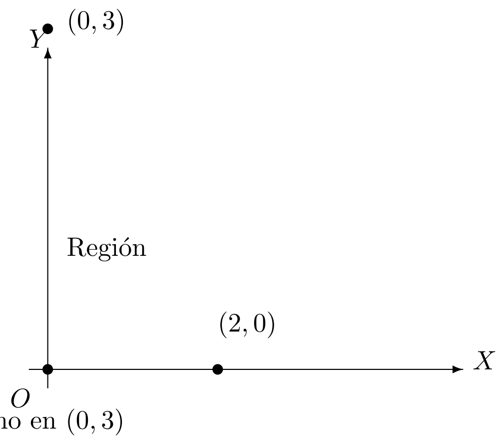
c) Máximo en $(2,2)$ y mínimo en $(0,0)$



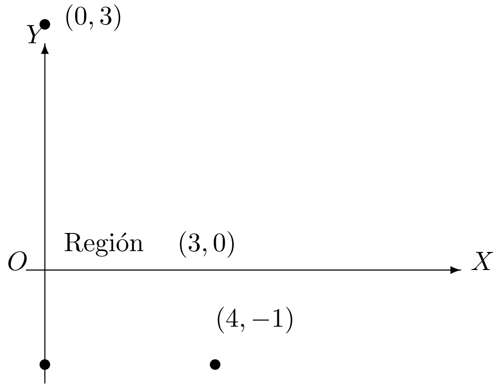
4. Máximo no tiene y mínimo en $(0,0)$



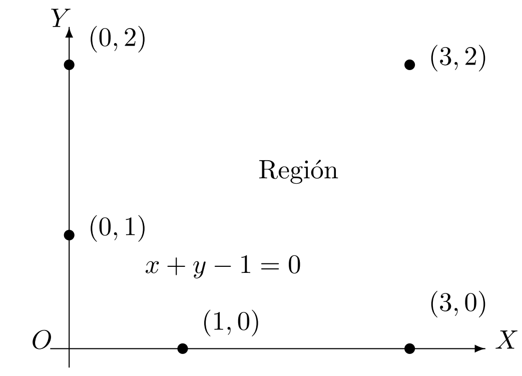
5. Máximo en $(2,0)$ y en $(0,3)$ y mínimo en $(0,0)$



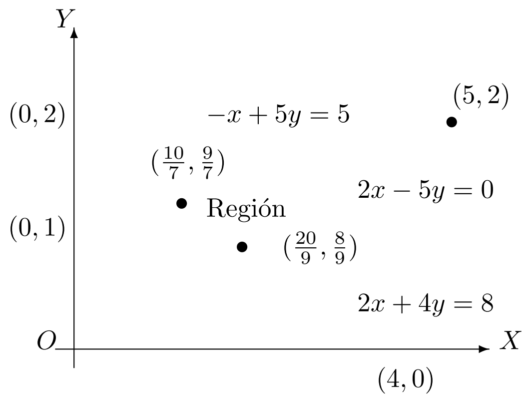
6. Máximo en $(4,-1)$ y mínimo en $(0,3)$



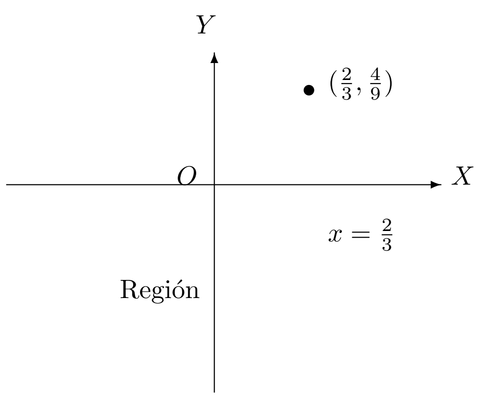
7. Tiene máximo en $(3, 2)$ y mínimo en $(0, 1)$



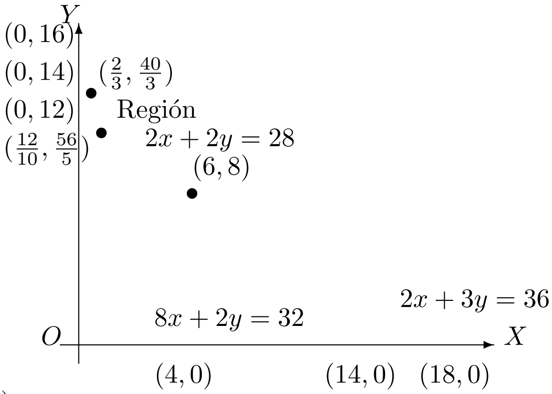
8. Mínimo en $(\frac{20}{9}, \frac{8}{9})$



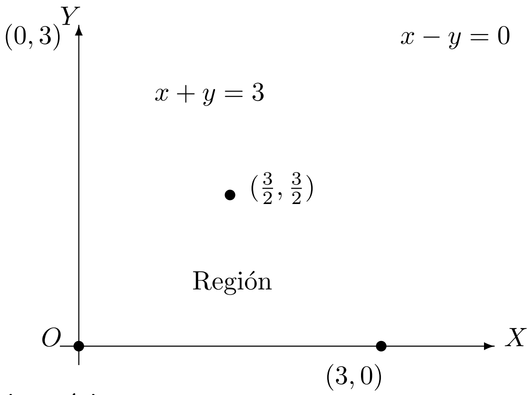
9. Máximo en $(\frac{2}{3}, \frac{40}{3})$



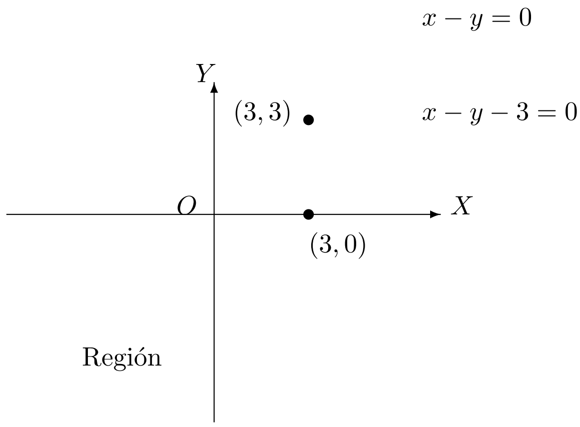
10. Máximo en $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$



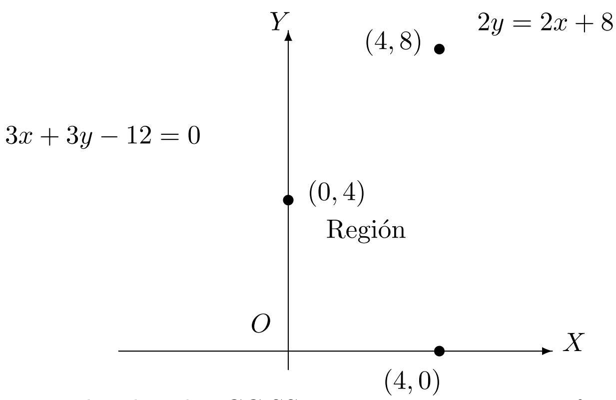
11. Máximo en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ y $(3, 0)$



12. Máximo en $(3, 3)$ y no exite mínimo.

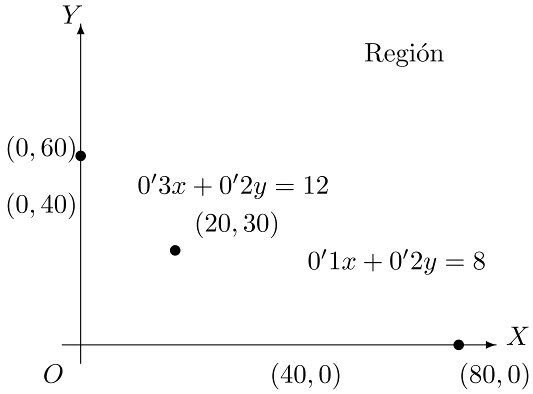


13. Máximo en $(0, 4)$ y $(4, 0)$



14. 20 kilos de M y 30 de N.

	M	N	
N	10%	20%	>8
P	30%	20%	>12
	30	40	
	x	y	

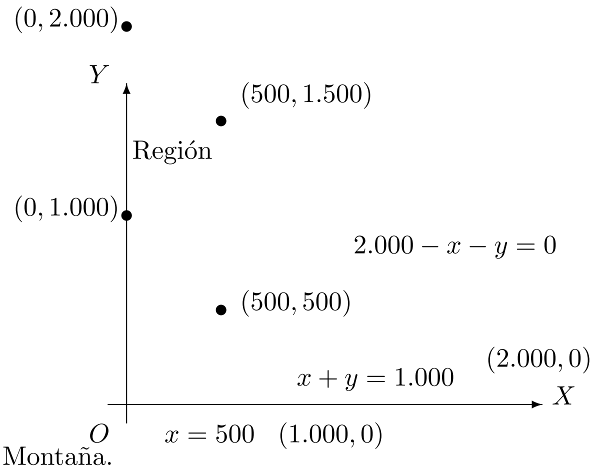


15.

coste	C	D	E
A	x	y	2.000-x-y
B	500-x	3.500-y	x+y-1.000

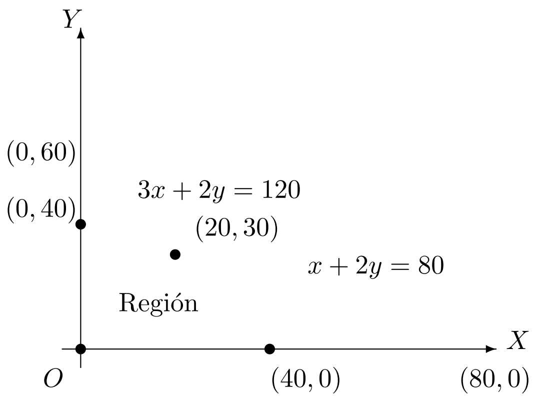
solución

coste	C	D	E
A	500	1.500	0
B	0	2.000	1.000



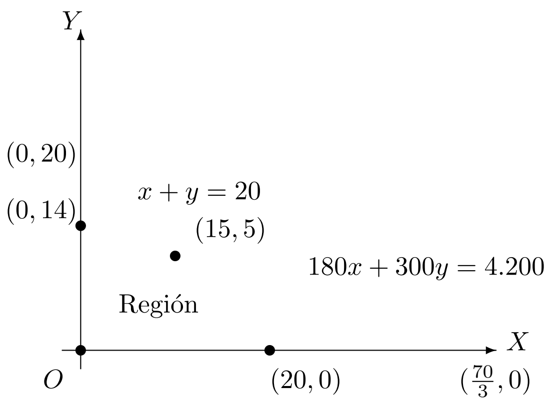
16. 20 de Paseo y 30 de Montaña.

	P	M	
Ac	1	2	<8
Al	3	2	<12
	120	90	
	x	y	



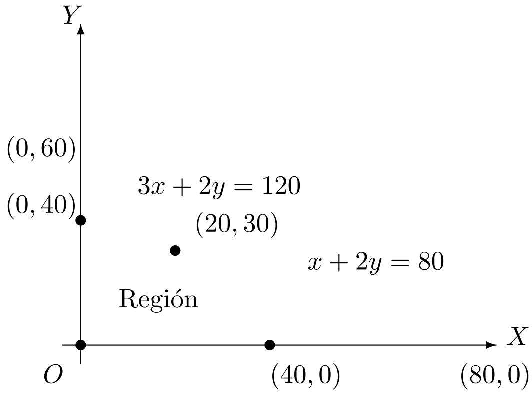
17. 14 del tipo F1.

	F_1	F_2	
Euros	180	300	<4.200
	x	y	<20



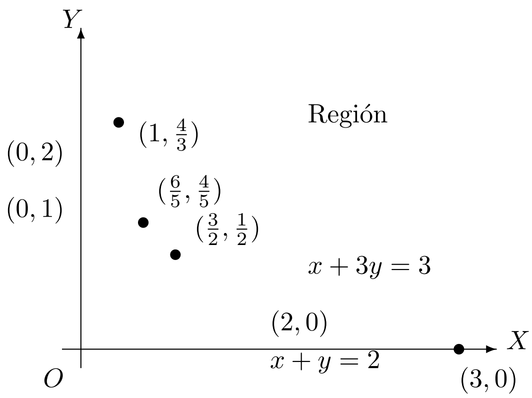
18. 20 de caballero y 30 de señora.

	C	S	
Al	1	2	<8
La	3	2	<12
	x	y	



19. $\frac{6}{5}$ de tipo P y $\frac{4}{5}$ de tipo Q o también $\frac{3}{2}$ de tipo P y $\frac{1}{2}$ de tipo Q

	P	Q	
A	1	1	>2
B	1	3	>3
C	20	7'5	>30
D	2	0	>2
Euros	0'2	0'2	
	x	y	

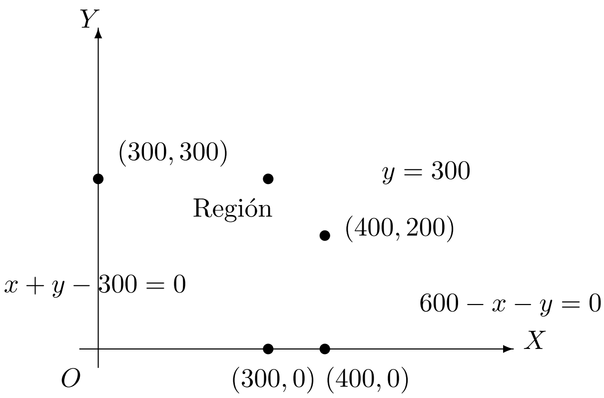


20.

	Cartagena	San Fernando	El Ferrol
Madrid	x	y	600-x-y
Soria	400-x	300-y	x+y-300

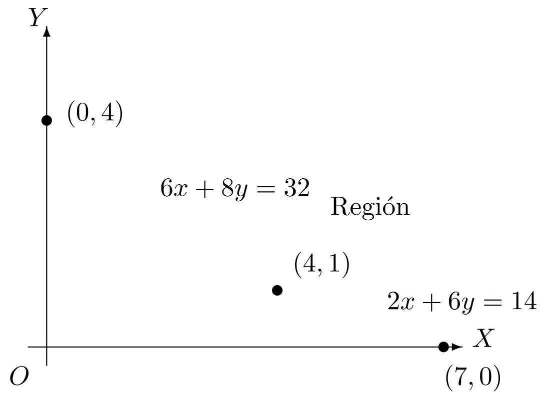
Solución

	Cartagena	San Fernando	El Ferrol
Madrid	300	0	300
Soria	100	300	0



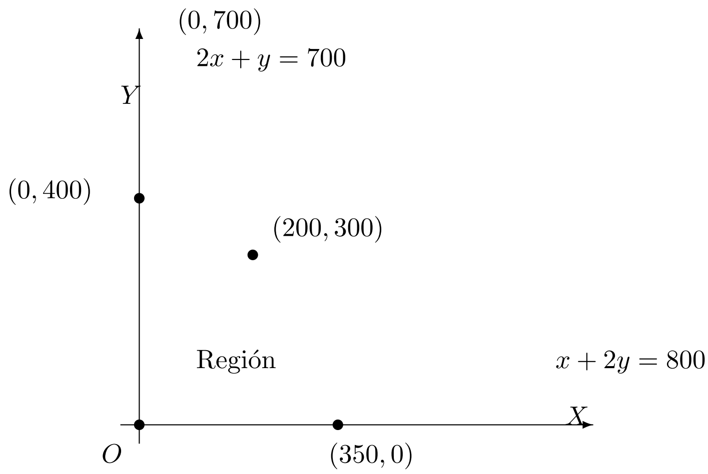
21. 4 del tipo A y 1 del tipo B

	A	B	
HC	40	100	>100
Prot	60	80	>320
Grasas	20	60	>140
Euros	3	4'20	
	x	y	



22. 200 del tipo A y 300 del tipo B

	A	B	
C	2	1	<700
K	1	2	<800
Euros	0'13	0'16	
	x	y	

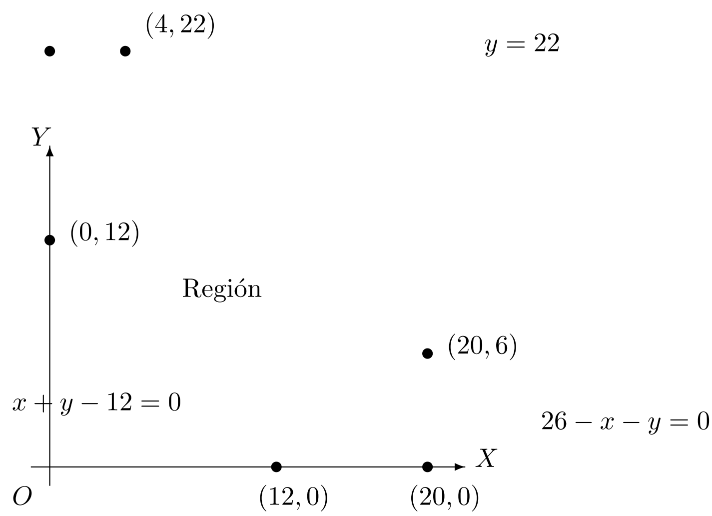


23.

	A_1	A_2	A_3
B_1	x	y	26-x-y
B_2	20-x	22-y	x+y-12

Solución

	A_1	A_2	A_3
B_1	20	0	6
B_2	0	22	8

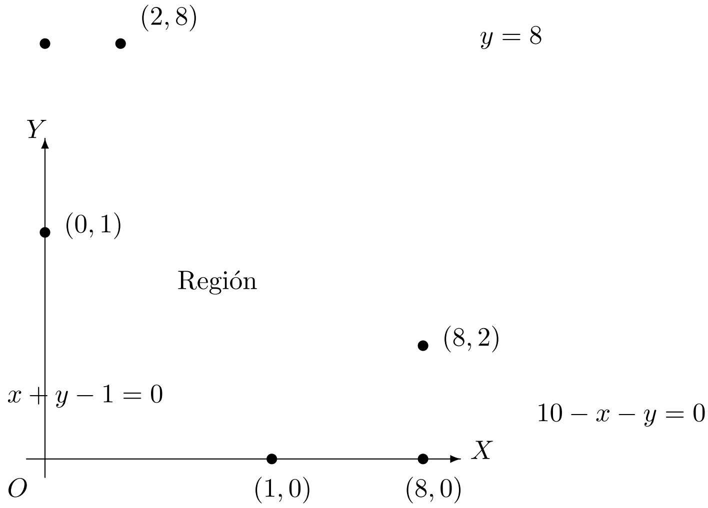


24.

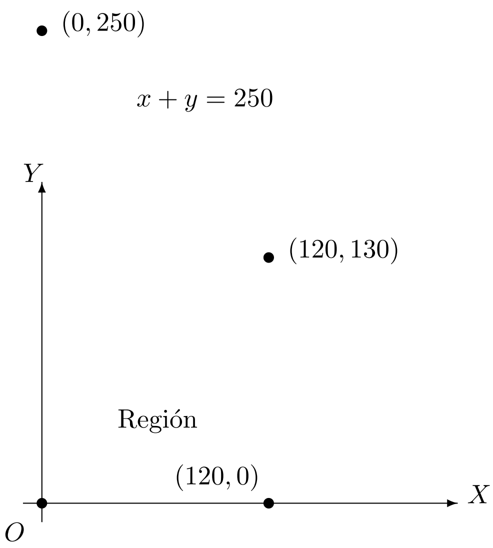
	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	x	y	10-x-y
B	8-x	8-y	x+y-1

Solución

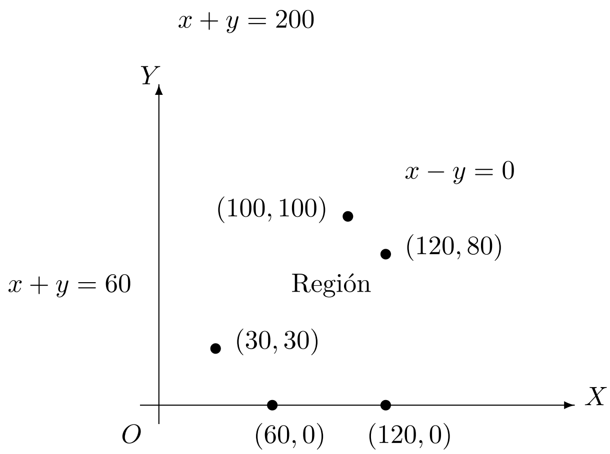
	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	8	2	0
B	0	6	9



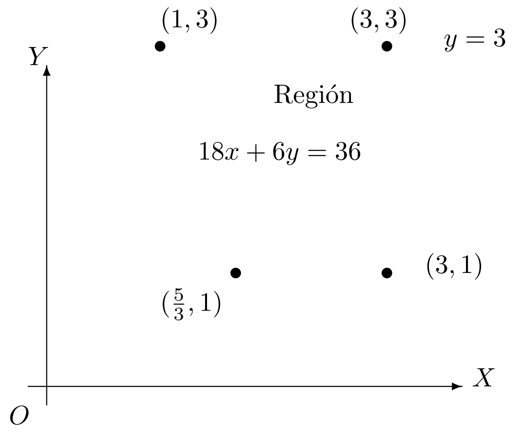
25. 120 del tipo A y 130 del tipo B



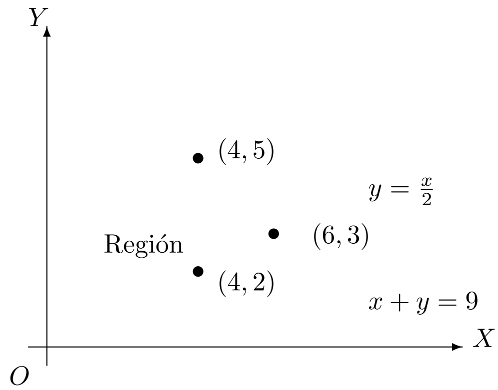
26. 30 del A y 30 del B



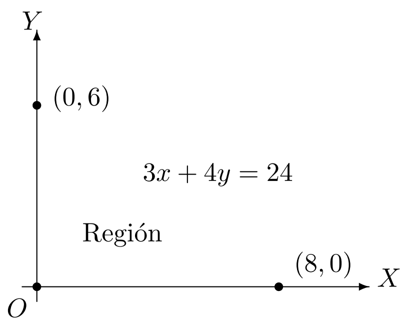
27. 2 del A y 1 del B, 3 del A y 1 del B, 2 del A y 2 del B, 2 del A y 3 del B y 3 del A y 3 del B.



28. 6 del A y 3 del B.

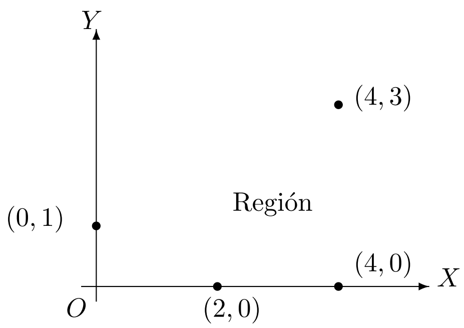


29. 8 del tipo A y ninguno del B

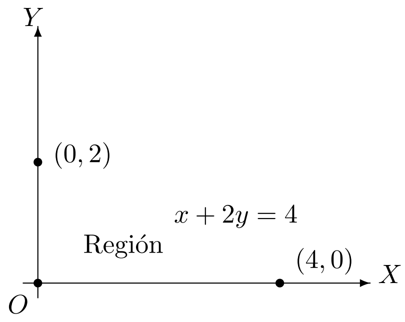


SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

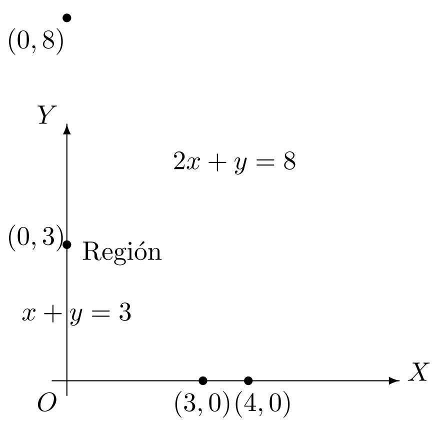
1. $(4,3)$ $(0,1)$ $(2,0)$ $(4,0)$



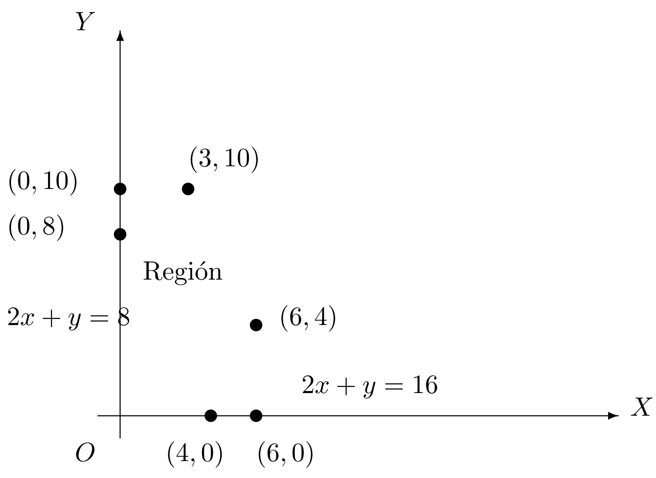
2. Mínimo en $(0, 2)$ que vale -16 y máximo en $(4, 0)$ que vale 8.



3. Mínimo en $(0, 8)$ que vale -24 y máximo en $(4, 0)$ que vale 20.

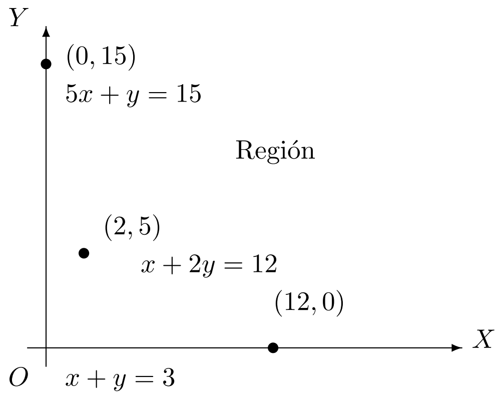


4. Mínimo en $(4, 0)$ y $(0, 8)$ que vale 8 y máximo en $(6, 4)$ y $(3, 10)$ que vale 16.



5. 2 meses la primera y 5 meses la segunda.

	F_1	F_2	
A	1	1	>3
B	5	1	>15
C	1	2	>12
	6	3	
	x	y	

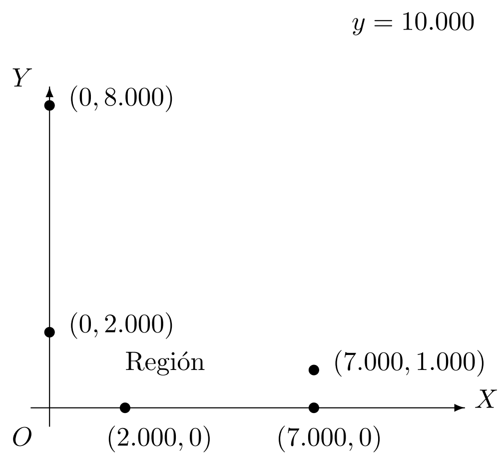


6.

	Fáb. 1	Faáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	x	y	8.000-x-y
Fact. 2	10.000-x	7.000-y	x+y-2.000

Solución

	Fáb. 1	Faáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	2.000	0	6.000
Fact. 2	8.000	7.000	0

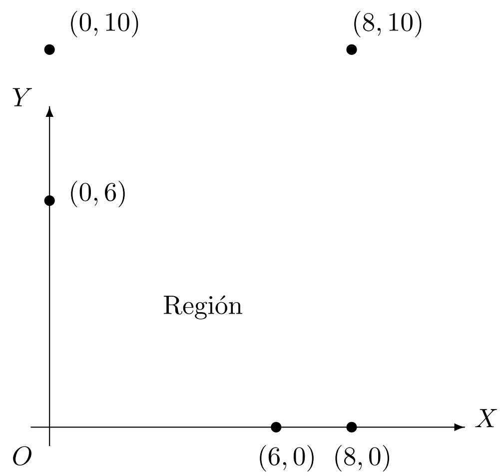


7.

	C_1	C_2	C_3
A_1	x	y	20-x-y
A_2	8-x	10-y	x+y-6

Solución

	C_1	C_2	C_3
A_1	8	0	12
A_2	0	10	2



Tema V

LÍMITES Y CONTINUIDAD

5.1 Funciones Reales

Una **función real de variable real** es toda ley que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales uno y sólo un número real. Se representa por

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = y \end{array}$$

El subconjunto en el que se define la función recibe el nombre de **dominio, campo de definición** de la función o **campo de existencia**, y se designa por $Dom(f)$ o simplemente D.

La letra x, que representa cualquier número del conjunto dominio, recibe el nombre de **variable independiente**.

A la letra y, que representa el número al que f asocia a x, se le llama **variable dependiente** (porque "depende" de lo que valga x).

El conjunto de valores reales que puede tomar la variable y, recibe el nombre de **recorrido** de la función, y se denota por $f(D)$.

Toda función queda determinada por el conjunto de pares de números reales

$$\{(x, y)\} = \{(x, f(x))\}$$

donde x es la variable independiente de f.

Dos funciones reales f y g son iguales, y se denota $f \equiv g$, cuando tienen el mismo dominio y coinciden para todo valor del mismo (es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$).

5.2 Representación de Funciones

Puesto que una función se puede reducir a un conjunto de pares de números

$$\{(x, y),\ x \in D\}$$

su representación consiste en dibujar cada uno de ellos en el plano cartesiano.

Si f es una función real, a cada par $\{(x, f(x))\}$ ($\{(x, y)\}$), determinado por la función f le corresponde en el plano cartesiano un único punto $P(x, y)$.

Más rigurosamente, la gráfica de una función f es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$y = f(x)$$

La construcción de unos cuantos puntos de la gráfica da idea de como varía la función, pero por muchos puntos que dibujemos, es arriesgado unirlos mediante trazos continuos sin un estudio previo de la función.

5.3 Determinación de Funciones

Existen al menos cuatro formas de determinar una función:

- **Descriptivamente:** Explicando con palabras lo que hace la función. Ejemplo: "Función que a cada número real le asigna su doble".
- **Por fórmulas:** La mayoría de las funciones que se presentan en la práctica se expresan generalmente por una fórmula algebraica. Es indudable que se trata de la mejor manera de determinar una función, puesto que se facilita el estudio de sus propiedades por métodos matemáticos rigurosos y exactos. Ejemplo: $f(x) = 2x$.
- **Por gráficas:** Esta forma no exige conocer su correspondiente expresión algebraica. Además la gráfica da una información más rápida que la fórmula y muchas veces es suficiente para tener la información descriptiva y global del fenómeno considerado. Ejemplo:

- **Por tablas de valores:** La experimentación o la observación de un fenómeno en el que intervienen dos magnitudes dependientes nos da un conjunto de valores (x, y), es decir, una tabla. El estudio de esta tabla y de su gráfica de puntos permite algunas veces hallar una fórmula algebraica con la que se pueden obtener otros valores no registrados en la misma. Ejemplo:

x	$y = f(x)$
1	2
2	4
$\vdots$	$\vdots$

5.4 Funciones Acotadas

5.4.1 Cotas Superiores e Inferiores. Acotación

Una función f está **acotada inferiormente** cuando existe un número real K tal que todos los valores que toma la función son mayores que K.

El número real K se llama **cota inferior**.

Una función f está **acotada superiormente** cuando existe un número real K' tal que todos los valores que toma la función son menores que K'.

El número real K' se llama **cota superior**.

Una función está **acotada** si lo está inferior y superiormente.

5.4.2 Extremos: Máximo y Mínimo Absoluto

Se llama **extremo superior** de una función a la menor de las cotas superiores. Si este valor lo alcanza la función se llama **máximo absoluto**.

Se llama **extremo inferior** de una función a la mayor de las cotas inferiores. Si este valor lo alcanza la función se llama **mínimo absoluto**.

Se llama **máximo relativo** de una función en el punto x_0 si existe un entorno reducido con centro en x_0 tal que todo valor de la función en los elementos del entorno es menor que $f(x_0)$.

Se llama **mínimo relativo** de una función en el punto x_0 si existe un entorno reducido con centro en x_0 tal que todo valor de la función en los elementos del entorno es mayor que $f(x_0)$.

5.5 Límites de Funciones

Una función f tiene por límite L en el punto $x = a$, si para toda sucesión de valores $x_n \neq a$ del dominio que tenga por límite a, la sucesión de los valores correspondientes $f(x_n)$ tiene por límite L.

Formalmente se expresa, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$

Se representa: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Otras definiciones de lmite

$$\begin{array}{lcl}
\lim_{x\to a} f(x) = +\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > M \\
\lim_{x\to a} f(x) = -\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| < -M \\
\lim_{x\to a^+} f(x) = L & \iff & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < x-a < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to a^-} f(x) = L & \iff & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < a-x < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < x-a < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > M \\
\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < x-a < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| < -M \\
\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < a-x < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > M \\
\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < a-x < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| < -M \\
\lim_{x\to +\infty} f(x) = L & \iff & \forall \varepsilon > 0\ \exists H > 0 \,/\, x > H \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) = L & \iff & \forall \varepsilon > 0\ \exists H > 0 \,/\, x < -H \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists H > 0 \,/\, x > H \ \Rightarrow\ |f(x)| > M \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty & \iff & \forall M > 0\ \exists H > 0 \,/\, x < -H \ \Rightarrow\ |f(x)| > M
\end{array}$$

5.5.1 Límites laterales

Existen funciones y ocasiones en las que no es posible hallar directamente el límite de una función en un punto, por no encontrarse definida a ambos lados del punto o por cambiar la definición de la función en dicho punto, ...

En esos casos debemos estudiar el comportamiento de la función por ambos lados, y por separado. Para ello definimos los **límites laterales** de la siguiente forma:

- **Límite por la izquierda** es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo menor que a. Se representa por:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

- **Límite por la derecha** es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo mayor que a. Se representa por:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

Evidentemente no puede hallarse el límite de una función a un lado de un punto si la función no está definida en ese lado, con lo cual se dirá que existe el límite por la derecha de $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L, \pm\infty$$

y se dirá que existe el límite por la izquierda de $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L, \pm\infty$$

Hay casos en los que no puede hallarse el límite en un punto, como puede ser un límite que resulte $\frac{0}{0}$, en cuyo caso se dice que el límite es indeterminado, aunque existen casos en los que estas indeterminaciones pueden resolverse. Esto lo veremos más adelante.

5.6 Propiedades de los Límites

1. Si una función tiene límite en un punto, éste es único.

2. Si los límites laterales de una función en un punto son distintos, entonces la función no tiene límite en dicho punto.

$$\text{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) \;\Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

3. Si una función tiene límite distinto de cero en un punto, entonces existe un entorno del mismo en el que los valores que toma la función tienen el mismo signo que el límite.

4. Sean f y g dos funciones tales que existan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y sea c un número real. Las siguientes relaciones son ciertas siempre que tengan sentido las operaciones definidas ya sea en la recta real $I\!R$ o en la recta completa $\overline{I\!R} = I\!R \bigcup \{-\infty, +\infty\}$. En caso contrario no es posible obtener el límite del primer miembro a partir de los límites del segundo. Cuando esto suceda diremos que se trata de un caso indeterminado.

Función	Propiedades
suma	$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
opuesta	$\lim_{x\to a}(-f)(x) = -\lim_{x\to a} f(x)$
diferencia	$\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
producto	$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
inversa (respecto al producto)	$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$
cociente	$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
producto por un número	$\lim_{x\to a}(cf)(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$
constante	$\lim_{x\to a} c = c$
compuesta	$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$ $g =$ raíces, trigonométricas, logaritmo, exponencial...
identidad	$\lim_{x\to a} x = a$
potencia	$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)}$

Los tipos de indeterminación para las operaciones anteriores son los siguientes:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Si al calcular un límite se presenta alguna de estas indeterminaciones, es conveniente transformar la expresión de la función en otra equivalente a la que sí puedan aplicarse los teoremas anteriores o, en caso negativo, calcularlo directamente si ello es posible.

5.7 Cálculo de algunos Límites

5.7.1 Límites de Funciones Racionales

En las funciones racionales aparecen tres tipos de indeterminaciones, aunque en realidad sólo dos de ellas son consideradas como tales:

a) Indeterminación tipo $\frac{k}{0} (k \neq 0)$:

Para resolverla se calculan los límites laterales; si son iguales, la función tiene límite, en caso contrario no existe. Sin embargo, este caso no suele tomarse como indeterminado ya que el límite, si existe, es siempre $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 7.1:

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1} & = & -\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} & = & +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$$

b) Indeterminación tipo $\frac{0}{0}$:

Esta indeterminación en funciones racionales desaparece descomponiendo en factores el numerador y el denominador y simplificando. En general, si se anulan el numerador y el denominador para $x = a$, ambos son divisibles por $x - a$.

Ejemplo 7.2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

c) Indeterminación tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

Esta indeterminación en funciones racionales desaparece dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima que aparezca.

Ejemplo 7.3:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-1}{x^2+1}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{4+0-0}{1+0}=4$$

5.7.2 Límites de Funciones Irracionales

La indeterminación tipo $\frac{0}{0}$ $\infty-\infty$ de funciones con radicales de índice 2 desaparece multiplicando y dividiendo la función por la expresión radical conjugada.

Ejemplo 7.4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=2$$

5.7.3 Límites exponenciales

Para resolver el tipo de indeterminación $1^{+\infty}$ se hace aplicando la propiedad que dice:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\pm\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)[f(x)-1]}$$

que no es otra cosa que la aplicación del número e para resolución de límites generalizado.

Ejemplo 7.5:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[\frac{x^2+3}{x^2-1}\right]^{2x}=e^{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 2x\left[\frac{x^2+3}{x^2-1}-1\right]}=e^0=1$$

5.8 Asíntotas Horizontales y Verticales

5.8.1 Asíntotas Horizontales

La recta $y = k$ es una **asíntota horizontal** de la función f si existe alguno de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=k \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=k$$

Así pues, para calcular las asíntotas horizontales de una función, si es que tiene, se hace tender x hacia $-\infty$ ó $+\infty$ y se observa el valor de la y obtenido.

Observaciones:

- Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, correspondientes a cada uno de los límites en $-\infty$ y $+\infty$.
- La gráfica de la función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos. No obstante, en la mayoría de las funciones elementales la gráfica está permanentemente por encima o por debajo de la asíntota considerada a partir de un punto.
- El conocimiento de la situación de la gráfica con relación a las asíntotas es esencial para la representación de funciones. En el caso de la asíntota horizontal $y = k$ es conveniente estudiar si la función se acerca tomando valores mayores o menores.

5.8.2 Asíntotas Verticales

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función f si existe alguno de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty,$$

Así pues, para calcular las asíntotas verticales de una función, si es que tiene, se localizan los valores finitos de la variable x que hacen tender la variable y a $+\infty$ ó $-\infty$.

Observaciones:

- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.
- En la funciones elementales, la gráfica de la función nunca corta a la asíntota vertical, ya que en los puntos donde existe asíntota no está definida la función.
- La situación de la gráfica de la función con relación a la asíntota $x = a$ se obtiene calculando los límites laterales en $x = a$ y viendo si valen $+\infty$ ó $-\infty$.
- En las funciones racionales, las asíntotas verticales se hallan tomando los puntos que anulan al denominador pero no al numerador.

Ejemplo 8.1:

Calcular las asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

La recta $x = 2$ *es la asíntota vertical.*

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & = & 1^+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & 1^- \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{La recta } y = 1 \textit{ es la asíntota horizontal}$$

5.9 Asíntotas Oblícuas

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$ es una **asíntota oblícua** de la función f si existe alguno de los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ Asíntota oblícua en $+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ Asíntota oblícua en $-\infty$.

La asíntota $y = mx + n$ quedará completamente determinada cuando conozcamos los valores de m y n.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Según el valor de m obtenido al calcular el límite en $+\infty$ (respectivamente en $-\infty$) pueden darse tres casos:

a) Si m es un número real no nulo, la función tiene una asíntota oblícua en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).
b) Si $m = \pm\infty$, la función no tiene asíntota oblícua en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).
c) Si $m = 0$, la función no tiene asíntota oblícua en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).
Conocido m, se tiene:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0 \Leftrightarrow n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

5.9.1 Cálculo de las Asíntotas Oblícuas en las Funciones Racionales

En las funciones racionales no es necesario utilizar límites para calcular los valores de m y n. Se puede hallar directamente la asíntota por el procedimiento siguiente:

Las funciones racionales, si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, pueden expresarse en forma de fracción mixta, basta hacer la división entera. Por ejemplo:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x} = x - 1 + \frac{2}{x}$$

Si $x \to \pm\infty$ se verifica que:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x} \approx x - 1 \quad \text{ya que} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Por tanto, la asíntota oblícua es $y = x - 1$.

Para que el cociente de dos polinomios sea de primer grado, el grado del numerador ha de ser una unidad superior al del denominador.

Observaciones:

- Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblícuas, correspondientes a cada uno de los límites.
- Si una función tiene asíntota oblícua en $+\infty$ y $-\infty$, no puede tener ninguna asíntota horizontal.
- La gráfica de la función puede cortar a la asíntota oblícua en uno o varios puntos. No obstante, en la mayoría de las funciones elementales la gráfica está por encima o por debajo de la asíntota a partir de un punto en adelante.
- La situación de la gráfica con relación a una asíntota se comprueba estudiando si la función se aproxima a ella tomando valores mayores o menores.

5.10 Continuidad en un Punto

Una función f es **continua en un punto** si existe límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

$$f \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La continuidad de f en $x = a$ implica que se cumplan estas tres condiciones:

a) Existe el límite de la función $f(x)$ en $x = a$.

b) La función está definida en $x = a$, es decir, existe $f(a)$.

c) Los dos valores anteriores coinciden.

Si una función no es continua en un punto $x = a$, diremos que es **discontinua** en dicho punto.

Otra definición de continuidad en un punto equivalente a la dada surge como consecuencia de la definición métrica de límite:

Una función f es continua en el punto $x = a$ si a cada número real positivo ε se le puede asociar otro número real positivo δ, tal que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Una función es **continua por la derecha** en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

$$f \text{ es continua en } a^+ \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Una función es **continua por la izquierda** en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

$$f \text{ es continua en } a^- \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto dado, entonces es continua en dicho punto.

5.11 Discontinuidades

Una función es **discontinua** en un punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor de la función en el mismo.

Para la clasificación de las discontinuidades en un punto tendremos en cuenta la existencia o no de los límites laterales en el mismo.

5.11.1 Discontinuidad Evitable

Una función tiene una **discontinuidad evitable** en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo.

El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama verdadero valor de la función en el mismo.

5.11.2 Discontinuidad inevitable

Una función tiene una **discontinuidad inevitable** en un punto cuando existen los límites laterales en él y son distintos.

Si f es discontinua en el punto $x = a$, el valor

$$|\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)|$$

se llama **salto de la función** en ese punto, y puede ser finito o infinito.

5.12 Continuidad en un Intervalo

Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si lo es en cada uno de sus puntos.

Una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si lo es en todos los puntos de (a, b), y además es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

PROBLEMAS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to -3^-} \frac{3}{2x-6}$ $\quad b)\ \lim_{x\to -2} \frac{6}{x^2-4}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 4^+} \frac{2x}{x^2-16}$

$d)\ \lim_{x\to -1} \frac{4x+5}{x^2-2}$ $\quad e)\ \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$ $\quad f)\ \lim_{x\to \infty} \frac{x^6+x}{x^4-3}$

$g)\ \lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+x}}{x}$ $\quad i)\ \lim_{x\to \infty} \left[\sqrt{x+3}-(x^2+1)\right]$

$j)\ \lim_{x\to 1} \frac{4x}{2x^2-2}$ $\quad k)\ \lim_{x\to -3} \frac{5x}{9-x^2}$ $\quad l)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

$m)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ $\quad n)\ \lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{(x-2)^2}$ $\quad o)\ \lim_{x\to -2} \frac{2x+4}{x^2-4}$

$p)\ \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2x^3-1}}{3x^4}$ $\quad q)\ \lim_{x\to \infty} \frac{(1+x)^2-1}{x}$ $\quad r)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

$s)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-7}{\sqrt[3]{x^6+x}}$ $\quad t)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)$ $\quad u)\ \lim_{x\to \infty} \left(4x-\sqrt{16x^2-3x}\right)$

2. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^4+1}-x^2)$ $\quad b)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^{5x}$ $\quad c)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

$d)\ \lim_{x\to 0} (1-7x)^{\frac{4}{x}}$ $\quad e)\ \lim_{x\to \infty} \left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$ $\quad f)\ \lim_{x\to -\infty} \left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{-4x}$

$g)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{x^3}\cdot\frac{x^2+5x}{4}\right)$ $\quad h)\ \lim_{x\to \infty} \left(\frac{2}{x}\cdot\sqrt{x^2+8}\right)$ $\quad i)\ \lim_{x\to 2} \left(\sqrt{x^2-4}\cdot\frac{8}{3x-6}\right)$

$j)\ \lim_{x\to -1} \left(\frac{5}{4x+4}\cdot\frac{x+1}{7x}\right)$ $\quad k)\ \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$ $\quad l)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

$m)\ \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-8x+16}$ $\quad n)\ \lim_{x\to \infty} (\sqrt{x+1}-x)$ $\quad o)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x-5}{3x-2}\right)^{2x^2}$

3. Determina las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$$

4. Halla las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$$

5. Determina las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{2x^3}{25-x^2}$$

6. Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} 3^{-x} \qquad c)\ \lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1} \qquad f)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$$

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x)=\begin{cases} 5-\frac{|x|}{x} & si \quad x\neq 0 \\ 5 & si \quad x=0 \end{cases} \qquad b) f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ 6 & si \quad x=3 \end{cases} \qquad c) f(x)=\frac{x^4-16}{x^2-4}$$

$$d) f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x>-1 \\ 3 & si \quad x\leq -1 \end{cases} \qquad e) f(x)=|x^2-6x+5|$$

$$f) f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq 2 \\ x+1 & si \quad x>2 \end{cases} \qquad g) f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

8. Dibuja una gráfica que se ajuste a las siguientes condiciones:
   - Continua en $I\!R-\{-3,1,5,7\}$
   - $\lim_{x\to -3} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 1} f(x)=-2$; $f(1)=0$
   - Discontinuidad de salto finito en $x=5$ y de salto infinito en $x=7$
   - $f(-2)=0$

9. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $I\!R$.

$$a) f(x)=\begin{cases} kx-3 & si \quad x<4 \\ -x^2+10x-13 & si \quad x\geq 4 \end{cases} \qquad b) f(x)=\begin{cases} 1+|x| & si \quad x<0 \\ k & si \quad x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$c) f(x)=\begin{cases} \frac{x+2}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ k & si \quad x=2 \end{cases} \qquad d) f(x)=\begin{cases} \frac{2x+2}{x^2-1} & si \quad x\neq -1 \\ k & si \quad x=-1 \end{cases}$$

$$e) f(x)=\begin{cases} \frac{4-(x+2)^2}{x} & si \quad x\neq 0 \\ k & si \quad x=0 \end{cases} \qquad f) f(x)=\begin{cases} \frac{3x}{2x-1} & si \quad x\neq \frac{1}{2} \\ k & si \quad x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g) f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & si \quad x\neq 1 \\ k & si \quad x=1 \end{cases} \qquad h) f(x)=\begin{cases} x^2+kx & si \quad x\leq 2 \\ k-x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Sea $f: I\!R \longrightarrow I\!R$ una función que cumple las siguientes condiciones:
   - f es continua en todos los puntos excepto en $x=3$
   - $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

   halla la gráfica de la función.

2. Halla el valor o los valores del parámetro a para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<1 \\ (a^2+2a)x+e & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

   sea continua.

3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |3-x| & si \quad x \leq 5 \\ Ln\, e^2 & si \quad x > 5 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

4. Calcula m, n, p y q para que la siguiente función sea continua en todo $I\!R$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & si \quad x < -8 \\ -2m+3 & si \quad -8 \leq x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & si \quad -4 \leq x < 2 \\ px & si \quad 2 \leq x < 4 \\ q^2 & si \quad 4 \leq x \end{cases}$$

5. Halla las asíntotas de la función: $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < 2 \\ x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

, represéntela y estudia la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

7. El gasto mensual en alimentación de las familias de cierta ciudad depende de su renta según la relación:

$$G(x) = \begin{cases} 0,6x + 10 & si \quad 0 \leq x \leq 100 \\ \frac{100x}{x+24} & si \quad x > 100 \end{cases}$$

donde la renta y el gasto vienen expresados en miles de pesetas.

(a) Basándote en la continuidad, el crecimiento y la existencia de una asíntota no oblícua, representa gráficamente $G(x)$

(b) Sin hacer ningún cálculo, contesta razonadamente si hay alguna familia cuyo gasto mensual en alimentación sea de 66.000 pesetas.

8. Dibuja la gráfica y escribe las ecuaciones de una función real que cumpla: sea continua en todos los puntos; sea lineal si $x < -3$, cuadrática en el intervalo $[-3, 3]$ y tienda a cero cuando $x \longrightarrow +\infty$

SOLUCIONES DE LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.
$$\begin{array}{llllll} a)-\frac{1}{4} & b)\infty & c)+\infty & d)-1 & e)\nexists & f)\infty \\ g)0 & h)\infty & i)-\infty & j)\infty & k)\infty & l)\frac{3}{4} \\ m)0 & n)\infty & o)-\frac{1}{2} & p)0 & q)\infty & r)0 \\ s)2 & t)0 & u)\frac{3}{8} & & & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{llllll} a)0 & b)1 & c)e^4 & d)e^{-28} & e)1 & f)e^8 \\ g)\infty & h)2 & i)\infty & j)-\frac{5}{28} & k)\infty & l)-\frac{1}{2} \\ m)\infty & n)\infty & o)\infty & & & \end{array}$$

3. A.V.: $x = 2$; A.O.: $y = x + 2$
4. A.V.: $x = \pm 2$; A.H.: $y = 1$
5. A.V.: $x = \pm 5$; A.O.: $y = -2x$
6.
$$a)\frac{2}{3} \quad b)0 \quad c)e^3 \quad d)1 \quad e)0 \quad f)\infty$$

7.
$$\begin{array}{lll} a)\ \textit{No continua en } x=0. & b)\ \textit{Continua.} & c)\ \textit{No continua en } x=\pm 2 \\ d)\ \textit{No continua en } x=-1 & e)\ \textit{Continua.} & \\ f)\ \textit{Continua.} & g)\ \textit{Continua.} & \end{array}$$

8. Depende del alumno.
9.
$$\begin{array}{llll} a)k=\frac{14}{4} & b)k=1 & c)\ \nexists & d)k=-1 \\ e)k=4 & f)\ \nexists & g)k=4 & h)k=-8 \end{array}$$

SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

1. Depende del alumno.
2. $a = 0 \qquad a = -2$
3. $f(x)$ continua. $g(x)$ no continua en $x = 0$
4. $m = 27/16$, $n = -8/29$, $p = 45/16$ y $q = \sqrt{45}/2$
5. A.V.: $x = \pm 1$ y A.O.: $y = x$
6. Continua en $x = 0$,continua en $x = 1$ y discontinua en $x = 2$
7. (a) Teórico.
   (b) Si.
8. Depende del alumno.

Tema VI

DERIVADAS

6.1 Tasa de variación media

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de una función en un momento y una situación determinada respecto de una variable o de la otra. Ahora estudiaremos el comportamiento de la función relacionando ambas variables y estudiando el comportamiento de una variable respecto a la otra, lo que nos da una idea del movimiento de la función.

A esta relación entre variables le llamamos **tasa de variación media** de la función y se define como:

Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, se llama **tasa de variación media** de la función f en el intervalo $[a, b]$ al cociente:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si en vez de tomar el intervalo $[a, b]$, tomamos un intervalo que comience en a y tenga de longitud h entonces tendremos que:

$$TVM(a, h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si nos interesa calcular esa tasa de variación mientras ese intervalo va siendo cada vez menor, tendremos que h tiende a cero, con lo cual llegamos a la definición de **tasa de variación instantánea** en un punto que está definida de la siguiente forma:

Dada una función f definida en un entorno del punto a, se llama **tasa de variación instantánea** de la función f en el punto $x = a$ al límite de las tasas de variación media cuando los intervalos considerados son cada vez más pequeños.

$$TVI(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La tasa de variación instantánea en un punto nos indica la inclinación de la función en dicho punto.

6.2 Derivada de una función en un punto

Se llama **derivada de la función f en el punto** $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe se dice que la función es **derivable** en el punto $x = a$. La derivada de una función en un punto es un número real.

Para designar la derivada de la función f en el punto $x = a$, se emplean diversas notaciones: $y'(a)$, $f'(a)$, $Df(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$.

Si hacemos $x = a + h$, entonces $h = x - a$, con lo que $x \to a$ cuando $h \to 0$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior se obtiene una segunda forma de expresar la derivada:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

6.2.1 Derivadas laterales

Se llama **derivada por la izquierda** de la función f en el punto $x = a$ al límite siguiente, si es que existe:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Se llama **derivada por la derecha** de la función f en el punto $x = a$ al límite siguiente, si es que existe:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La derivada por la izquierda se designa por $f'(a)^-$ y la derivada por la derecha por $f'(a)^+$.

De otra forma:

$$f'(a)^- = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad f'(a)^+ = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

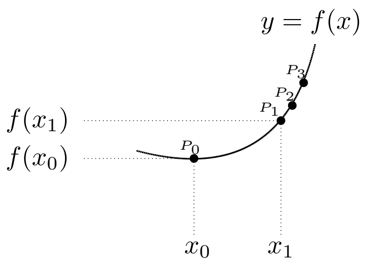
Una función es derivable en un punto si y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden.

Una función es derivable en un intervalo abierto (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos.

Una función es derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es derivable en cada punto de (a,b) y derivable por la derecha en a y por la izquierda en b.

6.3 Interpretación geométrica de la derivada

6.3.1 La derivada como pendiente de la recta tangente



Sea $P_0(x_0, f(x_0))$ un punto fijo y sea $P_i(x_i, f(x_i))$ un punto cualquiera de la gráfica correspondiente a la función $y = f(x)$

La pendiente de la recta secante P_0P_i es:

$$m_i = \frac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i - x_0}$$

Si los puntos P_i se aproximan hacia el punto P_0, sus abscisas x_i tenderán a x_0. Por tanto, si indicamos por m_t la pendiente de la recta tangente en P_0, resulta:

$$m_t = \lim_{x_i\to x_0} \frac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i - x_0}$$

que es la derivada de la función f en el punto $x = x_0$, correspondiente al punto P_0.

La recta tangente es el límite de la secante, y su pendiente coincide con el límite de las pendientes de las secantes.

La pendiente de la tangente en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto:

$$m_t = f'(x_0)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P_0(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

6.4 Función derivada. Derivadas Sucesivas

6.4.1 Función derivada

Si una función f es derivable en un subconjunto D' de su dominio D, es posible definir una nueva función que asocie a cada número real de D' su derivada en ese punto. Esta función así definida se llama **función derivada**, o simplemente, **derivada**.

$$\begin{array}{rccc} f: & D' \subset D & \longrightarrow & R \\ & a & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

La notación de la derivada de la función $y = f(x)$ viene dada por $y' = f'(x)$ o por $Df(x)$.

Una función f es derivable en un punto a si cumple las dos siguientes condiciones a la vez:

- La función es continua en dicho punto.

- La función derivada es continua en dicho punto.

Ejemplo 4.1 :*Sea la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función no es continua claramente y su función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ pero al no ser continua f ya podemos decir que f no es derivable en $x = 0$

Ejemplo 4.2 : *Sea la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 3x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función no es continua claramente y su función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x < 0 \\ 2x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ y los límites laterales en cero son iguales por lo que podemos definir la función derivada en cero como $f'(0) = 0$, con lo cual será continua y por tanto $f(x)$ es derivable.

6.4.2 Derivadas sucesivas

A partir de la función derivada primera se puede definir, si existe, también su derivada, y recibe el nombre de **derivada segunda**. Se designa por $y'' = f''(x) \quad D^2 f(x)$.

Análogamente se definen las funciones derivadas tercera, cuarta, quinta,..., n-ésima, que se designan por:

$$f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), ..., f^{n}(x) \qquad D^3 f(x), D^4 f(x), D^5 f(x), ..., D^n f(x)$$

6.5 Operaciones con derivadas

Función	**Definición**
suma	$(f + g)' = f' + g'$
diferencia	$(f - g)' = f' - g'$
producto	$(fg)' = f'g + fg'$
cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
producto por un número	$(af)' = af'$
compuesta	$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
inversa	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$

<u>Observación:</u> La derivación de la composición de funciones se llama **regla de la cadena**. La fórmula de la composición de funciones se extiende a tres o más funciones aplicando la regla de la cadena repetidamente.

6.6 Derivadas de las funciones elementales

Tipo	**Simples**	**Compuestas**
Potenciales	$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$ $\mathrm{D}k = 0$ $\mathrm{D}x = 1$ $\mathrm{D}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{D}f^n = nf^{n-1} \cdot f'$ $\mathrm{D}\sqrt{f} = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
Logarítmicas	$\mathrm{D}\ln x = \dfrac{1}{x}$ $\mathrm{D}\log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e$	$\mathrm{D}\ln f = \dfrac{f'}{f}$ $\mathrm{D}\log_a f = \dfrac{f'}{f}\log_a e$
Exponenciales	$\mathrm{D}e^x = e^x$ $\mathrm{D}a^x = a^x \ln a$	$\mathrm{D}e^f = e^f \cdot f'$ $\mathrm{D}a^f = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
Trigonométricas	$\mathrm{D}\operatorname{sen} x = \cos x$ $\mathrm{D}\cos x = -\operatorname{sen} x$ $\mathrm{D}\operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $= \sec^2 x$ $= \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{D}\operatorname{sen} f = \cos f \cdot f'$ $\mathrm{D}\cos f = -\operatorname{sen} f \cdot f'$ $\mathrm{D}\operatorname{tg} f = (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f'$ $= \sec^2 f \cdot f'$ $= \dfrac{f'}{\cos^2 f}$
Inversas de Trigonométricas	$\mathrm{D}\operatorname{arcsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\mathrm{D}\arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\mathrm{D}\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{D}\operatorname{arcsen} f = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$ $\mathrm{D}\arccos f = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$ $\mathrm{D}\operatorname{arctg} f = \dfrac{f'}{1+f^2}$

Para derivar la función potencial-exponencial f^g se usa la derivación logarítmica y resulta:

$$\begin{array}{ll}
y = f(x)^{g(x)} & \text{tomando logaritmos} \\
\ln y = \ln(f(x)^{g(x)}) & \text{por propiedades del logaritmo} \\
\ln y = g(x)\ln f(x) & \text{derivando la igualdad} \\
\dfrac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)} & \text{despejando } y' \\
y' = y \cdot (g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}) & \text{es decir} \\
y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right) &
\end{array}$$

También podemos derivarla teniendo en cuenta que el primer sumando corresponde a la derivada de la función considerada como potencial y el segundo como exponencial.

$$\mathrm{D}f^g = \underbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}_{\text{potencial}} + \underbrace{f^g \cdot \ln f \cdot g'}_{\text{exponencial}}$$

PROBLEMAS DE DERIVADAS

1. Calcula la tasa de variación en el intervalo $[1,4]$ para las siguientes funciones:

$$f(x) = 3x + 2 \qquad g(x) = 4 - x^2 \qquad h(x) = \sqrt{x+5} \qquad r(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

2. Busca la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = x^2 + x - 2$ en el punto 2.

3. Calcula usando la definición de derivada, las derivadas siguientes en los puntos en que se indica:

$$f(x) = x \quad enx = 2 \qquad f(x) = 2x^2 + 3 \ en \ x = 1$$

$$f(x) = \frac{3}{x} \ en \ x = 3 \qquad f(x) = \sqrt{x-2} \ en \ x = 6$$

4. Una recta de pendiente igual a 5 es tangente a la función $f(x) = 2x^2 + x$. Halla el punto de tangencia.

5. Halla las ecuaciones de la recta tangente y normal a la función $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 3$ en el punto $x = 1$.

6. Dada la función $f(x) = ax + b$, calcula a y b, de manera que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$.

7. Calcula las derivadas sucesivas de la función $f(x) = -x^3 + x + 1$

8. Halla las rectas tangente y normal a la función $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$ en el punto $x = 2$.

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ 3 + 7x^5 - 6x^4$	$b)\ \sqrt{x^3}$	$c)\ 3^x$	$d)\ (sen\, x)^{tg\, x}$
$e)\ (x^2+x)^{Ln\, x}$	$f)\ x^{\frac{1}{5}}$	$g)\ log_2\, x$	$h)\ x^{\frac{1}{2}} x^2$
$i)\ 8x^3$	$j)\ sen\, x^3$	$k)\ 2x^3 \cdot sen\, x$	$l)\ sen^2\, 3x^5$
$m)\ \frac{x - sen\, x}{x^3}$	$n)\ x^3 \cdot x^2$	$o)\ (x^2+x)^4$	$p)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

10. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+1}$	$b)\ 4^{\frac{3}{x}}$	$c)\ 3 \cdot 2^x$	$d)\ 2^{x^2} 3^{x^2}$
$e)\ e^{2x^2} - e^x - 2$	$f)\ (e^{2x+1})^3$	$g)\ Ln\,(x^2+7)$	$h)\ Ln\,(e^x+2)$
$i)\ Ln\, \sqrt[3]{3x^2+1}$	$j)\ Ln\, Ln\, x$	$k)\ Ln\,(x\sqrt{4-x^2})$	$l)\ Ln\, \frac{1+x}{1-x}$
$m)\ 2^{3x}$	$n)\ (1-x)\sqrt{1+x}$	$o)\ 2^x Ln\, x$	$p)\ x^x$

11. Calcula la derivada de las siguientes funcines:

$a)\ \frac{2^{3x}}{x^2}$	$b)\ (e^{2x}+3)^4$	$c)\ Ln\, \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$	$d)\ Ln\, \sqrt{x(2-x)}$
$e)\ (4x+2)\sqrt{4x-2}$	$f)\ \sqrt[4]{x^4-2}$	$g)\ (1+\sqrt{3})^{2x}$	$h)\ \frac{1}{1+x} + Ln\, \frac{1}{1+x}$
$i)\ (x+1)^{2x}$	$j)\ tg\, sen\, x$	$k)\ \frac{2x^2+1}{2x^2-1}$	$l)\ x^{Ln\, x}$
$m)\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	$n)\ x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$	$o)\ cos\, x \cdot sen\, x$	$p)\ 2sen\, x + sen\, 2x$

12. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3$ en el punto de abscisas $x = -1$.

13. Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ en el punto de abscisas $x = 2$.

14. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = e^x$ es $y = x + 1$?.

15. ¿Cuál es el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^3$ es paralela al eje de abscisas?.

16. Las ganacias anuales brutas de una compañia vienen dadas por la expresión $G(x) = 5t^2 + 2t + 500$ millones de pesetas, siendo t el tiempo transcurrido desde 1980.

    (a) ¿Cuál es la tasa de variación de las ganancias desde 1980 hasta 1990?.

    (b) ¿Cuál es la variación en 1985?.

17. ¿En que punto de la curva $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?.

18. Dada la función $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5$, calcula el valor de a, para que $D[f(1)] = -3$. Haz el estudio análogo para la función $g(x) = \dfrac{x^2 - x - a}{x + 1}$, siendo $D[g(1)] = 0$

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Halla el valor de la derivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ para $x = 0$, explicando los pasos efectuados.

2. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 5x^3$ en el punto de abscisas $x = 2$.

3. Calcula el valor de m para que la derivada de la función $y = \dfrac{mx^2 + 1}{2x + m}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ valga 1.

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en $x = 1$.

5. Se ha trazado una recta tangente a la curva $y = x^3$, cuya pendiente es tres y pasa por $(0, -2)$. Halla el punto de tangencia.

6. Dada la función $f(x) = 1 - x + x^2$

    (a) Mediante límites, calcula $f'(2)$

    (b) ¿Qué significado tiene $f'(2)$?. Deduce el punto de corte de la recta tangente a la curva en $x = 2$, con el eje OX.

7. Considerese la curva de ecuación $y = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$

    (a) ¿Cuánto debe valer k si las tangentes a los puntos $A = (1, y(1))$ y $B = (-2, y(-2))$ son paralelas.?

    (b) Determina las ecuaciones de ambas tangentes.

8. Calcula b para que la tasa de variación media de la función $f(x) = Ln\,(x + b)$ en el intervalo $[0, 2]$ valga $Ln\,2$. Calcula a continuación la tasa de variación instantánea en los extremos de dicho intervalo.

SOLUCIONES DE DERIVADAS

1.

$$f(x):3 \qquad g(x):-5 \qquad h(x):\frac{3-\sqrt{6}}{3} \qquad r(x):-2/5$$

2. 5

3. Teórico.

4. $(1,3)$

5. Tangente $y = x+1$ y normal $y = -x+3$

6. $a = 2 \qquad b = -1$

7. $f'(x) = -3x^2+1 \qquad f''(x) = -6x \qquad f'''(x) = -6$ las demás son 0.

8. Tangente $y = 8x-9$ y normal $y = -\frac{1}{8}x + \frac{29}{4}$

9.

a) $f'(x) = 35x^4 - 24x^3$

b) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

c) $f'(x) = 3^x\, Ln\, 3$

d) $f'(x) = (sen\, x)^{tg\, x}[(1+tg^2x)Ln\, sen\, x + 1]$

e) $f'(x) = (x^2+x)^{Ln\, x}[\dfrac{Ln(x^2+x)}{x} + \dfrac{(2x+1)Ln\, x}{x^2+x}]$

f) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

g) $f'(x) = \frac{Ln\, 2}{x}$

h) $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

i) $f'(x) = 24x^2$

j) $f'(x) = 3x^2\, cos\, x^3$

k) $f'(x) = 6x\, sen\, x + 2x^3\, cos\, x$

l) $f'(x) = 30x^4\, sen\, 3x^5\, cos\, 3x^5$

m) $f'(x) = \dfrac{(1-cos\, x)x^3 - 3x^2(x - sen\, x)}{x^6}$

n) $f'(x) = 5x^4$

o) $f'(x) = 4(2x+1)(x^2+x)^3$

p) $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

10.

a) $f'(x) = -\frac{4x}{3}(x^2+1)^{-\frac{5}{3}}$

b) $f'(x) = Ln\, 4 \cdot 4^{\frac{3}{x}}(-\frac{3}{x^2})$

c) $f'(x) = 3\cdot 2^x\, Ln\, 2$

d) $f'(x) = 6^{x^2} Ln\, 6 \cdot 2x$

e) $f'(x) = 4xe^{2x^2} - e^x$

f) $f'(x) = 6e^{6x+3}$

g) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+7}$

h) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$

i) $f'(x) = \frac{2x}{3x^2+1}$

j) $f'(x) = \frac{1}{x\, Ln\, x}$

k) $f'(x) = \frac{2(2-x^2)}{x(4-x^2)}$

l) $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

m) $f'(x) = 3\cdot 2^{3x} Ln\, 2$

n) $f'(x) = \frac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

o) $f'(x) = 2^x Ln^2 x + \frac{2^x}{x}$

p) $f'(x) = x^x(Ln\, x + 1)$

11.

$a)\ f'(x) = \frac{2^{3x} Ln\, 2 \cdot 3x^2 - 2x 2^{3x}}{x^4}$ $b)\ f'(x) = 6e^{2x}(e^{2x}+3)^3$ $c)\ f'(x) = \frac{9}{x}$

$d)\ f'(x) = \frac{1-x}{x(2-x)}$ $e)\ f'(x) = \frac{12x-4}{\sqrt{4x-2}}$

$f)\ f'(x) = x^3(x^4-2)^{-\frac{3}{4}}$ $g)\ f'(x) = 2Ln(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{2x}$

$h)\ f'(x) = \frac{-2-x}{(1+x)^2}$ $i)\ f'(x) = (x+1)^{2x}[2Ln(x+1) + \frac{2x}{x+1}]$

$j)\ f'(x) = (1+tg^2 sen\, x) cos\, x$ $k)\ f'(x) = \frac{-8x}{(2x^2-1)^2}$

$l)\ f'(x) = x^{Ln\, x} \frac{2Ln\, x}{x}$ $m)\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ $n)\ f'(x) = \frac{23}{6} x^{\frac{17}{6}}$

$o)\ f'(x) = cos^2 x - sen^2 x$ $p)\ f'(x) = 2cos\, x + 2cos\, 2x$

12. $y = 3x + 2$
13. Tangente : $y = -x + 3$ y normal : $y = x - 1$
14. $(0, 1)$
15. $(0, 0)$
16. (a) 52
    (b) 27
17. $(1, -\frac{1}{2})$
18. $a = 22$ $a = -2$

SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

1. 0
2. $y = 60x - 80$
3. $m = -2$
4. $y = -\frac{1}{2}x + 1$
5. $(-1, -1)$
6. (a) Teórico.
   (b) $x = 1$
7. (a) $k = 4$
   (b) $y = 12x - 12$ $y = 12x - 18$
8. $b = \frac{2}{3}$

Tema VII

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

7.1 Continuidad y Derivabilidad

Si una función es derivable en un punto $x = a$, entonces es continua en dicho punto. Veámoslo:
Sabiendo que $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ hay que probar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$$

Multiplicando y dividiendo por $x - a$:

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\cdot(x - a)\right) = \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\| \\ f'(a)}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a}(x - a)}_{\substack{\| \\ 0}} = 0$$

Sin embargo, el recíproco de este teorema no es cierto. Cualquier función derivable es continua, pero una función continua no es necesariamente derivable. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en él.

De este teorema se deduce que las funciones derivables forman un subconjunto de las funciones continuas.

7.2 Derivada en un punto máximo o mínimo

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b). Si la función alcanza un máximo o un mínimo en un punto c del intervalo y es derivable en él, entonces su derivada es nula.

La interpretación geométrica de este hecho es que la recta tangente en un punto máximo o mínimo es paralela al eje de abscisas.

7.3 Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del mismo x y x', se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

Esta relación puede expresarse también en función de la tasa de variación media:

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > 0 \quad \text{(tasa de variación media positiva)}$$

Una función f es **creciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del mismo x y x', se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

o también: $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0$ (tasa de variación media positiva o nula).

Si tomamos $x = a$ y se verifican las relaciones anteriores en un entorno simétrico del mismo, se dice que la función es creciente en dicho punto.

Una función f es **estrictamente decreciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del mismo x y x', se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

o también: $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} < 0$ (tasa de variación media negativa)

Una función f es **decreciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del mismo x y x', se cumple:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

o también: $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leq 0$ (tasa de variación media negativa o nula).

Si tomamos $x = a$ y se verifican las relaciones anteriores en un entorno simétrico del mismo, se dice que la función es decreciente en dicho punto.

7.4 Intervalos de monotonía en funciones derivables

Estudiar la monotonía de una función es hallar los intervalos en los que es sólo creciente o sólo decreciente.

De la tasa de variación media que aparece en la definición de monotonía se pasa, tomando límite, a la derivada:

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

Criterio de la Derivada primera

- Si $f' > 0$ en un intervalo, entonces la función es estrictamente creciente en él.
- Si $f' < 0$ en un intervalo, entonces la función es estrictamente decreciente en él.

7.5 Máximos y mínimos

La función f tiene en $x = a$ un **máximo relativo** si existe un entorno de a, $(a - h, a + h)$, tal que para todo x del intervalo $(x - h, x + h)$ se tiene: $f(x) \leq f(a)$.

La función f tiene en $x = a$ un **mínimo relativo** si existe un entorno de a, $(a - h, a + h)$, tal que para todo x del intervalo $(x - h, x + h)$ se tiene: $f(x) \geq f(a)$.

Los puntos máximos o mínimos relativos se llaman también **puntos críticos, estacionarios o singulares.**

<u>Teorema</u>

Si una función tiene máximos o mínimos relativos y es derivable en ellos, entonces su derivada se anula en esos puntos.

La demostración la hicimos en el tema anterior, ya que la tangente en los puntos críticos es paralela al eje de abscisas y, por tanto, su pendiente es cero.

Este teorema nos permite hallar los puntos candidatos a ser máximo o mínimo. Estos puntos son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Obtenidos estos puntos, los siguientes criterios precisan si en ellos existe máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas.

Criterio 1: Variación de la función en el entorno del punto

Si sustituimos en la función x por $a - h$ y $a + h$ para un valor h suficientemente pequeño y se verifica:

- $\left.\begin{array}{rcl} f(a+h) & \leq & f(a) \\ f(a-h) & \leq & f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = a$.
- $\left.\begin{array}{rcl} f(a+h) & \geq & f(a) \\ f(a-h) & \geq & f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Criterio 2: Variación del signo de la primera derivada en el entorno del punto

- Si a la izquierda de $x = a$ es $f' > 0$ (función creciente) y a la derecha es $f' < 0$ (función decreciente), entonces la función alcanza un máximo relativo en $x = a$.
- Si a la izquierda de $x = a$ es $f' < 0$ (función decreciente) y a la derecha es $f' > 0$ (función creciente), entonces la función alcanza un mínimo relativo en $x = a$.

Criterio 3: Valor de la derivada segunda en el punto

- Si $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = a$.
- Si $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = a$.

7.6 Problemas sobre máximos y mínimos

El cálculo de máximos y mínimos por derivadas permite resolver de una manera sencilla y rápida muchos problemas que aparecen tanto en matemáticas como en otras disciplinas científicas. Son problemas en los que se trata de optimizar una función. Para resolverlos, seguiremos el esquema general siguiente:

1. Mediante los datos del problema se construye la función que hay que maximizar o minimizar; la mayoría de las veces en función de dos o más variables.

2. Si la función tiene más de una variable hay que relacionar las variables mediante ecuaciones a fin de conseguir expresar la función inicial planteada en el punto 1. utilizando una sola variable.

3. Se hallan los máximos y mínimos de esta función.

4. Se interpretan los resultados obtenidos rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.

Ejemplo 6.1:
Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 metros.
Solución:
$P: 2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$
$S = xy \Rightarrow S(x) = x(20 - x) \Rightarrow S'(x) = 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$
$\Rightarrow$ *Es un cuadrado de 10 metros de lado.*

7.7 Concavidad y convexidad

Una función definida en un intervalo es **convexa** si mira hacia la parte positiva del eje de ordenadas. Una función es **cóncava** si mira hacia la parte negativa del eje de ordenadas.

Si la función es convexa, la gráfica de la función queda encima de la recta tangente en cada uno de los puntos y si la función es cóncava, la gráfica de la función queda debajo de la recta tangente en cada uno de los puntos.

7.7.1 Criterios de convexidad o concavidad

- Criterio 1: **Derivada primera.**

  Sea f una función definida en el intervalo I.

  - Si f' es creciente en el intervalo I, la función f es convexa en I.
  - Si f' es decreciente en el intervalo I, la función f es cóncava en I.

- Criterio 2: **Derivada segunda.**

  - Si $f'' > 0$ en el intervalo I, la función f es convexa en I.
  - Si $f'' < 0$ en el intervalo I, la función f es cóncava en I.

7.8 Puntos de inflexión

Una función f tiene un **punto de inflexión** en $x = a$ si en dicho punto la función pasa de convexa a cóncava o de cóncava a convexa. Si la función pasa de convexa a cóncava, diremos que $x = a$ es un **punto de inflexión convexo-cóncavo**. Si la función pasa de cóncava a convexa, diremos que $x = a$ es un **punto de inflexión cóncavo-convexo**.

Si una función tiene puntos de inflexión, entonces su derivada segunda se anula en esos puntos.

Este resultado nos permite calcular los puntos de la gráfica f que pueden ser de inflexión. Las abscisas de estos puntos son las raíces de la ecuación $f''(x) = 0$.

7.8.1 Criterios para decidir si un punto es de inflexión

- **Criterio 1: Signo de la derivada segunda en el entorno del punto.**
  - Si a la izquierda de $x = a$ es $f'' > 0$ (f convexa) y a la derecha de $x = a$ es $f'' < 0$ (f cóncava), entonces $x = a$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo.
  - Si a la izquierda de $x = a$ es $f'' < 0$ (f cóncava) y a la derecha de $x = a$ es $f'' > 0$ (f convexa), entonces $x = a$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo.
- **Criterio 2: Valor de la derivada tercera en el punto.**
  - Si $f'''(a) > 0$, f tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo.
  - Si $f'''(a) < 0$, f tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo.

7.9 Esquema a seguir en la representación de funciones

1. Dominio y recorrido de la función.
2. Simetrías:
   (a) Simetría respecto del eje OY: función par.
   (b) Simetría respecto del origen: función impar.
3. Periodicidad.
4. Puntos de corte con los ejes:
   (a) Corte con el eje OX: $y = 0$ (varios puntos posibles).
   (b) Corte con el eje OY: $x = 0$ (punto único: $(0, f(0))$ si $0 \in$ Dom (f)).
5. Regiones de existencia de la función:
   (a) Intervalos de positividad: $f > 0$.
   (b) Intervalos de negatividad: $f < 0$.
6. Ramas infinitas:
   (a) Punto $(-\infty, ?)$ (punto de partida de la gráfica).
   (b) Punto $(+\infty, ?)$ (punto de llegada de la gráfica).
7. Asíntotas:
   (a) Asíntotas verticales.
   (b) Asíntotas horizontales.
   (c) Asíntotas oblicuas.
8. Puntos de discontinuidad.
9. Monotonía:
   (a) Intervalos de crecimiento ($f' > 0$).
   (b) Intervalos de decrecimiento ($f' < 0$).
   (c) Puntos críticos: máximos o mínimos ($f' = 0$ y $f'' \neq 0$).
10. Curvatura:
    (a) Intervalos de convexidad ($f'' > 0$).
    (b) Intervalos de concavidad ($f'' < 0$).
    (c) Puntos de inflexión ($f'' = 0$ y $f''' \neq 0$).

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA DERIVADA

1. Estudiar la monotonía y los extremos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 4x - x^2$ *b)* $f(x) = -5x + 3$ *c)* $f(x) = \frac{2}{x}$ *d)* $f(x) = e^{3x}$

   e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ *f)* $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ *g)* $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ *h)* $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

   i) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ *j)* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ *k)* $f(x) = e^x + x$ *l)* $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

   m) $f(x) = \frac{x}{Ln\,x}$ *n)* $f(x) = x \cdot Ln\,x$ *o)* $f(x) = \frac{8x}{x^2+2}$

2. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor -1.Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en su punto de inflexión.
3. Halla b y c para que la curva $y = x^3 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$
4. Halla a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto $(6, -12)$ y se anule para $x = 8$.
5. Representa las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2\sqrt{x^2 + 4}$ *b)* $f(x) = \frac{2}{x}$ *c)* $f(x) = xe^{-2x}$ *d)* $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$

   e) $f(x) = Ln\,(x + 4)$ *f)* $f(x) = \frac{x}{x-1}$ *g)* $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2}$ *h)* $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$

6. Halla un número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima
7. Haz el estudio completo de la función:
$$f(x) = x(x - 1)^3$$
8. En la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, halla a, b, y c para que la función tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $(0, 0)$.
9. Encuentra los extremos relativos y los puntos de inflexión de las funciones:
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad g(x) = \frac{3x - 1}{3x^2 + 1}$$
10. Determina el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que pasa por el punto $(-1, 24)$, tiene un mínimo en el punto $(1, 0)$ y tiene 2 como raiz.
11. La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.
12. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + x + 2$ en su punto de inflexión.
13. Representa las siguientes funciones:

    a) $f(x) = x(x + 2)(x - 2)$ *b)* $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ *c)* $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

    d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$ *e)* $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ *f)* $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

    g) $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ *h)* $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$ *i)* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

    j) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ *k)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$ *l)* $f(x) = Ln\,(x - 2)$

    m) $f(x) = \frac{Ln\,x}{x}$ *n)* $f(x) = Ln\,\sqrt{x^2 + 4}$

14. Representa gráficamente la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x \geq 0 \\ x-1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. Dibuja la gráfica de una función con las siguientes condiciones:
   (a) El recorrido de la función es $[-2, +\infty)$
   (b) La función es decreciente en $(-\infty, -2)$
   (c) La función presenta un máximo relativo en el punto $x = 2$ y el valor de la función en dicho punto es 4.
   (d) La función es discontinua en $x = 0$.
   (e) En el punto $x = 5$, la función es continua, pero no derivable.

2. Halla a y b para que la función $f(x) = a \cdot Ln\, x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x = 1$, $x = 2$. Para estos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en 1 y en 2?.

3. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función:
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

4. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80cm por 50cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente se construye una caja. Calcula x para que el volumen de la caja sea máximo.

5. El coste de la producción de x unidades diarias de un determinado producto es $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 25$ y el precio de venta es $50 - \frac{x}{4}$ euros. Halla el número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

6. En 1.980 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años de acuerdo con la función: $N(x) = 50(2x^3 - 15x^2 + 36x + 2)$
   (a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?.
   (b) ¿En qué periodos de tiempo aumenta el número de sus socios?.

7. Estudia el crecimiento y los extremos de la función:
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

8. Halla los valores de m para que la siguiente función:
$$f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$$
sea cóncava hacia arriba para todo $x \in I\!R$.

9. Dada la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, halla los coeficientes a, b, c y d para que se cumplan las siguientes condiciones:
   La gráfica de la función tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, siendo la tangente en este punto paralela a la recta $4x - y = 5$ y, además, pasa por el punto $(1, 1)$

10. Dada la función $y = |x^2 - 7|$, se pide:
    (a) Represéntala gráficamente
    (b) Ecuación de la recta tangente en el punto de abscisas $x = 1$.
    (c) Halla sus máximos y mínimos relativos.

11. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 0 < x < 1 \\ Ln\, x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Representa gráficamente $f(x)$

   (b) A partir de su gráfica, estudia el crecimiento de $f(x)$. Halla los puntos de corte con los ejes.

12. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$$

   (a) Calcula sus asíntotas.

   (b) Calcula sus máximos y mínimos.

   (c) Represéntala gráficamente.

SOLUCIONES DE APLICACIÓN DE LA DERIVADA

1. a) Crece $(-\infty, 2)$, decrece $(2, +\infty)$. Máximo en $(2, 4)$

   b) Decrece siempre.

   c) Decrece siempre.

   d) Creciente.

   e) Crece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, decrece $(0, 2)$. Máximo en $(0, 5)$ y mínimo en $(2, 1)$

   f) Crece.

   g) Crece $(3, +\infty)$, decrece $(-\infty, -3)$.

   h) Crece $(0, +\infty)$, decrece $(-\infty, 0)$. Mínimo en $(0, 0)$

   i) Crece $(0, +\infty)$, decrece $(-\infty 0)$. Mínimo en $(0, -1)$

   j) Crece $(-1, 1)$, decrece $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Máximo en $(1, 1/2)$ y mínimo en $(-1, -1/2)$

   k) Creciente.

   l) Crece $(-\infty, 3)$, decrece $(3, +\infty)$. Máximo en $(3, 4)$

   m) Crece $(e, +\infty)$, decrece $(0, e)$. Mínimo en (e, e)

   n) Crece $(1/e, +\infty)$, decrece $(0, 1/e)$. Mínimo en $(1/e, -1/e)$

   o) Crece $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, decrece $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Máximo en $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ y mínimo en $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

2. No influye. $y = 4x - 3$

3. $b = 0$ y $c = 4$

4. $a = 3$, $b = -36$ y $c = 86$

5. a) b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

6. 2.

7.

8. $c = 0 \qquad b = -3a$

9. $f(x)$ no tiene.Para $g(x)$: Máximo en $(1, 1/2)$ y mínimo en $(-1/3, -3/2)$. Punto de inflexión en:

$$\frac{1 - 4\,cos\,(2\pi/9)}{3} \qquad \frac{1 - 4\,sen\,(\pi/18)}{3} \qquad \frac{1 + 4\,cos\,(\pi/9)}{3}$$

10. $a = 42 \qquad b = 24 \qquad c = -30 \qquad d = 12$

11. $x = y = z = 20$

12. $y = x + 2$

13. a) b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

i)

j)

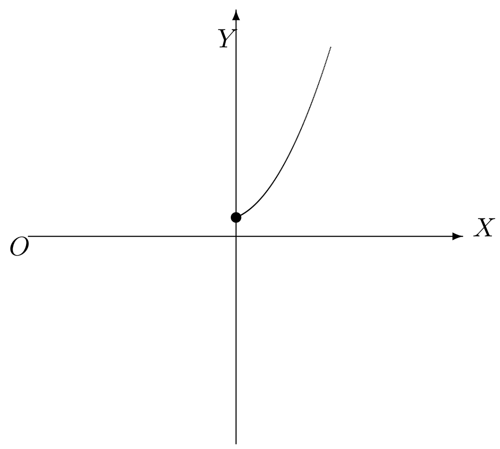
k)

l)

m)

n)

14. $f(x)$



SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

1. Depende de cada alumno. item $a = -2/3$ y $b = -1/6$
2. Decreciente
3. El corte es de 10 cm.
4. 6
5. (a) 100
   (b) desde el inicio hasta los dos años y a partir del tercer año.
6. Crece $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, decrece $(2, 4)$ con máximo en $(2, 0)$ y mínimo en $(4, -5)$
7. $m > 6$
8. $a = -3 \qquad b = 0 \qquad c = 4 \qquad d = 0$

9.

$y = -2x + 8$ con máximo en $(0, 7)$ y mínimos en $(\pm\sqrt{7}, 0)$

10. Crece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, decrece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Los puntos de corte son $(-2, 0)$ $(0, 0)$ $(1, 0)$

11. (a) A.V.:$x = -1/2$ y A.O.: $y = 1/2x - 1/4$
    (b) Máximo en $(-2, -2)$ y mínimo $(1, 1)$.
    (c)

Tema VIII

COMBINATORIA. TÉCNICAS DE RECUENTO

La combinatoria es parte del álgebra que tiene aplicación práctica en diversas ramas de la ciencia e incluso en las letras y en las artes.

La combinatoria prescinde de la naturaleza de los elementos, pero no del orden en que estén colocados. A cada elemento se le designa por un signo distinto, generalmente por letras diferentes o con las mismas letras afectadas de diversos subíndices $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

La combinatoria se ocupa del estudio y propiedades de los distintos grupos que se pueden formar con los elementos de un conjunto dado, diferenciándose entre sí:

- Por el número de elementos que entran en cada grupo.
- Por la clase de los elementos.
- Por el orden de colocación.

Estudiaremos tres clases de agrupaciones:

1. Variaciones.
2. Permutaciones.
3. Combinaciones.

que nos ayudarán a "contar" las diferentes maneras en que se pueden agrupar una serie de elementos bajo ciertas condiciones.

8.1 Diagramas de árbol

Es la técnica de recuento más sencilla, más usual, más intuitiva pero más larga a menudo y más pesada.

Consiste en crear un "árbol" uniendo las agrupaciones que queramos unir. Solo hace falta sentido común, atención y paciencia.

Ejemplo 1.1:

Una chica tiene en su armario 3 camisetas, 2 pantalones y 3 zapatillas deportivas. ¿De cuántas formas distintas podrá vestirse para hacer deporte?.

<u>Solución:</u>

Designamos las tres camisetas por c_1, c_2, c_3 *, los dos pantalones por* p_1, p_2 *y las zapatillas por* z_1, z_2, z_3.

Formemos el diagrama de árbol:

		z_3
	p_1	z_2
		z_1
c_1		z_3
	p_2	z_2
		z_1
		z_3
	p_1	z_2
		z_1
c_2		z_3
	p_2	z_2
		z_1
		z_3
	p_1	z_2
		z_1
c_3		z_3
	p_2	z_2
		z_1

Con lo cual tenemos que podrá formar 18 equipaciones distintas.

8.2 Variaciones sin repetición

LLamaremos **variaciones ordinarias o variaciones sin repetición**, de m elementos tomados de n en n, a los diferentes grupos que con esos m elementos se pueden formar, de tal modo que en cada grupo entren n elementos distintos y que un grupo se diferencia de los demás, bien en alguno de los elementos, bien en el orden de colocación de los mismos.

En este caso se debe cumplir siempre que $n < m$ y las variaciones de m elementos tomados de n en n se representa por:

$$\boxed{V_m^n \ o \ V_{m,n}}$$

Supongamos que tenemos m elementos:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$$

y queremos hacer grupos de:

1 elemento: Entonces tendremos m grupos posibles.

2 elementos: Suponiendo que cogemos a_1 podemos elegir luego entre los $m-1$ restantes para formar los grupos.

Pero esto lo podemos hacer no solo con el elemento a_1 sino con cualquiera de los m elementos que tenemos, así pues podemos formar $m-1$ grupos distintos con cada m elementos que tenemos, obteniendo en total:

$$m \cdot (m-1) \ grupos$$

3 elementos: Suponemos que tenemos una pareja compuesta con los elementos a_1a_2. Entonces para formar un grupo de 3 elementos con a_1a_2 en primer lugar, tenemos $m-2$ elementos posibles y por lo tanto $m-2$ posibilidades.

Como teníamos $m \cdot (m-1)$ parejas posibles entonces por cada una habrá $m-2$ posibilidades y por tanto en total tendremos:

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ grupos$$

Siguiendo el razonamiento se llega a la conclusión que los grupos posibles que se pueden formar con m elementos tomados de n en n es:

$$\boxed{V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}$$

Ejemplo 2.1:

En un alfabeto de 21 letras. ¿Cuántas sílabas distintas, de tres letras cada una, se pueden formar?.

<u>*Solución:*</u>

Dos sílabas son distintas si tienen distintas letras o están en distinto orden y por tanto son variaciones de 21 elementos tomados de tres en tres y por tanto:

$$m = 21 \ n = 3 \implies V_{21}^3 = \underbrace{21 \cdot 20 \cdot 19}_{3 \ elementos} = 7.980$$

8.3 Variaciones con repetición

Llamamos **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n, a los diferentes grupos que con ellos se pueden formar, de tal modo que en cada grupo entren n elementos, pudiendo alguno repetirse una o varias veces y considerando dos grupos distintos si se diferencian en algún elemento, o en el orden en que están colocados.

En este caso no es necesario que $n < m$ ya que puede repetirse elementos.

Al número de todas las posibles variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por:

$$\boxed{VR_m^n \quad o \quad VR_{m,n}}$$

Suponemos que tenemos m elementos:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$$

y queremos hacer grupos de:

1 elemento: Evidentemente solo habrá m grupos distintos.

2 elementos: Una vez escogido un elemento, por ejemplo el a_1, podemos elegir el segundo elemento de la posible pareja de entre los m elementos que tenemos - pues podemos repetir -, obteniendo m posibilidades distintas una vez escogido el primero. Como podemos escoger el primero de entre los m elementos posibles resulta un total de:

$$m \cdot m = m^2 \ grupos$$

3 elementos: Una vez que tenemos dos elementos cualesquiera podemos elegir el tercero de entre los m elementos que tenemos y por tanto de cada m^2 parejas existen m posibilidades de formar trios y por tanto en total obtendríamos:

$$m^2 \cdot m = m^3 \ grupos$$

Siguiendo el razonamiento se llega a la conclusión que los posibles grupos que se pueden formar con m elementos tomados de n en n en este caso son:

$$\boxed{VR_m^n = m^n}$$

Ejemplo 3.1:

¿Cuántos caracteres del alfabeto Morse se podrán escribir utilizando 6 signos (puntos o rayas)?.
Solución:
Dos caracteres son distintos si tienen disintos signos o en distinto lugar, pudiéndose repetir signos en un carácter, por lo tanto, son variaciones con repetición:

$$m = 2 \ n = 6 \Longrightarrow VR_2^6 = 2^6 = 64$$

8.4 Permutaciones sin repetición

Llamaremos **permutaciones** de m elementos a las variaciones de esos m elementos tomados de m en m, es decir, a los diversos grupos que con ellos se pueden formar, de modo que, entrando todos ellos en cada grupo, se diferencien cada uno de ellos solamente en el orden de colocación de los elementos.

Las permutaciones de m elementos se representan de la siguiente forma:

$$\boxed{P_m}$$

Siguiendo la definición de las variaciones obtenemos:

$$V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)$$

Pero en este caso $n = m$

$$V_m^m = P_m = m \cdot (m-1) \cdots (m-m+1) = m \cdot (m-1) \cdots 1$$

Por lo tanto llegamos a la conclusión de:

$$\boxed{P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$$

Ejemplo 4.1:

¿Cuántos números de cinco cifras es posible formar con las cifras 1, 3, 5, 7, 9, sin que se repita ninguna.?
Solución:
Cada número se distingue de otro por la colocación de la cifras y todos los números tienen las mismas cifras sin repetirse ninguna, por lo tanto se trata de permutaciones:

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

8.4.1 Factorial de un número natural

Se llama **factorial** de un número natural n al producto de los n factores consecutivos, que comienzan en la unidad y terminan en n. Se representa por $n!$ y equivale a:

$$0! = 1 \; por \text{ definición}$$

$$n! = (n-1)! \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$P_m = m!$$

8.5 Permutaciones con repetición

Dado un conjunto M de m elementos, entre los cuales hay un cierto número a de una misma clase, otro número b de otra clase, un tercero c de otra clase, y así sucesivamente, llamaremos **permutaciones con repetición** a las diferentes formas en que se pueden ordenar esos m elementos, donde una ordenación se distingue de otra por el lugar que ocupan dos elementos distintos.

De un grupo cualquiera que se forme, hay que eliminar todos los grupos iguales a él que se derivan de permutar los elementos iguales en posiciones que ocupaban entre sí que equivale a permutar el número de elementos de la misma clase, obteniéndose la fórmula:

$$P_m^{a,b,c} = \frac{m!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

Ejemplo 5.1:
¿Cuántos números distintos se pueden escribir con las cifras 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4.?
Solución:

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 2.520$$

8.6 Combinaciones sin repetición

Se llaman **combinaciones sin repetición** de m elementos, tomados de n en n, a los diferentes grupos que se pueden formar con los m elementos, de modo que en cada grupo entren n de ellos, diferenciándose un grupo de otro al menos en uno de sus elementos.

La combinaciones de m elementos tomados de n en n se representa por:

$$\boxed{C_m^n \;\; o \;\; C_{m,n}}$$

Supongamos que tenemos m elementos distintos:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$$

Si hallamos las variaciones de m elementos tomados de n en n, obtenemos que un grupo formado, por ejemplo, por los elementos $a_1 a_2 a_3 \cdot a_n$ aparecerá repetido tantas veces como podamos permutar esos n elementos. Esto significa que a la hora de hallar las combinaciones de m elementos tomados de n en n, estos P_n grupos en verdad se considerarán el mismo y por tanto solo debe ser contado una vez.

Esto ocurre con cada grupo que aparece en las variaciones, por lo tanto, para hallar las combinaciones de m elementos tomados de n en n hay que tomar grupos de P_n elementos considerados iguales en las variaciones de m elementos tomados de n en n. Con lo cual obtenemos:

$$V_m^n = C_m^n \cdot P_n \Longrightarrow C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$$

Con lo cual la fórmula para hallar combinaciones queda como sigue:

$$C_m^n = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Ejemplo 6.1:

En una competición en la que puntuan igual los tres primeros atletas, se presentan cinco competidores. ¿De cuántas formas distintas pueden repartirse los puntos.?

Solución:

Son cinco elementos que debemos de agrupar de tres en tres sin que distingamos el orden en que entran ni que puedan repetirse, por tanto son combinaciones:

$$m = 5 \; n = 3 \Longrightarrow C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

8.6.1 El número combinatorio

Se define el **número combinatorio** como el número de combinaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n, se indica con el símbolo

$$\binom{m}{n}$$

y se lee "*m sobre n*" siendo m y n números naturales tales que $n < m$.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!}$$

"m" recibe el nombre de **base** y "n" recibe el nombre de **orden**.

Propiedades:

1. $$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 \qquad \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$$

2. $$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

3. Fórmula de Stiefel:
$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

4. $$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}$$

5. $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad \underline{\textbf{binomio de Newton}}$$

Además el número combinatorio forma el llamado triángulo de Pascal, formado este por los diversos números combinatorios cuya base y orden van variando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

cuyos valores son:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

y como se puede ver, cada valor es suma de los dos que le preceden en la pirámide. Luego si queremos hallar $(x+y)^3$, utilizando esta propiedad y la última propiedad del número combinatorio, tendremos:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

o también:

$$(x-y)^3 = (x+(-y))^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2(-y) + \binom{3}{2} x(-y)^2 + \binom{3}{3} (-y)^3 =$$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

PROBLEMAS DE COMBINATORIA

1. Un árbol tiene 20 ramas: de cada una salen 15 brotes y de cada brote salen 12 hojas. ¿Cuántas hojas tiene el árbol?.
2. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar con las cinco vocales, no pudiendo repetirse.?
3. ¿De cuántas formas se pueden repartir tres premios distintos entre Rosa, Marta, Alicia, Pilar y Gloria, de manera que, a lo sumo, reciban un único premio.?
4. ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, secretario y tesorero de un club de baloncesto sabiendo que hay 12 posibles candidatos.?
5. Calcula: a) V_7^3 b) V_{10}^4 c) V_9^7
6. Halla el valor de n y k, sabiendo que:

   a) $V_n^k = 6 \cdot 5 \cdot 4$ b) $V_n^k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ c) $V_n^k = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$
7. En un alfabeto de 21 letras, ¿Cuántas sílabas distintas, de 5 letras cada una, se pueden formar.?
8. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se formarán con las cinco primeras cifras significativas.?
9. ¿Cuántos son los números naturales que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, sin repetir ninguna.?
10. El número de variaciones de cierto número de objetos, tomados de cinco en cinco, es igual al de las variaciones de los mismos objetos, tomados de cuatro en cuatro. Halla el número de objetos.
11. El número de variaciones de n objetos, tomados de dos en dos, es 42. Calcula el número de objetos.
12. ¿De cuántas formas podrán colocarse en fila diez alumnas, si suponemos que hay dos que ocupan siempre el mismo lugar, una el primero y otra el último.?
13. ¿Cuántos números hay entre 5.000 y 6.000 que tengan todas sus cifras diferentes.?
14. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse sin que se repitan cifras en el mismo número.?
15. Con las letras de la palabra DISCO. ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por O.?
16. Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros entre del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción, cada número solo puede aparecer una sola vez en la clave de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras distintas con combinaciones diferentes pueden hacerse.?
17. a) ¿Cuántos números diferentes pueden formarse usando cuatro de las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si las cifras no pueden repetirse? b) ¿Cuántos empiezan por tres?. c) ¿Cuántas acaban en 45.?
18. Cuatro amigos van al cine, pero a última hora uno de ellos no puede asistir. ¿De cuántas formas pueden sentarse los tres restantes en las cuatro butacas reservadas.?
19. Con las cifras 1, 2 y 3, Cuántos números de cinco cifras pueden formarse?, ¿Cuántos son pares.?
20. Los teléfonos de una provincia tienen 7 números, pero la primera cifra no puede ser ni 0, ni 1, ni 2. ¿Cuántos números de teléfono diferentes se pueden adjudicar.?
21. Las tarjetas de crédito suelen diferenciarse una de otra por un código formado por 16 dígitos. ¿Cuántas tarjetas de crédito diferentes se pueden hacer.?
22. ¿Cuánto dinero habría de jugar un quinielista para tener absoluta seguridad de acertar una quiniela de 15 resultados.?
23. ¿Cuántas matrículas de coches podremos presentar si cada matrícula consta de dos letras distintas y seguidas a cuatro cifras que se pueden repetir.?
24. ¿Cuántos caracteres es posible obtener en el alfabeto Morse, utilizando caracteres de 1, 2, 3, 4 y 5 signos.?

25. Supongamos que las placas de matrícula de los coches de un cierto país consisten en cuatro letras seguidas de tres números, por ejemplo, BPHT994. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse con este procedimiento.?

26. ¿Cuántos números capicúas hay de seis cifras.?

27. Resuelve: a) $VR_n^2 - VR_{n-1}^2 = 7$ b) $VR_n^2 + 3VR_{n-1}^2 = 73$

28. ¿De cuántas formas se pueden sentar seis personas en una fila de butacas de un cine.?

29. Con las letras de la palabra PELUQUIN:

    (a) ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer.?

    (b) ¿Cuántas empiezan por P.?Cuántas empiezan por PEL.?

30. ¿De cuántas formas pueden disponerse en la mano cinco cartas determinadas de una baraja española.?

31. En una escalada, una determinada cordada está compuesta por cinco escaladores. Teniendo en cuenta que van uno detrás de otro, ¿De cuántas formas podrán llegar a la cima.?

32. ¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta que la portería.?

33. En el banquete que sigue a una boda se sientan en la mesa presidencial ocho personas, incluidos los novios. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar de manera que los novios no se separen.?

34. Una secretaria ha escrito 12 cartas dirigidas a 12 personas distintas, y sus correspondientes sobres. A la hora de meter las cartas en los sobres la llaman por teléfono y, sin fijarse, va introduciendo, al azar, las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas distintas podrá rellenar los sobres.?

35. Calcula todas las permutaciones que puedes obtener con las letras de la palabra CASO.

36. ¿Cuántos números de cinco cifras es posible formar con las cifras 1. 2. 3. 4 y 5, sin que se repita ninguna.? Cuántos de esos números tienen un tres en el tercer lugar.?

37. En un banco hay sentadas seis personas. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse.?

38. ¿Cuántas palabras pueden formarse con las letras de la palabra ISABEL, con tal de que no vayan dos vocales ni dos consonantes juntas y sin repetir letras.?

39. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 8 problemas entre 8 alumnas.?

40. Con las letras de la palabra VELOZ, ¿Cuántas palabras de cinco letras diferentes podemos formar.? ¿Cuántas comienzan por vocal y terminan por vocal.?

    Si escribimos en orden alfabético todas las palabras de cinco letras diferentes, ¿qué lugar ocupa la ordenación VELOZ.?

41. Con las cifras 1, 1, 2, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar.?

42. ¿Cuántas letras de cinco signos se pueden formar en el alfabeto Morse con 3 rayas y dos puntos.?

43. ¿Cuántas palabras distintas podremos formar utilizando cada vez todas las letras de la palabra VIVIR.? ¿Y con las letras de la palabra ACALLAR.?

44. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 9 bolas de las que cuatro son blancas, tres amarillas y dos azules.?

45. ¿De cuántas formas se pueden alinear 5 signos más y 3 signos menos.?

46. Una línea de ferrocarril tienen 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá de imprimir, si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino.?

47. ¿Cuántos grupos de cinco podrán formarse con las 30 alumnas de una clase, en el supuesto de que un grupo se diferencie de otro por lo menos en una alumna.?

48. ¿Cuántas rectas quedarán determinadas por cinco puntos de un plano, suponiendo que no haya tres en línea recta.?

49. En una bolsa hay doce bolas numeradas del 1 al 12. ¿De cuántas formas distintas puedes tomar cinco de esas bolas.?

50. ¿De cuántas formas pueden combinarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres.?

51. Una fábrica de helados anuncia en su propaganda que el cliente puede escoger entre 4.495 helados distintos de tres sabores. Comprueba si es cierto sabiendo que en total tienen 31 sabores.

52. En una cierta provincia existen 10 pueblos que están comunicados entre sí. ¿Cuántos caminos hay que realizar para que siempre exista comunicación entre dos pueblos cualesquiera.?

53. A una reunión acuden 30 personas. Se decide construir comisiones de seis personas para estudiar un cierto plan. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar.?

54. A una reunión asisten 17 personas y se intercambian saludos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado.?

55. Para jugar al dominó, siete fichas hacen un juego. Sabiendo que tiene 28 fichas. ¿Cuántos juegos diferentes se pueden hacer.?

56. Resuelve las ecuaciones: a) $2C_n^3 = V_n^2$ b) $V_n^2 - C_n^2 = 190$

57. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 Kg. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden realizar.?

58. Calcula las siguientes potencias:

$$(2+x)^5 \qquad (-3+x)^6 \qquad (4-x)^7 \qquad (x-2y)^4$$

59. Resuelve:

$$a)\ C_n^3 = 35 \cdot (n-2) \qquad b)\ \binom{9}{n+4} = \binom{9}{2n-1} \qquad c)\ \binom{3n-1}{10} = \binom{3n-1}{16}$$

SOLUCIONES DE COMBINATORIA

1. 3.600
2. 20
3. 60
4. 1.320
5. a) 210 b) 5.040 c) 181.440
6. a) $n = 6; k = 3$ b) $n = 5; k = 5$ c) $n = 8; k = 5$
7. 2.441.880
8. No repitiendo 120, repitiendo 625
9. 325
10. 5
11. 7
12. 40.320
13. 504
14. 720
15. 24
16. 941.094
17. a) 360 b) 60 c) 30
18. 24
19. 243, 81
20. 7.000.000
21. 10^{16}
22. Suponiendo que una jugada son 0,3 euros; 4.304.672,10 euros
23. 7.650.000
24. 62
25. 614.656.000
26. 1.000
27. a) $n = 4$ b) $n = 5$
28. 720
29. (a) 20.160
    (b) 60
30. 120
31. 120
32. 3.628.800
33. 10.080
34. 479.001.600

35. 24
36. 120, 24
37. 720
38. 72
39. 40.320
40. 120, 6, 73
41. 30
42. 20
43. 30, 420
44. 1.260
45. 56
46. 600
47. 142.506
48. 10
49. 792
50. 35
51. Si.
52. 45
53. 593.775
54. 136
55. 1.184.040
56. a) $n = 5$ b) $n = 20$
57. 63
58. $(2+x)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
    $(-3+x)^6 = x^6 - 180x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1.215x^2 - 1.458x + 729$
    $(4-x)^7 = -x^7 + 28x^6 - 336x^5 + 2.240x^4 - 8.960x^3 + 21.504x^2 - 28.672x + 16.384$
    $(x-2y)^4 = x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$
59. $$a)\ n = 15 \qquad b)\ n = 5 \qquad c)\ n = 9$$

Tema IX

CÁLCULO DE PROBABILIDAD

9.1 Sucesos y operaciones.

Hay muchos fenómenos que en las mismas condiciones y circunstancias se verifican de la misma manera. Tal ocurre en la mayoría de los fenómenos físicos y pueden ser expresados por fórmulas matemáticas. A estos fenómenos se les llama **deterministas**.

Hay otros fenómenos o sucesos que, aunque se verifiquen en las mismas condiciones y circunstancias:

1. No se puede predecir el resultado.
2. Si se repite el suceso suficiente número de veces y se anotan los resultados obtenidos, se observará que cada uno de los posibles resultados aparece, aproximadamente, el mismo número de veces, es decir, que tienden a estabilizarse.

Estos fenómenos que obedecen a leyes fijas y que más bien dependen del *azar*, reciben el nombre de **sucesos estocásticos** o **sucesos aleatorios**. También se les llama *fortuitos* o *casuales*.

Ejemplo 1.1:
Si se lanza al aire 100 veces una moneda, sin defectos, saldrá, aproximadamente, unas 50 veces cara y unas 50 veces cruz.

9.1.1 Sucesos aleatorios

Definición 1.1: El **Espacio muestral** asociado a un experiento aleatorio es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener.

Lo designamos por la letra E, y colocamos sus elementos entre llaves y separados por comas.

Ejemplo 1.2: *Si lanzamos un dado obtenemos que:* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definición 1.2: Un **Suceso** de un experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E.

Lo designamos por letras mayúsculas: A, B, C ..., ponemos sus elementos entre llaves y separados por comas.

Ejemplo 1.3:*Siguiendo con el ejemplo anterior, posibles sucesos serán:*

$$A = \{1, 3, 5\}$$

o sea, sacar número impar.

$$B = \{3, 6\}$$

o sea, sacar múltiplo de 3.

Un **suceso se verifica** si, al realizar una prueba del experimento aleatorio, obtenemos un resultado que es un elemento del suceso. También se dice que se **presenta** o que se **realiza**.

Tipos de sucesos

Suceso elemental es cada uno de los resultados simples que se obtiene al realizar el experimento. Es cada uno de los elementos del espacio muestral.

Ejemplo 1.4:*Los sucesos elementales al lanzar un dado son:*

$$A = \{1\} \qquad B = \{2\} \qquad C = \{3\} \qquad D = \{4\} \qquad E = \{5\} \qquad F = \{6\}$$

Suceso seguro es aquel que siempre se verifica. Es el espacio muestral E.

Ejemplo 1.5:$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso imposible es aquel que no se realiza nunca. Lo representamos por $\emptyset$.

Suceso compuesto es aquel que está formado de dos o más sucesos simples.

Ejemplo 1.6:*Experimento consistente en lanzar una moneda y un dado a la vez.*

Suceso contrario o complementario de A es aquel suceso que se cumple cuando no se cumple A o es aquel suceso compuesto por todos los sucesos elementales que no se encuentran en A. Se representa por A^c o por $\bar{A}$.

Ejemplo 1.7:*Sea el suceso* $A = \{3, 6\}$*, sacar múltiplo de 3. Entonces* $A^c = \{1, 2, 4, 5\}$*, o sea, no sacar múltiplo de 3.*

Dos sucesos son **compatibles** cuando pueden darse los dos a la vez.

Ejemplo 1.8:*Supongamos los sucesos:*

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{3, 6\}$$

Existe la posibilidad de que los dos sucesos se verifiquen a la vez. al salir el 6.

Dos sucesos son **incompatibles** cuando al darse uno, no puede darse el otro.

Ejemplo 1.9:*Supongamos los sucesos:*

$$A = \{1, 3, 5\} \qquad B = \{2, 6\}$$

Nunca pueden darse los dos a la vez.

Dos sucesos son **independientes** si el hecho de realiarse uno no repercute en que se realice el segundo.

Dos sucesos son **dependientes** si el hecho de realizarse uno repercute en que se realice el segundo.

9.1.2 Operaciones con sucesos

Igualdad

Dos sucesos A y B son iguales si están formados por los mismos sucesos elementales. Se representa por $A = B$.

Inclusión

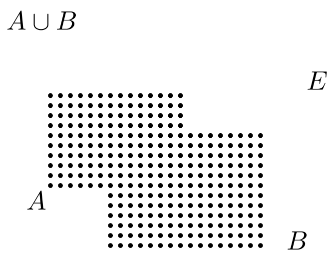
Un suceso A está incluido (contenido) en otro suceo B si todo suceso elemental de A pertenece también a B. Se representa por $A \subset B$.

Ejemplo 1.10:*Supongamos* $A = \{3, 6\}$ *y* $B = \{2, 3, 6\}$*, entonces se cumple que* $A \subset B$*.*

Unión

Llamamos suceso unión de A y B al suceso que se realiza cuando cuando lo hace A o B. Se representa por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E,, x \in A \; o \; x \in B\}$$



Ejemplo 1.11: *Supongamos los sucesos* $A = \{2, 3, 4\}$ *y* $B = \{3, 6\}$*, entonces tendremos que:*

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

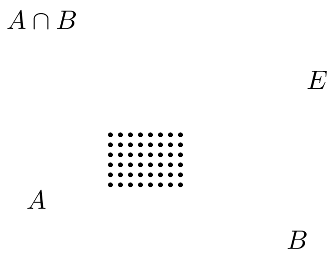
<u>Propiedades:</u>

$$A \cup E = E \qquad A \cup \emptyset = A \qquad A \cup A^c = E$$

Intersección

Llamamos suceso intersección de A y B al suceso que se realiza cuando lo hacen A y B. Se representa por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E,, x \in A \ y \ x \in B\}$$



Ejemplo 1.12: *Supongamos los sucesos* $A = \{2, 3, 4\}$ *y* $B = \{3, 6\}$*, entonces tendremos que:*

$$A \cap B = \{3\}$$

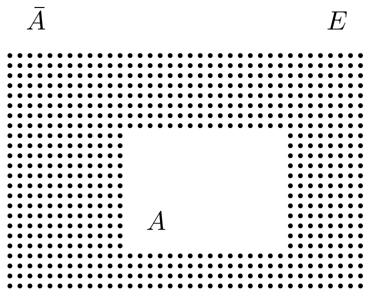
<u>Propiedades:</u>

$$A \cap E = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cap A^c = \emptyset$$

Contrario

Llamamos suceso contrario de otro suceso A al suceso que se verifica cuando no se verifica A, y recíprocamente. Se representa por $\bar{A}$.

$$\bar{A} = \{x \in E,, x \notin A\}$$



Ejemplo 1.13: *Supongamos los sucesos* $A = \{2, 3, 4\}$ *, entonces tendremos que:*

$$\bar{A} = \{1, 5, 6\}$$

Leyes de Morgan

Las leyes de Morgan son relaciones entre un grupo de conjuntos y todas las operaciones. Las dos leyes de Morgan son:

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c} \qquad \boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$$

9.2 Probabilidad de sucesos. Regla de Laplace

Llamamos **probabilidad** a toda aplicación P definida entre los conjuntos E y $I\!R$:

$$\begin{array}{rccc} P: & E & \longrightarrow & I\!R \\ & A & \longrightarrow & P(A) \end{array}$$

verificando los axiomas siguientes:

Axioma 1: La probabilidad del suceso seguro es 1.

$$P(E) = 1$$

Axioma 2: Cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un número no negativo:

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 3: Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso de la unión es la suma de probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propiedades:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

Esta aplicación se define de la siguiente manera:

REGLA DE LAPLACE: La probabilidad de un suceso A es igual cociente entre el número de sucesos elementales favorables y el número de sucesos elementales posibles:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Ejemplo 2.1: *Supongamos que tenemos una baraja de 40 cartas y sacamos una carta al azar.*

1. *Cuál es la probabilidad de que salga el 4 de bastos.?*
2. *Cuál es la probabilidad de que salga Copa.?*
3. *Cuál es la probabilidad de que salga una figura.?*

Solución:

1. *Solo hay un 4 de bastos en la baraja y se puede sacar 40 posibles cartas, entonces:*
$$P(Sacar\ 4\ de\ bastos) = \frac{1}{40}$$
2. *Hay 10 cartas que son copa y nos interesa que salga entre las 40 posibles:*
$$P(Sacar\ Copa) = \frac{10}{40}$$

3. *Hay 12 figuras en la baraja (3 por cada palo) entre las 40 posibles:*

$$P(\textit{Sacar figura}) = \frac{12}{40}$$

Ejemplo 2.2: *En una caja tenemos 15 bolas blancas, 30 bolas negras y 45 bolas verdes, si extraemos tres bolas simultáneamente. Cuál es la probabilidad de sacarlas de distinto color?. Y de que se repita alguna?.*

Solución:
Los casos posibles son las combinaciones que podemos obtener de 90 bolas tomadas de 3 en 3, o sea:

$$\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117.480$$

Los casos favorables, si formamos un diagrama de árbol, serán 15· 30· 45=20.250. Por lo tanto:

$$P(\textit{Sacar tres bolas de distinto color}) = \frac{20.250}{117.480} = 0,1724$$

Para hallar la probabilidad de no sacar ninguna igual lo haremos por el suceso contrario ya que lo contrario de sacar tres de distinto color es que alguno se repita por lo tanto:

$$P(\textit{Se repita alguna}) = 1 - P(\textit{Sacar tres bolas de distinto color}) = 1 - 0,1724 = 0,8276$$

9.3 Probabilidad condicionada y compuesta

En el cálculo de las probabilidades de algunos sucesos, el valor de dicha probabilidad varía en función de los conocimientos de determinadas informaciones relativas a estos sucesos.

Llamamos **probabilidad condicionada** del suceso B respecto al suceso A, y lo denotaremos por $P(B/A)$ al cociente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se suele leer: "*Probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A.*"

De igual forma podemos decir que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 3.1:*Se lanzan dos dados:*

1. *Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 7.?*
2. *Si la suma de puntos a sido 7. Cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados hay salido un tres.?*

Solución:
Sean los sucesos A, la suma de los puntos es 7 y B, en alguno de los dados ha salido un tres.

1. *Los casos posibles al lanzar dos dados son 36 y los casos favorables del suceso A son los seis siguientes: (1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1). Por tanto:*

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2. *En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. Observamos que esta situación ocurre en las parejas (3,4); (4,3). Por tanto:*

$$P(B/A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Si hubiesemos aplicado la fórmula sin contar los casos tendríamos:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$$

Despejando de cualquiera de las dos fórmulas anteriores obtenemos:

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Si suponemos que los sucesos A y B son independientes, entonces nos encontramos con lo que se llama **probabilidad compuesta**, cuya fórmula se deduce de la anterior.

Si A y B son independientes entonces la información de A no varía la probabilidad de que suceda B y por tanto:

$$P(B/A) = P(B)$$

y sustituyendo en la fórmula anteior obtenemos la fórmula de la probabilidad compuesta:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 3.2: *Un muchacho compra dos barajas de cartas de 40 cartas cada una. Saca una carta de la primera baraja y luego saca una de la segunda. Cuál es la probabilidad de sacar dos Oros.?*

Solución:

Cuando se saca la carta de la primera baraja, el tipo de carta que sea no cambia en nada las probabilidades de sacar en la segunda y por tanto son sucesos independientes, luego si llamamos A, a sacar un Oro de la primera baraja y B, sacar Oros en la segunda baraja obtenemos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0,0625$$

Ejemplo 3.3: *Un muchacho compra una baraja de cartas de 40 cartas cada una. Saca dos carta de la baraja. Cuál es la probabilidad de sacar dos Oros.?*

Solución:

Al sacar la primera carta de la baraja influye en la segunda carta solo en el número de cartas que quedan y por tanto si llamamos A, a sacar un Oro de la primera vez y B, sacar Oros en la segunda vez obtenemos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = 0,0576$$

9.4 Probabilidad total

Vamos a considerar un **sistema completo de suceso**, es decir, una familia de sucesos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de E que cumplen:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- La unión de todos es el total: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

entonces, bajo estas condiciones se cumple el **Teorema de la probabilidad total** que dice:

Teorema 4.1: Si tenemos un sistema completo de suceso $A_1, A_2 \cdots, A_n$ y b un suceso cualquiera de E del que se conocen las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Ejemplo 4.1: *Una compañia dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús de averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.*

Solución:

El suceso, sufrir una avería Av puede producirse en cualquiera de las tres líneas, (L_1, L_2, L_3). Según este teorema y teniendo en cuenta que:

$$P(Av/L_1) = 0,02 \qquad P(Av/L_2) = 0,04 \qquad P(Av/L_3) = 0,01$$

tendremos que:

$$P(Av) = P(L_1) \cdot P(Av/L_1) + P(L_2) \cdot P(Av/L_2) + P(L_3) \cdot P(Av/L_3) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,012 + 0,012 + 0,001 = 0,025$$

9.5 Teorema de Bayes

Utilizando el teorema de la probabilidad total y que:

$$P(B \cap A_i) = P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

podemos llegar a la conclusión que se conoce por el **Teorema de Bayes**.

Teorema 5.1: Si tenemos un sistema completo de suceso $A_1, A_2 \cdots, A_n$ y b un suceso cualquiera de E del que se conocen las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso A_i/B viene dada por la expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Ejemplo 5.1: *Tenemos tres urnas: U_1 con tres bolas rojas y 5 negras, U_2 con dos bolas rojas y una negra y U_3 con dos bolas rojas y 3 negras. Alguien coge una bola de una urna y resulta que es roja. Cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1?.*

Solución:

Llamamos R al suceso de sacar una bola roja y N al suceso de sacar bola negra. La probabilidad pedida es $P(U_1/R)$ y utilizando el teorema de Bayes obtenemos:

$$P(U_1/R) = \frac{P(U_1) \cdot P(R/U_1)}{P(U_1) \cdot P(R/U_1) + P(U_2) \cdot P(R/U_2) + P(U_3) \cdot P(R/U_3)} =$$

$$= \frac{(1/3) \cdot (3/8}{(1/3) \cdot (3/8) + (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (2/5)} = \frac{45}{173} = 0,26$$

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

1. En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico y anotar el resultado de la cara superior, calcula la probabilidad de:
   (a) Salir par.
   (b) Salir impar.
   (c) Salir múltiplo de 3.
   (d) Salir múltiplo de 5.
2. Tengo en la mano seis cartas con los números 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mi amigo toma una al azar.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número menor que 4.?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número que obtenga sea divisible por 2.?
3. Dos amigas están jugando a las cartas. Rosa dice que la próxima carta que se extraiga será un rey y Silvia dice que será figura. ¿Cuál de las dos tiene mayor probabilidad de acertar.?
4. Extraemos una carta de una baraja española. Halla las siguientes probabilidades:
   (a) Que sea un rey o un As.
   (b) Que sea un rey o una copa.
5. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:
   (a) Sea roja o verde.
   (b) Sea roja o amarilla.
   (c) No sea roja.
6. Halla la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan:
   (a) Dos caras.
   (b) Dos cruces.
   (c) Una cara y una cruz.
7. Halla la probabilidad de que al lanzar al aire 5 monedas, salgan:
   (a) Cinco caras.
   (b) Cuatro caras.
   (c) Tres caras.
8. Averigua la probabilidad que existe de que al arrojar dos dados al aire, salga:
   (a) En el primero un múltiplo de 3, y en el segundo, un número par.
   (b) En el primero, mayor que 2, en el segundo, número impar.
9. Calcula la probabilidad de que al lanzar tres dados al aire, salga:
   (a) Una suma par.
   (b) Una suma que sea múltiplo de tres.
   (c) Una suma que sea múltiplo de 4.
   (d) Una suma mayor que 15.
   (e) Una suma que sea múltiplo de 10.
10. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados al aire salga dos números iguales.?
11. En la baraja española se extraen simultaneamente tres cartas, ¿Cuál es la probabilidad de que dos sean ases.?

12. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer simultáneamente, cinco cartas de una baraja de 40, salgan tres ases y dos cartas iguales entre sí.?

13. En una bolsa hay 12 bolas blancas y 20 verdes. Si se hacen cuatro extracciones, seguidas, ¿qué probabilidad habrá de que las cuatro bolas sean blancas.?

    (a) Devolviendo cada vez la bola extraída.

    (b) No devolviéndolas.

14. En una bolsa hay 6 bolas blancas y 8 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer cuatro extracciones a la vez, no sean las cuatro blancas.?

15. Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: A={salir un número primo} y B={salir un número cuadrado}. Responde las siguientes cuestiones:

    a) Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$. b) los sucesos A y B, ¿son compatibles o incompatibles?. c) Encuentra los sucesos contrarios de A y B.

16. ¿Cuál de las siguientes funciones definen una probabilidad en $E = \{A, B, C\}$?.

    (a) $P(A) = 1/4 \quad P(B) = 1/3 \quad P(C) = 1/2$

    (b) $P(A) = 2/3 \quad P(B) = -1/3 \quad P(C) = 2/3$

    (c) $P(A) = 1/6 \quad P(B) = 1/3 \quad P(C) = 1/2$

    (d) $P(A) = 0 \quad P(B) = 1/3 \quad P(C) = 2/3$

17. Sea P una probabilidad definida en $E = \{A, B, C\}$. Encuentra $P(A)$ en los casos:

    (a) $P(B) = 1/3 \quad P(C) = 1/4$

    (b) $P(A) = 2 \cdot P(B) \quad P(C) = 1/4$

    (c) $P(C) = 2 \cdot P(B) \quad P(B) = 3 \cdot P(A)$

18. En una determinada fábrica de automóviles, el 6% de los coches tienen defectos en el motor, el 8% tiene defectos en la carrocería y el 2% tiene defectos en ambos.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto.?

    (b) ¿Y la probabilidad de que un coche no sea defectuoso.?

19. Dos personas, A y B, se organizan el siguiente juego: Tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene mayor probabilidad de ganar.?

20. Una casa tiene dos escaleras. La escalera A tiene 10 pisos, en cuatro de ellos hay joyas; en la escalera B, cinco pisos tienen joyas y cinco no. Un ladrón entra al azar en una de las escaleras y luego en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre en un piso con joyas.?

21. Una urna A, contiene 5 bolas rojas y tres blancas. Otra urna B, contiene 2 bolas blancas y 6 rojas. Si se saca una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de igual color.?

22. En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:

    (a) ¿Cuál será la probabilidad de que acierte con la llave.?

    (b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra.?

23. Luisa y Marta intervienen en un torneo de ajedrez. La primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas gana el torneo. Encuentra el espacio muestral de todos los resultados posibles.

24. Consideramos el fenómeno aleatorio extraer una carta de la baraja de cuarenta y anotarla a los sucesos A ={sacar oro}, B ={sacar rey}, C ={sacar el rey de bastos}. Determina los sucesos siguientes:

$$A \cap C^c \qquad A \cap B \cap C \qquad \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \qquad \bar{A} \cup \bar{B}$$

25. Una moneda está fabricada de manera que la probabilidad de sacar cara es triple de la de obtener cruz. Calcula la probabilidad de obtener cara y de obtener cruz en el lanzamiento de dicha moneda.

26. Las letras de la palabra CARLOS se colocan al azar una seguida de otra. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos vocales queden juntas.?

27. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Calcula razonadamente: a) $P(A \cup B)$, b) $P(A^c \cup B^c)$, c) $P(A^c \cap B)$

28. De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

    a) Sea una bola roja ; b) Sea una bola verde ; c) Sea una bola roja o verde.

29. De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras se extraen sucesivamente dos bolas. Halla la probabilidad de que sean:

    a) Las dos negras ; b) Las dos rojas ; c) Una roja y otra negra.

30. El capitán de un submarino lanza cuatro torpedos a un buque enemigo. Si la probilidad de que cada torpedo haga blanco es de el 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que el buque sea alcanzado.?

31. En el lanzamiento de cuatro monedas, calcula la probabilidad de:

    a) Salga al menos una cruz ; b) Dos sean caras y dos cruces ; c) Sacar alguna cara.

32. Una urna contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Se sacan al azar tres bolas. Probabilidad de que al menos una sea blanca.

33. Extraemos una carta de la baraja española; si sale figura, extraemos una bola de la urna I; en caso contrario, la extraemos de la urna II. Las urnas tienen la siguiente composición:

    Urna I: 4 bolas blancas y 8 verdes   Urna II: 6 bolas verdes y 5 rojas.

    Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

    a) La bola es verde y de la urna II

    b) La bola es blanca.

34. La probabilidad de que una persona adquiera en un librería un periódico es de 0,4. La probabilidad de que adquiera una revista es de 0,3. La probabilidad de que adquiera ambas publicaciones es de 0,2. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

    a) Que adquiera alguna publicación.

    b) Que adquiera solo un periódico.

    c) Que no adquiera ninguna.

35. Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se otenga un número mayor que en la primera.

36. Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F_1, F_2, F_3 y F_4. El porcentaje de producción total que se fábrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto de cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente emvasado.?

37. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se introduce en la urna una bola blanca y, si sale cruz, se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y, a continuación, se introduce la mano en la urna, retirando una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden una bola blanca y otra negra.?

38. Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de la urna I, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae una bola de la urna II, que contiene 4 bolas blancas y una negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de la urna III, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola.?.¿Si se ha extraído una bola negra, cuál es la probabilidad de que sea de la segunda urna?

39. Tres máquinas, M_1, M_2 y M_3, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.
    (a) Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
    (b) Tomamos al azar una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina M_2.
    (c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa.?
40. Tenemos tres urnas: U_1 con tres bolas rojas y 5 negras, U_2 con dos bolas rojas y 1 negra y U_3 con dos bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, cuál es al probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1.?
41. Para un dado numerado del 1 al 6, se pide:
    (a) Encuentra la probabilidad de que salga un tres, si se sabe que salió impar.
    (b) Calcula la probabilidada de que salga par, si se sabe de salió mayor que tres.
42. A un congreso asisten el mismo número de hombres que de mujeres. El 60% de los hombres tiene 40 años o más y el 30% de las mujeres tiene menos de 40 años. Se pide:
    (a) Se elige al azar una persona que asiste al congreso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer.?
    (b) Si se elige al azar una persona que asiste al congreso. ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 40 años.?
    (c) Si se elige un asistente al azar y se observa que tiene más de 40 años. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona sea una mujer.?
43. Un estudiante hace dos pruebas el mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es del 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es del 0,8 y de la que pase ambas es del 0,5. Se pide:
    (a) La probabilidad de que pase al menos una prueba.
    (b) La probabilidad de que no pase ninguna prueba.
    (c) ¿Son las pruebas independientes?
    (d) La probabilidad de que pase la segunda prueba en el caso de no haber superado la primera.
44. Entre todos los alumnos del último curso de bachillerato de una ciudad, el 80% cursa inglés y el 20% francés. Se sabe, además, que el 53% de dichos alumnos son mujeres. Se elige al azar uno de esos alumnos de último curso y resulta ser mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que este alumno curse francés.?
45. Una urna contiene tres bolas rojas y una blanca; otra urna contiene 4 bolas rojas y 2 blancas y una tercera contiene 1 bola roja y 2 blancas. Se extrae una bola de una de ellas y se comprueba que es roja. Halla la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.
46. En un colegio, el 5% de los chicos y el 6% de las chicas son más altos de 1,67m. Además, el 60% de los estudiantes son mujeres. Si un estudiante es elegido al azar y es mál alto de 1,67m, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer.?
47. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:
    (a) Probabilidad de que la segunda bola sea roja.
    (b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.
48. En una bolsa A hay 4 bolas negras y 5 blancas. En otra bolsa B hay dos negras y tres blancas. Se elige al azar una bolsa y se extrae de ella una bola. Se pide:
    (a) Halla la probabilidad de que la bola extraída sea negra.
    (b) Halla la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

49. En una urna hay 6 bolas blancas y 3 negras. Se extraen sucesivamente tres bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que salga alguna bola negra.

50. Una urna contiene tres bolas blancas y dos rojas, y otra urna tres blancas y tres rojas. Se pasa una bola de la primera a la segunda urna y después se extrae una bola de la segunda urna, que resulta ser blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada hubiese sido blanca.

51. Se tienen dos urnas, una con 8 bolas blancas y 4 verdes; la otra con, 6 bolas blancas y 10 verdes. Se extrae una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que sean del mismo color.

52. Un joyero compra los relojes en dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los cuales el 0,4 son defectuoso. La segunda le proporciona el resto, siendo defectuoso el 1,5%. Un día, el joyero, al vender un reloj, observa que este no funciona. Halla la probabilidad de que el reloj proceda de la primera casa proveedora.

53. Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna B, 6 bolas blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas que resultan ser negras. Calcula la probabilidad de que la urna elegida haya sido la B.

54. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A y 3/5 son para B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50% del tiempo y B el 25%. Calcula la pobabilidad de que no esté ninguno para responder al teléfono y las probabilidades de estar presente el profesor cuando le llamen.

55. Una urna contiene dos bolas, que pueden ser blancas, negras o una blanca y otra negra. Se añade una bola blanca a la bolsa y después se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca.?

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. La probabilidad de que una alumna apruebe matemáticas es del 0,6, la de que apruebe lengua es de 0,5 y de que apruebe las dos es de 0,2.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una asignatura.?
   (b) ¿Y de que no apruebe ninguna.?
   (c) ¿Y de que apruebe matemáticas y no lengua.?

2. En una Universidad en la que solo hay estudiantes de Arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5% de Arquitectura, el 30% de Ciencias y el 50% de Letras. Elegido un estudiante al azar se pide:
   (a) La probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado.
   (b) La probabilidad de que haya terminado sus estudios.

3. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula la probabilidad de que dicha carta:

   a) Oros o bastos. b) Copas o figura(sota,caballo,rey)

4. Se lanza dos veces un dado. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número mayor que en la primera.

5. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 se forman todas las cifras posibles de tres cifras distintas. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos, elegido al azar, sea múltiplo de 4?.

6. En un centro escolar los alumnos de segundo de bachillerato pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?.

7. Se consideran los sucesos, A y B, asociados a un experimento aleatorio, con $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,9$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,58$. ¿Son independientes A y B?.

8. Tras un estudio estadístico en una ciudad se observa que el 70% de los motoristas son varones y, de estos, el 60% llevan habitualmente casco. El porcentaje de mujeres que conduce habitualmente con casco es del 40%. Se pide:
   (a) Calcular la probabilidad de que un motorista elegido al azar lleva casco.
   (b) Se elige un motorista al azar y se observa que lleva casco. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón?.

9. En una ciudad, el 35% vota al partido A, el 45% vota al partido B y el resto se abstiene. Se sabe además que el 20% de los votantes de A, el 30% de los votantes de B y el 15% de los que se abstienen, son mayores de 60 años. Se pide:
   (a) Hallar la probabilidad de que un ciudadano elegido al azar sea mayor de 60 años.
   (b) Hallar la probabilidad de que un ciudadano mayor de 60% años se haya abstenido.

10. Los alumnos de primero de biología tienen que realizar dos pruebas, una teórica y otra práctica. La probabilidad de que un estudiante apruebe la parte teórica es de 0,6, la probabilidad de que se apruebe la parte práctica es de 0,8 y la probabilidad de que apruebe ambas pruebas es de 0,5.
    (a) ¿Son independientes los sucesos aprobar la parte teórica y la parte práctica?.
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno no apruebe ninguno de los dos exámenes?.
    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe solamente uno de los dos axámenes?.
    (d) Se sabe que un alumno aprobó la teoría. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe también la práctica?.

11. En una baraja de 40 cartas.
    (a) Se toman dos cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de distinto número?.
    (b) Y si se toman tres cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números sean distintos?.

12. Si tenemos un dado con tres "1", dos "2" y un "3". Lo tiramos dos veces consecutivas y anotamos la suma de los resultados.
    (a) ¿Cuál es el espacio muestral?.
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 4?.
    (c) ¿Cuál es la suma más probable?. ¿Cuánto vale la probabilidad?.

13. Tenemos dos dados A y B, ambos trucados. En el dado A hay tres "1" y tres "2" y en el dado B hay dos "1" y cuatro "2". Se elige un dado al azar y se tira.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un "1"?.
    (b) Sabiendo que se ha obtenido un "2", ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido el dado B?.

14. De 200 estudiantes, 110 estudian física, 70 estudian química y 30 estudian ambas. Escogido un estudiante al azar:
    a) [1 punto] Halle la probabilidad de que estudie física o química
    b) [1 punto] Halle la probabilidad de que no estudie ni física ni química.

15. Un comercio de bebidas recibe el 30% de las bebidas de la fábrica A y el 70% de la fábrica B. La fábrica A envia el 60% de las bebidas de cola y el 20% de naranja, mientras que la fábrica B envia el 40% de cola y el 50% de naranja.
    a) [1 punto] El comerciante vende una botella. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de cola?.

b) [1 punto] Una botella de naranja estaba defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la fábrica A?.

16. Un corredor usa dos coches distintos en sus carreras. el 40% de las carreras usa el blanco y el 60% restante usa el rojo. En las carreras en que participa con el coche blanco termina en primer lugar el 20% de las carreras y en segundo lugar el 40% de estas. En las carreras en las que participa con el coche rojo termina en primer lugar el 40% de estas y en segundo lugar el 30%.

    a) [1 punto] Cuál es la probabilidad de terminar primero en la siguiente carrera?.
    b) [1 punto] Al término de una carrera, queda en segundo lugar. ?Cuál es la probabilidad de que haya participado con el coche rojo?.

17. En un cajón se tienen 4 camisas blancas, 3 rojas y 2 azules. Se sacan dos camisas al azar. Calcule la probabilidad de:

    a) [1 punto] Que las dos camisas sean del mismo color.
    b) [1 punto] Que al menos una sea blanca.

SOLUCIONES DE PROBABILIDAD

1. (a) 1/2
   (b) 1/2
   (c) 1/3
   (d) 1/6
2. (a) 1/2
   (b) 1/3
3. Silvia
4. (a) 1/5
   (b) 13/40
5. (a) 15/20
   (b) 13/20
   (c) 12/20
6. (a) 1/4
   (b) 1/4
   (c) 1/2
7. (a) 1/32
   (b) 5/32
   (c) 10/32
8. (a) 1/6
   (b) 1/3
9. No obligatorio.
10. 1/6
11. 27/1235
12. 3/9139
13. (a) $(3/8)^4$
    (b) 99/7192
14. 986/1001
15. a) $P(A \cup B) = 7/9$ y $P(A \cap B) = 1/9$. b) los sucesos A y B son sompatibles. c) No sacar número primo. No sacar cuadrado.
16. (a) NO
    (b) NO
    (c) SI
    (d) SI
17. (a) 5/12
    (b) 1/2
    (c) 1/10
18. (a) $0'12$
    (b) $0'88$
19. B

20. 9/20
21. 36/64
22. (a) 131/840
    (b) 245/709
23. {LL,MM,LMM,MLL,MLMM,LMLL,LMLML,MLMLM }
24. $$A \cap C^c = A \qquad A \cap B \cap C = \qquad \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = E \qquad \bar{A} \cup \bar{B} = (Rey\ de\ oro)^c$$
25. Probabilidad de cara 3/4 y de cruz 1/4
26. 1/72
27. a) $P(A \cup B) = 0'6$, b) $P(A^c \cup B^c) = 0'9$, c) $P(A^c \cap B) = 0'2$
28. a) 2/5 ; b) 7/20 ; c) 3/4
29. a) 10/91 ; b) 36/91 ; c) 45/91
30. $1 - 0'6^4$
31. a) 15/16 ; b) 3/8 ; c) 15/16
32. 37/44
33. a) 84/220
    b) 1/10
34. a) $0'5$
    b) $0'3$
    c) $0'5$
35. 5/12
36. $0'028$
37. 1/2
38. 13/20   2/7
39. (a) $0'038$
    (b) 6/19
    (c) La primera.
40. 4/35
41. (a) 1/3
    (b) 2/3
42. (a) $0'5$
    (b) $0'35$
    (c) 7/13
43. (a) $0'9$
    (b) $0'1$
    (c) No.
    (d) 3/4
44. $0'2$
45. 3/7

46. 9/14
47. (a) 5/13
    (b) 51/91
48. (a) 19/45
    (b) 26/45
49. 199/204
50. 2/3
51. 49/96
52. $0'44$
53. $0'76$
54. 1/4 13/20
55. 2/3

SOLUCIONES DE SELECTIVIDAD

1. (a) $0'9$
   (b) $0'1$
   (c) $0'4$
2. (a) $0'016$
   (b) $0'28$

3. a) 1/2 b) 19/40

4. 5/12
5. No obligatorio, se necesita combinatoria.
6. $0'69$
7. No.
8. (a) $0'54$
   (b) 7/9
9. (a) $0'235$
   (b) $0'13$
10. (a) No.
    (b) $0'1$
    (c) $0'4$
    (d) 5/6
11. (a) 36/39
    (b) 384/1079
12. (a) {11,12,13,21,22,23,31,32,33}
    (b) 10/36
    (c) 3, con probabilidad 1/3
13. (a) 5/12
    (b) 4/7

14. a) $3/5$
    b) $1/4$
15. a) $0'46$
    b) $35/41$
16. a) $0'32$
    b) $9/17$
17. a) $20/72$
    b) $42/72$

Tema X

TEORÍA DE MUESTRAS. NIVEL DE CONFIANZA

10.1 Muestra y población

Hasta ahora hemos estado trabajando con estadística descriptiva, pues dando una población podíamos determinar ciertos parámetros que nos permitiesen estudiar las características de esa población mediante índices estadísticos representativos.

Ahora bien, son muy frecuentes los casos en los que la población es muy numerosa (población española, mayores de 18 años, ...), es difícil de estudiar (duración de una pila o motor, ...) o no es posible de estudiar todos los individuos (resistencia a la presión de un objeto, flexibilidad de una barra, ...).

En estos casos no trabajaremos con toda la población sino con una muestra y sacaremos conclusiones de esta para toda la población. Para ello debemos de definir unos conceptos previos:

- **Población :** es el conjunto total de individuos susceptibles de poseer la información buscada.
- **Muestra :** es la parte de la población en la que se miden las características estudiadas.
- **Muestreo :** es el proceso seguido para la extracción de la muestra.
- **Encuesta :** es el proceso de obtener la información buscada entre los elementos de la muestra.

10.2 Tipos de muestreo

La primera cuestión que surge al realizar una encuesta a una parte de la población es qué procedimientos debemos de utilizar para obtener una muestra que nos permita hacer buenas estimaciones.

Atendiendo a la manera de elegir los elementos, podemos tener:

- **Muestreo con reemplazamiento :** es aquel que cuando un elemento es tomado de la población vuelve de nuevo a ella para poder ser elegido de nuevo.
- **Muestreo sin reemplazamiento :** es el que se efectúa sin devolver a la población el elemento que se va eligiendo para construir la muestra.
- **Muestreo no aleatorio :** es el que se realiza de forma que todos los elementos de la población no tienen la misma probabilidad de ser incluidos en la muestra.

  Ejemplo 2.1 :*Supongamos una encuesta que se realiza por teléfono, mediante E-mail o por televisión.*

- **Muestreo aleatorio :** es el que se efectúa teniendo en cuenta que cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser elegido en la muestra.

  Ejemplo 2.2 :*Supongamos una encuesta realizada puerta a puerta o en la calle.*

10.2.1 Muestreos aleatorios

Los muestreos aleatorios se pueden dividir en:

- **Muestreo aleatorio simple :** Se parte de un listado de los elementos de la población y posteriormente se seleccionan aleatoriamente los n elementos que forman la muestra. Todos los elementos de la población tienen la misma posibilidad de ser elegidos para formar parte de la muestra.

  Este tipo de muestreo debe de cumplir dos condiciones:

  - Cada individuo debe tener la misma posibilidad de ser elegido para la muestra.
  - La selección de un individuo no debe afectar a la probabilidad de que sea seleccionado otro cualquiera.

- **Muestreo aleatorio sistemático :** Se debe de ordenar previamente a todos los individuos de la población, luego se elige uno al azar y a continuación se eligen todos los demás a intervalos constantes, hasta completar la muestra.

  Si en una población de tamaño N hay que elegir una muestra de tamaño n, habrá que tomar individuos en intervalos de longitud k siendo:

$$k = \frac{N}{n}$$

- **Muestreo aleatorio estratificado :** Se divide la población en estratos o subgrupos homogéneos, de tamaños N_1, N_2, ..., N_k. De cada estrato se elige una muestra aleatoria simple de tamaños n_1, n_2, ..., n_k, de forma que:

$$\begin{array}{l} N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k \\ n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \end{array}$$

  Si además se cumple que:

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_3}{N_3} = \frac{n}{N}$$

  tendremos un **muestreo estratificado proporcional.**

- **Muestreo aleatorio por conglomerados o áreas :** Se divide en dos etapas:

  1. Consiste en seleccionar un número de conglomarados o secciones en los que tenemos dividida la población, y tomar los individuos de cada conglomerado.
  2. Puede hacerse esta etapa de dos formas distintas, la primera es tomar todos los individuos de los conglomerados y la segunda hacer un muestreo aleatorio simple en cada conglomerado.

10.3 Distribuciones muestrales

Cuando tomamos una muestra de una población, su media se comporta estadísticamente bien, o sea, se suele aproximar a la media general siguiendo leyes perfectamente previsibles. Esto nos permitirá hacer inferencias precisas a partir de ellas, e incluso, conocer el riesgo que asumimos. Estas inferencias se hacen a partir de parámetros muestrales (estimadores). Vamos a estudiar como se comportan las muestras y que información podemos obtener de ellas.

10.3.1 Distribución muestral de medias

Supongamos que queremos saber el rendimiento medio de un estudiante de segundo de bachillerato, la longitud media de los espárragos o el salario medio de un obrero de la construcción.

Consideremos ahora una serie de muestras de tamaño n denominadas X_1, X_2, X_3, ... de las que hallamos la media en cada una: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, ... y sus desviaciones típicas: σ_{X_1}, σ_{X_2}, σ_{X_3}, ...

Los distintos valores de $\bar{x}_i$ dan lugar a una variable aleatoria que denominados $\bar{X}$, *distribución muestral de medias* y se define:

$$\boxed{\bar{X} \text{ es la media de los datos de una muestra.}}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} : \{X_1, X_2, \cdots\} & \longrightarrow & \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots\} \\ X_i & \longrightarrow & \bar{x}_i \end{array}$$

Suponiendo que la media de la población total es μ y que su desviación típica es σ, se puede demostrar que:

1. La media de la variable aleatoria $\bar{X}$, $\mu_{\bar{X}}$, es igual a la media de la población:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \cdots}{\text{número de muestras posibles}} = \mu$$

2. La desviación típica de la variable aleatoria $\bar{X}$, $\sigma_{\bar{X}}$, es igual al cociente entre la desviación típica de la población y $\sqrt{n}$:
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3. La distribución de la variable aleatoria $\bar{X}$ se comporta:
   - Si la población sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ entonces la distribución muestral de medias sigue una distribución normal:
   $$\bar{X} \hookrightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$
   - Si la población no sigue una distribución normal entonces si se cumple que $n \geq 30$, por el **Teorema central del límite** tendremos que la distribución muestral de medias sigue una distribución normal:
   $$\bar{X} \hookrightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

   Advertencia : Para un muestreo sin reemplazamiento se tiene que:
   $$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$
   aunque cuando N es muy grande, la raíz cuadrada tiene a uno.

Ejemplo 3.1 :*La distribución de las clasificaciones de los alumnos de segundo de bachillerato tiene una media de 5,5 puntos y una desviación típica de 3 puntos. Si elegimos una muestra de 40 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea menor que 5 puntos.?*

Solución :

Definamos $\bar{X}$ como la variable que mide las medias muestrales.

Como $n = 40 \geq 30$, podemos decir que la variable muestral se aproxima a una normal:
$$\mu = 5,5 \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,47 \Longrightarrow \bar{X} \hookrightarrow N(5'5, 0'47)$$
Solo nos queda calcular mediante tipificación: $P(\bar{X} \leq 5)$
$$P(\bar{X} \leq 5) = P(Z \leq \frac{5-5,5}{0,47}) = P(Z \leq -1,06) = 1 - P(Z \leq 1,06) = 0,1446$$

Ejemplo 3.2 : *Las estaturas de 1.200 estudiantes de un centro de enseñanza superior se distribuye normalmente con media 1,72 y una desviación típica de 0,9m. Si se toman 100 muestras de 36 estudiantes cada una, se pide:*

1. *La media y la desviación típica esperada en la distribución muestral de medias.*
2. *¿En cuántas muestras cabría esperar una media entre 1,68 y 1,73 m.?*
3. *¿En cuántas muestras es de esperar que la media sea menor que 1,69 m?*

Solución :

1. *Utilizando la teoría obtenemos:*
$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 1,72m \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,9}{\sqrt{36}} = 0,15m$$
2. *Como $n \geq 30$ podemos aplicar el teorema central del límite y ajustar la distribución muestral a una normal:*
$$\bar{X} \hookrightarrow N(1'72, 0'15)$$
Tipificando los valores 1,68 y 1,73 obtenemos:
$$P(1,68 \leq \bar{X} \leq 1,73) = P(\frac{1,68-1,72}{0,15} \leq Z \leq \frac{1,73-1,72}{0,15}) =$$
$$= P(-0,27 \leq Z \leq 0,07) = 0,5279 - (1 - 0,6064) = 0,1343$$
por lo tanto se espera que obtengamos aproximadamente 13 muestras con esas características.

3. Tipificando de nuevo:

$$P(\bar{X} \leq 1,69) = P(Z \leq \frac{1,69 - 1,72}{0,15}) = P(Z \leq -0,2) = 1 - 0,5793 = 0,4207$$

por lo tanto se esperan 505 muestras.

10.3.2 Distribución muestral de proporciones

Supongamos que queremos determinar la proporción de una población que posee un cierto atributo (tener T.V., tener 2 hijos, ...). Esa población sigue una distribución binomial donde la probabilidad de la característica estudiada se considera éxito de probabilidad p y el no tenerla, de fracaso de probabilidad $1 - p = q$.

Consideremos una serie de muestras de tamaño n denominadas $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots$ de las que vamos hallando la proporción de individuos que presentan la característica $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots$

Los distintos valores p_i dan lugar a una variable aleatoria que denominaremos $\hat{P}$, llamada:

distribución muestral de proporciones

y se define:

$$\boxed{\hat{P} \text{ es la proporción de éxito de los datos de una muestra.}}$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{P}:\{X_1, X_2, \cdots\} & \longrightarrow & \{p_1, p_2, \cdots\} \\ X_i & \longrightarrow & p_i \end{array}$$

Suponiendo que la probabilidad de éxito de la población es p y que la de fracaso es $1-p=q$ se puede demostrar que:

1. La media y la desviación típica de la variable $\hat{P}$ son:

$$\mu(\hat{P}) = p \qquad \sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

Advertencia: Los parámetros de las proporciones muestrales de tamaño n se obtienen dividiendo los parámetros binomiales entre n:

Distribución binomial	$\mu = np$	$\sigma = \sqrt{npq}$
Distribución muestral	$\mu(\hat{P}) = p$	$\sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

2. La distribución de la variable aleatoria $\hat{P}$ sigue una distribución normal:

$$\hat{P} \hookrightarrow N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$$

siempre que $np \geq 5$, $nq \geq 5$ y $n \geq 30$ para que pueda aplicarse el teorema central del límite. La aproximación será mejor cuanto más cerca de 0,5 se encuentre p.

Ejemplo 3.3 : *La vacuna contra la meningitis meningococea de tipo C inmuniza al 90% de las personas inoculadas. Si elegimos una muestra de 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de la muestra sea mayor o igual al 85%.?*

Solución :

Definamos la variable $\hat{P}$ como la proporción de inmunización de un muestra.

Como $n = 50 \geq 30$ podemos aproximar esta variable a una distribución normal:

$$p = 0,9 \qquad \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0,042 \Longrightarrow \hat{P} \hookrightarrow N(0'9, 0'042)$$

Solo nos falta calcular por tipificación: $P(\hat{P} \geq 0,85)$

$$P(\hat{P} \geq 0,85) = P(Z \geq \frac{0,65 - 0,9}{0,042}) = P(Z \geq -1,19) = 0,883$$

10.3.3 Distribución muestral de diferencias

Supongamos que tenemos dos poblaciones diferentes y que no nos conformamos con estudiar sus medias, sino que deseamos compararlas (tamaño entre cultivos, nivel escolar entre dos colegios,...).

Supongamos que tenemos dos poblaciones, una primera de media μ_X y desviación típica σ_X y la segunda con una media μ_Y y una desviación típica σ_Y.

Tomamos muestras de tamaño n_X en la primera población y de tamaño n_Y en la segunda, calculando seguidamente las medias de estas muestras en la primera población

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$$

y las medias de las muestras de la segunda población

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots$$

Llamaremos **distribución muestral de las diferencias** a la variable denotada por $\bar{X}-\bar{Y}$ que toma el valor de la diferencia de las medias muestrales

$$\bar{x}_1 - \bar{y}_1, \bar{x}_2 - \bar{y}_2, \bar{x}_3 - \bar{y}_3, \ldots$$

Se puede demostrar que:

1. La media de la variable aleatoria $\bar{X}-\bar{Y}$, $\mu_{\bar{X}-\bar{Y}}$, es igual a la diferencia de medias de las poblaciones
$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$
2. La desviación típica de $\bar{X}-\bar{Y}$, $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}$, es aproximado a
$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} \simeq \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$$
3. A medida que n_X y n_Y crecen, la distribución $\bar{X}-\bar{Y}$, se aproxima a una normal
$$\bar{X}-\bar{Y} \hookrightarrow N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)$$

Nota : Si σ_X y σ_Y no son conocidas, se aproximan estas por las desviaciones típicas de sendas muestras, siempre que el tamaño de la muestra sea superior a 100.

Ejemplo 3.4 : *Se escoge al azar una muestra de 40 hombres que tienen un salario medio de 152.000 pesetas y una desviación típica de 7.000 pesetas. También se escoge al azar una muestra de 30 mujeres que tienen un salario medio de 147.000 pesetas y una desviación típica de 5.000 pesetas. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia de los sueldos medios sea mayor a 6.000 pesetas.?*

Solución :

Datos de la muestra de hombres:

$$\mu_X = 152.000 \qquad \sigma_X = 7.000 \qquad n_X = 40$$

Datos de la muestra de mujeres:

$$\mu_Y = 147.000 \qquad \sigma_Y = 5.000 \qquad n_Y = 30$$

Tenemos por teoría que:

$$\bar{X}-\bar{Y} \hookrightarrow N \quad 152.000 - 147.000, \sqrt{\frac{7.000^2}{40} + \frac{5.000^2}{30}}\right) = N(5.000, 1.434'7)$$

Ahora solo nos falta hallar: $P(\bar{X}-\bar{Y} > 6.000)$

$$P(\bar{X}-\bar{Y} > 6.000) = P\left(Z > \frac{6.000 - 5.000}{1.434,7}\right) = P(Z > 0,70) = 1 - 0,7580 = 0,242$$

10.4 Construcción de muestras. Método de Monte Carlo

A veces es preciso la creación de muestras representativas de una cierta población teniendo en cuenta el número de elementos que compone la muestra.

El método más usual para la construcción de muestras es el llamado método de **Monte Carlo**, que permite determinar una muestra representativa de una determinada distribución de probabilidad.

Este método sigue 5 etapas básicas suponiendo que partimos de una distribución que sigue una normal de media μ y de desviación típica σ:

1. Se determina el tamaño de la muestra que queremos crear.
2. Se seleccionan tantos números aleatorios entre $[0,1]$ como elementos tenga la muestra.
3. Se determina el valor de una distribución $N(0,1)$ al que corresponde la probabilidad determinada en el apartado anterior.
4. Se tipifica cada valor del apartado anterior a una normal de media μ y desviación típica σ.
5. Se aproximan los valores, si da lugar, por redondeo a valores enteros o los correspondientes según el caso concreto.

Ejemplo 4.1 :*Se considera una variable aleatoria X tal que*

$$X \hookrightarrow N(5,3)$$

Construye una muestra de tamaño diez mediante los números aleatorios siguientes:

$$02, 22, 85, 19, 48, 74, 55, 24, 89, 69$$

Solución :

$N^{\underline{os}}$ aleatorios	*entre* $[0,1]$	$N(0,1)$	$N(5,3)$	*Aproximado*
02	$0,02 = 1-0,98$	$-2,06$	$-1,18$	-1
22	$0,22 = 1-0,78$	$-0,77$	$2,69$	3
85	$0,85$	$1,04$	$8,12$	8
19	$0,19 = 1-0,81$	$-0,88$	$2,36$	2
48	$0,48 = 1-0,52$	$-0,05$	$4,85$	5
74	$0,74$	$0,64$	$6,92$	7
55	$0,55$	$0,13$	$5,39$	5
24	$0,24 = 1-0,76$	$-0,71$	$2,87$	3
89	$0,89$	$1,23$	$8,69$	9
69	$0,69$	$0,50$	$6,50$	7

10.5 Estimación de intervalos de confianza

La estimación puntual no suele usarse puesto que la cantidad de datos que se obtienen no suele ser suficiente, o sea, el estimar mediante una muestra con exactitud puntual, cuales son los parámetros de toda la población sería muy arriesgado.

Es más útil fijar un intervalo de aproximación estimando el grado de confianza y fiabilidad que se tiene en él. En este tema, a partir de una distribución, conseguiremos dar un intervalo centrado en la media donde se encontrarán, presumiblemente, a partir de los valores de una muestra, los valores de los parámetros de la población fijándo también el grado de credibilidad de dicho resultado.

10.5.1 Intervalos de confianza

Intervalo de confianza : es el intervalo en el que, con una cierta probabilidad, está contenido el parámetro que se está estimando.
Nivel de confianza : es la probabilidad de que el intervalo de confianza contenga al verdadero valor del parámetro.

Nivel de riesgo : es la probabilidad de que en dicho intervalo no esté contenido el valor del parámetro.

Supongamos que queremos obtener un riesgo máximo α en el cálculo de un parámetro mediante la inferencia a una población que sigue una distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$$X \hookrightarrow N(0,1)$$

esto significa que queremos hallar un intervalo centrado en la media y tal que la probabilidad de que ese intervalo sea $1-\alpha$, o sea:

$$P(-a \leq X \leq a) = 1-\alpha$$

siendo $(-a,a)$ el intervalo de confianza. Hallemos a:

$$P(-a \leq X \leq a) = P(X \leq a) - P(X \leq -a) = P(X \leq a) - (1 - P(X \leq a)) = 2 \cdot P(X \leq a) - 1$$

y esto debe ser igual a $1-\alpha$, luego:

$$2 \cdot P(X \leq a) - 1 = 1 - \alpha \Longrightarrow P(X \leq a) = \frac{2-\alpha}{2} \Longrightarrow P(X \leq a) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Ejemplo 5.1 : *Si $X \hookrightarrow N(0,1)$ cuál es el intervalo para que la probabilidad de él sea 0,82.*
Solución :

$$1-\alpha = 0,82 \Longrightarrow \alpha = 0,18 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,09$$

$$P(X \leq a) = 1 - 0,09 = 0,91 \Longrightarrow a = 1,345$$

Luego el intervalo será: $(-1'345, 1'345)$

Si en vez de seguir la variable aleatoria una distribución normal de media 0 y desviación típica 1, siguiese una distribución $Y \hookrightarrow N(\mu,\sigma)$, solo tendríamos que tipificar los resultados.

Luego si hemos obtenido que:

$$P(X \leq a) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad a = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Como $Z \hookrightarrow N(\mu,\sigma)$, obtenemos:

$$\frac{Z-\mu}{\sigma} = a \Longrightarrow Z = \mu + a \cdot \sigma \qquad \frac{Z-\mu}{\sigma} = -a \Longrightarrow Z = \mu - a \cdot \sigma$$

entonces si $Z \hookrightarrow N(\mu,\sigma)$ el intervalo de confianza de Z para un nivel de riesgo α será:

$$(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma, \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma)$$

donde $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el valor de la distribución normal X, de media 0 y desviación típica 1 tal que:

$$P(X \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Ejemplo 5.2 : *Si $Z \hookrightarrow N(5,2)$ cuál es el intervalo para que la probabilidad de él sea 0,82.*
Solución :

$$1-\alpha = 0,82 \Longrightarrow \alpha = 0,18 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,09$$

$$P(X \leq a) = 1 - 0,09 = 0,91 \Longrightarrow a = 1,345$$

Luego el intervalo será:

$$(5 - 1'345 \cdot 2, 5 + 1'345 \cdot 2) = (2'31, 7'69)$$

10.5.2 Intervalos de confianza en distribuciones muestrales

Aplicando el estudio realizado en el apartado anterior a las distribuciones muestrales, podremos estimar el grado de confianza y veracidad de un intervalo que contenga el parámetro de la población a partir del estudio de una muestra concreta, con solo seguir el cuadro adjunto:

Distribuciones muestrales	Intervalos de confianza
De la media $\bar{X}$	$\left(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
De la proporción $\hat{P}$	$\left(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$
De la diferencia $\bar{X} - \bar{Y}$	$\left(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}, \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)$

Ejemplo 5.3 :*Halla el intervalo de probabilidad con una confianza de 0,9, para el peso medio de una muestra de 100 recién nacidos, sabiendo que la población de recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3.100$ gramos y desviación típica $\sigma = 150$.*

Solución :

Si $1 - \alpha = 0,9 \Longrightarrow \alpha = 0,1$ y $\frac{\alpha}{2} = 0,05$. Habrá que determinar el valor de Z correspondiente a 0,95 de probabilidad.

Es $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$, valor intermedio de 1,64 y 1,65:

$$P(Z \leq 1,645) = 0,9500$$

Luego el intervalo será:

$$\left(3.100 - 1'645 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}\ ,\ 3.100 + 1,645 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}\right) = (3.075'235\ ,\ 3.124'675)$$

10.6 Error y tamaño muestral

Hemos visto desde el principio de la unidad que cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor es el error que se comete al inferir los datos a la población total. También hemos estimado el intervalo de confianza que obtenemos al realizar una muestra concreta donde se puede apreciar que la anchura del intervalo es:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

Se puede apreciar también que la anchura del intervalo de confianza en las distribuciones muestrales, tanto de la media como de la proporción, dependen tanto del nivel de riesgo o confianza, como del número de elementos que forman la muestra.

Cuando decimos que el intervalo de confianza es:

$$(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\ ,\ \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma)$$

estamos afirmando que se comete un error máximo

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

para un nivel de confianza $1-\alpha$.

Llamaremos **error admitido** , y lo denotaremos por E, al siguiente valor:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

En el caso de la distribución muestral de la media será:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y en el caso de la distribución muestral de la proporción:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

En la mayoría de los trabajos de encuestación se intenta alcanzar un grado de confianza alto con un error admitido mínimo a establecer, ya que se procura que el coste de la encuesta sea el menor posible. Para ello, y sabiendo que el error admitido depende tanto del nivel de confianza como del número de elementos de la muestra, será necesario calcular cual es el número mínimo de elementos de la muestra para alcanzar un grado de confianza y un error aceptable.

Partiendo de la fórmula del error admitido y fijando desde un principio el nivel de confianza y el error admitido que deseamos, podemos calcular el tamaño mínimo de la muestra (**tamaño muestral**) para que se cumplan las condiciones iniciales de nivel de confianza y error.

Suponiendo que deseamos un nivel de riesgo máximo α y un error admitido máximo de e podemos calcular el número mínimo de elementos de la muestra para conseguir que se cumplan las previsiones:

- Para la distribución muestral de la media:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < e \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{e} < \sqrt{n} \Longrightarrow Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{e^2} < n$$

- Para la distribución muestral de la proporción:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}} < e \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot q}}{e} < \sqrt{n} \Longrightarrow Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{p \cdot q}{e^2} < n$$

Ejemplo 6.1 :*Se desea realizar una investigación para estimar el peso medio de los hijos recién nacidos de madres fumadoras. Se admite un error máximo de 50 gramos, con una confianza del 95%. Si por estudios anteriores se sabe que la desviación típica de peso medio de tales recién nacidos es de 400 gramos, ¿qué tamaño mínimo de muestra se necesita en la investigación?.*

Solución :

Como el nivel de confianza es 0,95 entonces:

$$1-\alpha = 0,005 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Como $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *y queremos que* $E < 50$*, tendremos:*

$$50 > 1,96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} > 1,96 \cdot \frac{400}{50} \Longrightarrow \sqrt{n} > 15,68 \Longrightarrow n > 245,86$$

Luego el tamaño de la muestra debe ser $n = 246$

PROBLEMAS DE MUESTRAS Y NIVEL DE CONFIANZA

1. En cierta población habitan 1.500 niños y jóvenes, 7.500 adultos y 1.000 ancianos. Se desea realizar un estudio para conocer el tipo de actividades de ocio que se desean incluir en el nuevo parque en construcción. Para ello, van a ser encuestados 200 individuos elegidos al azar.
   (a) Explica qué procedimiento de selección sería el más adecuado utilizar: muestreo con o sin reemplazamiento.
   (b) Si se utiliza muestreo estratificado, ¿cuál será el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.?
2. Una población está formada por solo 5 elementos, con valores 3, 5, 7, 9, 11. Consideramos todas las muestras posible de tamaño 2 con reemplazamiento que puedan extraerse de esa población. Se pide calcular:
   (a) La media de la población.
   (b) la desviación típica de la población.
   (c) La media de la distribución muestral de medias.
   (d) La desviación típica de la distribución muestral de medias, es decir, el error típico de las medias.
3. Los tornillos fabricados por cierta máquina de precisión, que se distribuye según una normal, tiene un peso medio de 142,32 gramos y una desviación típica de 8,5 gramos.
   (a) Halla la probabilidad de que una muestra elegida al azar de 25 tornillos, tomada entre ellos, tenga un peso medio superior a 144,6 gramos.
   (b) Realiza el mismo cálculo si la muestra que se toma es de 100 tornillos.
4. Una máquina a fabricado 800 piezas de precisión con un peso medio de 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos. Calcula la probabilidad de que una muestra de 80 piezas elegidas entre las fabricadas tenga un peso total de más de 12.400 gramos.
5. Se quiere conocer la estancia media de pacientes de un hospital. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, de donde se ha sacado los resultados siguientes:

   $$\bar{x} = 8,1 \text{ días} \qquad \sigma = 9 \text{ días}$$

   Se pide obtener un intervalo de confianza del 95% para la estancia media.
6. La nota de un grupo de alumnos es aproximadamente normal con media $\mu = 5{,}5$ y desviación típica $\sigma = 0{,}8$.
   (a) Hallar la media y la desviación típica de las medias muestrales para una muestra de 16 alumnos.
   (b) Calcular la probabilidad de que la media muestral de 4 alumnos elegidos al azar sea mayor que 5,2.
7. El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una ley $N(200, 50)$. Se toman muestras de 60 truchas y se calcula su peso medio.

   Halla las probabilidades de que la media muestral:
   (a) Sea mayor que 210 gramos.
   (b) Sea menor que 185 gramos.
   (c) Esté entre 210 y 225 gramos.
8. La variable aleatoria X hace corresponder los valores 1, 2, 3, 4 y 5 a una población formada por cinco individuos.
   (a) Construye una tabla con todas las muestras de tamaño dos.
   (b) Halla la media y la desviación típica de la variable aleatoria X.

(c) Halla la media y la desviación típica de la variable aleatoria $\bar{X}$, cuya distribución es la de las medias muestrales.

(d) Comprueba que $\mu_{\bar{X}} = \mu$ y que $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

9. Si las notas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad siguen una distribución normal $N(5,2)$ y elegimos al azar una muestra de 100 estudiantes.

   (a) ¿Qué probabilidad hay de que la nota media en matemáticas de estos 100 alumnos está entre 4,5 y 5.?

   (b) Si la muestra hubiese sido de 1.000 alumnos, ¿qué probabilidad tendríamos de que la nota media estuviera entre 4,5 y 5.?

   (c) ¿Porqué es mayor el segundo resultado?

10. Una población está formada por los elementos 1, 2, 4 y 6.

    (a) Calcula la proporción P de cifras impares.

    (b) Para cada una de las muestras con reemplazamiento de tamaño dos, calcula la proporción de cifras impares.

    (c) Calcula la media y la desviación típica de la distribución muestral de proporciones.

11. Una máquina fabrica piezas de presición. En su producción habitual fabrica un 3% de piezas defectuosas. Un cliente recibe una caja de 500 piezas procedente de la fábrica.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre más del 5% de piezas defectuosas en la caja.?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre menos de un 1% de piezas defectuosas.?

12. Se ha extraído una muestra de 144 alumnos de una escuela de arte, a los que se les ha propuesto un test de habilidad. La media y la desviación típica obtenida de la muestra son 82 y 14, respectivamente, A partir de estos datos, calcula el intervalo en el cual se hallará la media de población al nivel de confianza del 95%. Calcula el intervalo de confianza para los mismos datos correspondientes al nivel de confianza del 99%.

13. Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presentan a las pruebas de selectividad revela que la edad media es de 18,1 años. Halla un intervalo de confianza del 90% para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a las pruebas, sabiendo que la desviación típica de la población es de 0,4.

14. La duración de bombillas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 50 horas. Para estimar la duración media, se experimenta con una muestra de tamaño n. Calcula el tamaño de n para que, con un nivel de confianza del 95%, se haya conseguido un error en la estimación inferior a 5 horas.

15. Un psicólogo escolar quiere estimar la media de tiempo de reacción de los alumnos de primero de primaria. Para ello a elegido una muestra de 35 alumnos y ha obtenido los siguientes tiempos de reacción, en minutos:

    $$1,3; 0,8; 1,1; 1,0; 1,2; 0,9; 1,5; 0,6; 1,2; 1,1; 1,4; 1,3; 1,1; 1,2; 1,5; 1,3; 0,9$$

    $$1,2; 1,3; 1,1; 1,5; 0,8; 0,9; 1,1; 1,2; 1,4; 1,2; 0,9; 1,0; 1,1; 1,0; 1,2; 0,9; 0,8; 1,1$$

    Hallar el intervalo de confianza para la media de tiempo de reacción al nivel del 90%.

16. Un estudio de mercado ha determinado que el precio de los libros de ciencias sigue una distribución normal de desviación típica de 450 pesetas. Se desea estimar el precio medio de los libros de ciencias; para ello se elige una muestra aleatoria formada por 34 libros y se determina que la media muestral es $\bar{x} = 3.490$ pesetas.

    Halla el intervalo de confianza para el precio medio de los libros de ciencias al nivel de 99%.

17. Si tenemos una población formada por cinco individuos, en los que la variable X toma los valores 1, 2, 3, 4 y 5:

    (a) Considera todas las muestras de tamaño dos y halla para cada una el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 0,95.

(b) Comprueba que, aproximadamente, el 95% de estos intervalos contiene a la media poblacional.

18. Se desea hacer una estimación sobre la edad media de una determinada población. Calcula el tamaño de la muestra, necesario para poder realizar dicha estimación con un error menor de medio año a un nivel de confianza del 99,73%. Se conoce se estudios previos que la edad media de dicha población tiene una desviación típica de $\sigma = 3$.

19. Sabemos que el peso de los recién nacidos sigue una distribución $N(3'3, 0'5)$. Con el fin de actualizar estos datos seleccionamos una nueva muestra. ¿Qué tamaño de muestra debemos de elegir para cometer un error máximo de 0,1 kilos con un nivel de confianza del 95%.?

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. En cierto barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.

   (a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reposición. ¿Porqué?.

   (b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 1.500 niños, 7.000 adultos y 500 ancianos, posteriormente se decide elegir la muestra anterior utilizando muestreo estratificado.

      i. Define los estratos.

      ii. Determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

2. Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presenta a las pruebas de selectividad revela que la edad media de la edad es de 18,1 años. Halla el intervalo de confianza del 90% para la edad media de todos los estudiantes que se presenten a las pruebas, sabiendo que la desviación típica de la población es de 0,4.

3. Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según la ley normal de media 100 y varianza 729.

   (a) Halla la probabilidad de que la muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

   (b) Halla la probabilidad de que la muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

   (c) Se elige al azar una persona. Halla la probabilidad de que se C.I. esté entre 100 y 103.

4. Los 6.000 huevos de una partida tienen masas que están distribuidas normalmente. Se escogen al azar 10 huevos y se halla que sus masas son:

$$40, 41, 36, 44, 42, 48, 49, 38, 50, 38 \ \textit{gramos}$$

   (a) Halla la media y la desviación típica de la muestra.

   (b) Suponiendo que la masa media de los huevos de la partida es la misma que la calculada en el apartado a), pero que la desviación típica de la masa es de 5,5 gramos, demuestra que el número de huevos de la partida con masa superior a 50 gramos es aproximadamente 540.

   (c) Sabiendo que 5.000 de los 6.000 huevos tienen masa superiores a x gramos, estima el valor de x.

5. La altura media de 1000 alumnos varones de una universidad es 1'71m y la desviación típica es 0'05. Suponiendo que estas alturas están distribuidas normalmente, calcule el <u>número</u> aproximado de alumnos que verifican:

   a) Que sus alturas son mayores que 177cm.

   b) Que sus alturas están comprendidas entre 167 y 170 cm.

6. La edad media de esperanza de vida de una población es de 50 años, con una desviación típica $\sigma = 10$ años. Una compañia de seguros quiere determinar el número de individuos de la muestra para que la estimación difiera del valor 50, en al menos del 2% de ese valor, tomando como nivel de confianza el 95%. Calcula el tamaño de dicha muestra.

7. La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media 1'62m y una desviación típica 0'12m. ?Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1'60m?. ?Cuál es el intervalo de confianza al 96% de una muestra de la distribución muestral de medias?.

8. Los estudiantes de bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media μ desconocida y una desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7 horas. Hallar un intervalo de confianza al 96% para la media de horas de sueño μ.

9. Un fabricante de bolígrafos sabe que la desviación típica de la duración de los bolígrafos es de 100 horas. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95% de que el error de la duración media que se calcule sea menor a 10h.

10. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 100mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20mg/cc.

    (a) Obtenga un intervalo de confianza, al 90% para el nivel de glucosa en sangre en la población.

    (b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?.

11. La media de edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la selectividad es de 18,1 años y la desviación típica 0,6 años.

    (a) De los alumnos anteriores se elige, al azar, una muestra de 100, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17,9 y 18,2 años?.

    (b) ¿Qué tamaño debe de tener una muestra de dicha población para que su media está comprendida entre 17,9 y 18,3 años, con una confianza del 99,5%?.

SOLUCIONES DE MUESTREO

1. a) Sin reemplazamiento b) Niños 30, Adultos 150 y ancianos 20
2. a) $\mu = 7$ b) $\sigma = 2\sqrt{2}$ c) $\mu_{\overline{X}} = 7$ d)$\sigma_{\overline{X}} = 2$
3. a) 0'0901 b) 0'0037
4. 0'0125
5. $(7'477, 8'723)$
6. a) $\mu_{\overline{X}} = 5'5 \qquad \sigma_{\overline{X}} = 00'2$ b) 0'7734
7. a) 0'0606 b) 0'0102 c) 0'0605
8.

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1'5	2	2'5	3	1'5	2	2'5	3	3'5	2	2'5	3	3'5	4	2'5	3	3'5	4	4'5	3	3'5	4	4'5	5

   b) $\mu = 3 \qquad \sigma = \sqrt{2}$ c) $\mu_{\overline{X}} = 3 \qquad \sigma_{\overline{X}} = 1$
9. a) 0'4938 b) 0'5 c) Cuanto más elementos, más seguridad.
10. No
11. No
12. $(79'714, 84'286) \qquad (78'0996, 85'004)$
13. $(18'034, 18'165)$
14. 385
15. $(0'033, 2'201)$
16. $(3291'29, 3688'71)$
17. a) $(1'04, 4'96)$
18. 320
19. 97

   PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD
20. a) Es más significativo sin reemplazamiento
   b) Niños 17, Adultos 78 y ancianos 5
21. $(18'034, 18'065)$
22. a) 0'0004 b) 0'0228 c) 0'2454
23. a) $\mu = 42'6 \qquad \sigma = 4'71$ b) Teorico c) 41'645
24. a) 115 b) 208
25. 385
26. a) 0'9515 b) $(1'596, 1'644)$
27. $(5'875, 8'125)$
28. 3842
29. a) $(96'71, 103, 29)$ b) 3'29
30. a) 0'9511 b) 72

Tema XI

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

11.1 Introducción

Hemos tratado en temas anteriores las conclusiones que se pueden sacar de una muestra sabiendo como se distribuye la población entera. Vamos a estudiar ahora si, sabiendo como se distribuye una población, el parámetro que le define es correcto o no, y en cada caso sabremos como actuar.

Supongamos que una investigación da como resultado que la nota media de matemáticas en alumnos de segundo de bachillerato es de 6,2 con una desviación típica de 0,8 (hipótesis nula) y queremos saber si esta afirmación de que la media es 6,2 es cierta o no (hipótesis alternativa).

Para ello, tomamos una muestra y calculamos su media muestral (estadístico de contraste) y fijamos un nivel de confianza para el constraste, que será $1-\alpha$. Este nivel de confianza nos proporcion un intervalo de confianza (región de aceptación) que será:

$$(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}})$$

Ahora solo nos faltará comprobar si esa media muestral esta dentro de la región de aceptación o no; si estuviese, suponemos que era cierta la hipótesis nula y si no, esta la rechazamos.

11.2 Definiciones previas

- **CONTRASTE DE HIPÓTESIS :** procedimiento estadístico por el que investiga la veracidad de una hipótesis sobre una población.
- **HIPÓTESIS NULA ,H_0 :** es la hipótesis que queremos contrastar, considerada al principio como verdadera y que aceptaremos o rechazaremos después de realizar el contraste.
- **HIPÓTESIS ALTERNATIVA, H_a :** cualquier otra hipótesis que nos sitúe frente a H_0 y que si se acepta, como consecuencia del contraste, se rechaza H_0.
- **ESTADÍSTICO DE CONTRASTE :** es la variable aleatoria cuyo valor para una muestra determinada nos permitirá tomar la desición sobre la aceptación o el rechazo de la hipótesis.
- **REGIÓN DE ACEPTACIÓN :** es el conjunto de valores del estadístico de contraste que nos lleva a aceptar la hipótesis nula.
- **REGIÓN DE RECHAZO :** es el conjunto de valores del estadístico de contraste que nos lleva a rechazar la hipótesis nula.
- **CONTRASTE BILATERAL :** se produce cuando la región de rechazo está formada por dos regiones disjuntas.
- **CONTRASTE UNILATERAL :** se produce cuando la región de rechazo está formada por un solo conjunto de puntos.

El contraste de hipótesis y por tanto la desición de rechazo o aceptación de una hipótesis depende de la muestra escogida, lo que nos lleva a deducir que puede cometerse errores en las desiciones, pues podemos rechazar una hipótesis siendo cierta o aceptarla siendo falsa.

Justamente a la probabilidad de cometer un error se le llama **nivel de significación** y se designa por α, miestras que a la probabilidad de no cometer error se denomina **potencia de contraste** y se designa por $1-\alpha$.

	H_0 es cierta	H_0 es falsa
Se acepta H_0	sin error	error tipo II
Se rechaza H_0	error tipo I	sin error

Ejemplo 2.1 :*Se supone que la temperatura del cuerpo humano es 37 grados con una desviación típica de 0,9 grados. Veamos si es cierta dicha afirmación.*
<u>*Solución :*</u>

Designamos $H_0 \equiv$ *la media es 37 grados*
Designamos $H_a \equiv$ *la media no es 37 grados*
Tomamos una muestra:

$$37,7; 36,7; 37,5; 37; 37,9; 37,6; 37,1; 37; 36,8; 37,1$$

y llamamos a $\bar{X}$ *al estadístico cuya media es 37,24*
Sabemos que la distribución muestral de la media es:

$$N\left(37, \frac{0,9}{\sqrt{10}}\right) \quad = \quad N(37, 0'285)$$

Supongamos que queremos un nivel de significación de $\alpha = 0,05$*, o sea,* $1-\alpha = 0,95$*, cuyo intervalo de aceptación es:*

$$(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}}) = (-1'96, 1'96)$$

tipificando el valor 37,24 a la normal $N(0,1)$*, obtenemos:*

$$\frac{37,24-37}{0,285} = 0,93 \in (-1'96, 1'96)$$

luego la hipótesis se acepta con una potencia de contraste del 95%.

11.3 Etapas en un contraste de hipótesis

Para realizar cualquier contraste de hipótesis es conveniente seguir los siguientes pasos:

1. **Definir la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.**

   Ambas hipótesis deben ser excluyentes esntre sí y dependiendo de la hipótesis alternativa puede haber:

   - Contraste bilateral : si $H_a : p \neq p_0$
   - Contraste unilateral : si $H_a : p > p_0$ o bien, $H_a : p < p_0$

2. **Fijar el nivel de significación y determinar la región de aceptación.**

   Los niveles de significación suelen ser: 0’005, 0’001, 0’0001

3. **Determinar el estadístico de contraste apropiado.**

   Depende del parámetro sobre el que se elabora la prueba pudiendo ser:

   - Si la hipótesis es sobre la media poblacional.

   $$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

   - Si la hipótesis es sobre la proporción poblacional.

   $$Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}}$$

   - Si la hipótesis es sobre las diferencias de medias.

   $$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

4. **Calcular el valor del estadístico usado en la prueba.**

5. **Tomar la desición e interpretarla.**

Ejemplo 3.1 : *Una dama afirma que el sabor de una taza de té con leche es distinto cuando se vierte antes la leche que el té. Para contrastar esta información se preparan diez tazas de té, en cinco se vierten antes la leche y en las otras antes el té. A continuación, la dama prueba en orden aleatorio las diez tazas y acierta en ocho de las diez. ¿Es este hecho una evidencia significativa a favor de la hipótesis.?*

Solución :

Sea $H_0 = \{$ *el sabor de una taza de té es indiferente del orden en que se viertan té y leche*$\}$

Sea $H_a = \{$ *el sabor de una taza de té es distinto si se vierte primero la leche y luego el té o al contrario*$\}$

Si la hipótesis nula se cumple y da lo mismo, la distribución de acierto de las tazas de té seguirán una distribución con probabilidad 0,5 de acertar.

Luego $H_0 : p = 0,5$ *y* $H_a : p > 0,5$

El estadístico de contraste será:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}} = \frac{\hat{P} - 0,5}{\frac{0,5 \cdot 0,5}{10}} = \frac{\hat{P} - 0,5}{0,16}$$

Para un nivel de significación del 0,05 y como se trata de un contraste unilateral tendremos que $Z_\alpha = 1,65$

Veamos si 0,8 se mantiene dentro de la región de aceptación:

$$\frac{0,8 - 0,5}{0,16} = 1,875$$

Como 1,875 es mayor que 1,65 este valor cae en la región de rechazo y por tanto es falso que da igual el orden que sirvamos la leche y el té.

11.4 Contraste de hipótesis para la media

Si partimos de una distribución $N(\mu, \sigma)$ con σ conocida y queremos contrastar μ con μ_0 con un nivel de significación α, tomando una muestra de tamaño n cuya media muestral es $\bar{x}$, entonces sabiendo que el estadístico es:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

tenemos:

- $H_a : \mu \neq \mu_0$ (contraste bilateral)

  La región de aceptación será :$(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}})$

- $H_a : \mu < \mu_0$ (contraste unilateral)

  La región de aceptación será :$(-\infty\ ,\ Z_\alpha)$

- $H_a : \mu > \mu_0$ (contraste unilateral)

  La región de aceptación será :$(-Z_\alpha\ ,\ +\infty)$

Ejemplo 4.1 : *La velocidad media de la última contrareloj en España se cree que fue de 40 Km/h con una desviación típica de 5 Km/h. Para contrastar esta información se decide estudiar la velocidad media de 15 corredores, resultado:*

$$43 \quad 43,2 \quad 45 \quad 43,1 \quad 39,5 \quad 45 \quad 43 \quad 42,3$$

$$39,6 \quad 40 \quad 39 \quad 45 \quad 39 \quad 44,1 \quad 42,6$$

¿Se puede aceptar esta hipótesis como cierta con un nivel de significación de 5%.?

Solución :

En este caso tenemos que: $H_0 : \mu = 40$ *y* $H_a : \mu \neq 40$
El estadístico de contraste será:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{5}{\sqrt{15}}}$$

Como el nivel de confianza es del 5% entonces $\alpha = 0,05$ *y por tanto se tendrá que:*

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \Longrightarrow \textit{Región de aceptación } (-1'96, 1'96)$$

Como el valor medio de la muestra es 42,23 tendremos:

$$\frac{42,23 - 40}{1,3} = 1,71 \in (-1'96, 1'96)$$

luego admitimos que la media ha sido de 40 Km/h

Si no se conociese σ y el tamaño de la muestra es mayor de 30 se sustituye la varianza σ^2 por la cuasi-varianza $\hat{\sigma}^2$, donde:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

luego:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \cdot \sigma$$

11.5 Contraste de hipótesis para la proporción

Si partimos de una distribución $B(n,p)$ y queremos contrastar p con p_0 con un nivel de significación α, tomando una muestra de tamaño n cuya proporción muestral es $\hat{p}$, entonces sabiendo que el estadístico es:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}}$$

tenemos:

- $H_a : p \neq p_0$ (contraste bilateral)

  La región de aceptación será :$(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}})$

- $H_a : p < p_0$ (contraste unilateral)

  La región de aceptación será :$(-\infty\ ,\ Z_\alpha)$

- $H_a : p > p_0$ (contraste unilateral)

  La región de aceptación será :$(-Z_\alpha\ ,\ +\infty)$

Ejemplo 5.1 :*El fabricante de una crema para quemaduras afirma que tiene una efectividad del 90%. Seleccionamos una muestra de 40 personas con quemaduras y les aplicamos dicha crema, de forma que 32 de ellas resultan aliviadas. Contrasta la afirmación del fabricante con un nivel de significación del 5%.*
Solución :
Tenemos que: $H_0 : p = 0,9$ *y que* $H_a : p \neq 0,9$ *y además* $\alpha = 0,05$ *con lo cual obtenemos que:*

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Luego es un contraste bilateral donde aceptaremos la afirmación H_0 si:

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

o sea,

$$-1,96 < \frac{0,8 - 0,9}{\sqrt{\frac{0,9 \cdot 0,1}{40}}} < 1,96$$

Pero dicho cociente es -2,1 que no pertenece al intervalo, luego la afirmación era falsa con un nivel de significación del 5%

11.6 Contraste de hipótesis para la diferencia de medias

Si partimos de dos poblaciones $N(\mu_X, \sigma_X)$ y $N(\mu_Y, \sigma_Y)$ con varianzas conocidas y queremos contrastar $\mu_X - \mu_Y$ con un nivel de significación α, tomando una muestra de tamaño n_X para la población primera y una muestra de tamaño n_Y para la segunda, entonces sabiendo que el estadístico es:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

tenemos:

- $H_a : \mu_X - \mu_Y \neq \mu$ (contraste bilateral)

  La región de aceptación será :$(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}})$

- $H_a : \mu_X - \mu_Y < \mu$ (contraste unilateral)

  La región de aceptación será :$(-\infty\ ,\ Z_\alpha)$

- $H_a : \mu_X - \mu_Y > \mu$ (contraste unilateral)

  La región de aceptación será :$(-Z_\alpha\ ,\ +\infty)$

Ejemplo 6.1 :*Queremos comprobar si existen diferencias entre dos grupos de alumnos de centros diferentes, para lo cual realizamos el mismo examen a 30 estudiantes del primer grupo y a 35 del segundo obteniendo como resultado:*

	Nota media	*Desviación típica*
Grupo 1	*5,5*	*0,5*
Grupo 2	*5,2*	*1*

Contrasta la diferencia entre los grupos con un nivel de significación del 1%.
Solución :
Definimos las hipótesis como sigue:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$$

$$H_a : \mu_X - \mu_Y \neq 0$$

$$\alpha = 0,01 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

Luego aceptaremos H_0 si:

$$-2,575 < \frac{(5,5 - 2,5) - 0}{\sqrt{\frac{0,5^2}{30} + \frac{1^2}{35}}} < 2,575$$

Como dicho cociente es 1,56 podemos decir que apenas hay diferencia con un nivel de significación del 1%

11.7 Interpretación de una ficha técnica

En toda encuesta debe aparecer una ficha téncica, apareciendo al menos:

- Ámbito: geográfico de la encuesta.
- Universo: personas, objeto de la investigación.
- Tipo de muestreo: forma de recogida de datos.
- Error admisible y margen de confianza.
- Tamaño de la muestra.
- Otros aspectos: fecha, empresa, equipo técnico.

Mediante dicha ficha podemos saber si la encuesta está bien realizada y los valores y consecuencias reales que podemos sacar de ella.

FICHA TÉCNICA

- **Ámbito:** Lugar donde se realiza el estudio; nacional, comarcal,...
- **Universo:** Personas sobre las que se ha hecho la encuesta.
- **Muestra:** Número de datos recogidos.
- **Margen de error:** Margen de confianza (error admitido, intervalos de confienza,...)
- **Selección:** Sistema elegido para la recogida de datos: aleatoria, por alguna cualidad,...
- **Entrevistas:** Método de recogida de datos; personal, en la calle,...
- **Fechas de trabajo:** Fechas entre las que se han recogido los datos.
- **Realización:** Nombre del grupo de trabajo.
- **Equipo técnico:** Personas que integran dicho grupo.

Ejemplo 7.1 :*La ficha técnica de una encuesta de opinión pública en un diario de difusión nacional es la que aparece adjunta:*

FICHA TÉCNICA

- **Ámbito:** *España*
- **Universo:** *Personas mayores de 18 años.*
- **Muestra:** *1.000 entrevistas.*
- **Margen de error:** *Error posible* $\pm 3,2\%$*, para un nivel de confianza del 95,5% (dos sigma) y P/Q=50/50.*
- **Selección:** *Aleatoria, a partir del sistema de cuotas por sexo, edad y profesión.*
- **Entrevistas:** *Personal.*
- **Fechas de trabajo:** *24 y 25 de marzo de 1.988.*
- **Realización:** *Sigma Dos S.A.*
- **Equipo técnico:** *José Miguel de Elías, Begoña Guzmán, José María Ochoa, Diego López de Quintana y Luis López Frasío.*

1. *Comprueba que el número de entrevistados es corresto.*
2. *Si en una de las preguntas han contestado afirmativamente el 68,3% de los entrevistados, cuál es el intervalo de aceptación según los datos técnicos.?*

Solución :

1. *Al ser la información de la ficha P/Q=50/50 tomamos:*

$$p = 0,5 \qquad q = 0,5$$

La distribución muestral de proporciones sigue una ley normal de media $p = 0,5$ *y una desviación típica de:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}}$$

siempre que $n > 30$.

La distribución que queremos estudiar se distribuye según:

$$N\left(0'5, \frac{0,5}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95,5%, su valor crítico correspondiente es $Z_c = 2$

Luego si el error que se comete es del 3,2%, utilizando que:

$$E = Z_c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} < 0,032 \Longrightarrow n > Z_c^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} \Longrightarrow n > 4 \cdot \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,032^2} = 976,56$$

Por lo tanto el tamaño de $n = 1.000$ *es correcto.*

2. *En este caso* $p = 0,683$ *luego el intervalo de aceptación será:*

$$0,683 - 2 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{1.000}} < p < 0,683 + 2 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{1.000}}$$

PROBLEMAS DE CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. Prueba que en las pruebas bilaterales para un nivel de contraste del 95% el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

2. Comprueba que los valores críticos Z_α para las pruebas de hipótesis unilaterales correspondientes a los niveles de significación del 10%, 5%, 1% y 0,1% son : -1,28 ó 1,28; -1,645 ó 1,645; -2,33 ó 2,33 y -3,09 ó 3,09, respectivamente.

3. Una encuesta a 64 profesionales de un institución reveló que el tiempo medio de empleo en dicho campo era de 5 años, con una desviación típica de 4. Considerando el nivel de significación del 0,05, ¿sirven estos datos de soporte de que el tiempo medio de empleo de los profesionales de esta institución está por debajo de los 6 años?. Suponemos que la población de profesionales se distribuye normalmente.

4. La vida media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos por una empresa es de 1.570 horas, con una desviación típica de 120 horas. Si μ es la vida media de todo lo producido en esa empresa, contrasta la hipótesis de que $\mu = 1.600$ horas contra la hipótesis alternativa $\mu \neq 1.600$ horas, utilizando un nivel de significación de 0,05.

5. El salario medio correspondiente a una muestra de 1.600 personas de cierta población es de 93.500 pesetas. Se sabe que la desviación típica de los salarios en la población es de 20.000 pesetas. ¿Se puede afirmar, con un nivel de significación de 0,01, que el salario medio en dicha población es de 95.000 pesetas.?

6. Un test de inteligencia en EE.UU. se distribuye $N(102, 15)$. Al trasladarlo a la población española, en una muestra de 100 individuos se obtuvo una media de 104, ¿qué podemos inferir al 95% de confianza.?

7. La vida media de las lámparas de 60 vatios está garantizada por lo menos en 800 horas, con una desviación típica de 120 horas. Se se escoge al azar una muestra de 25 lámparas de un grupo y después de comprobarla se calcula una vida media de la muestra de 750 horas, para un nivel de significación del 0,05, ¿habría que rehazar el grupo por no cumplir las garantías.?

8. Se encuentra que una muestra de 625 piezas tiene una longitud media de 20,05 mm. Para un nivel de significación del 0,001, ¿puede considerarse razonable la muestra como una muestra aleatoria, extraída de un grupo producido, con una longitus media de 20 mm y una desviación típica de 0,1 mm.?

9. La producción de una máquina se distrubuye según una ley normal y fabrica piezas con un peso medio de 245 gramos y una desviación típica de 36,3 gramos. Para comprobar si las piezas que produce en la actualidad están de acuerdo a estas normas, se toma cada cuatro horas una muestra de 16 piezas y se determina su peso medio. Calcula los límites de confianza del 99% y 95%.

10. Se cree que el tiempo medio de ocio que dedican al día los estudiantes de bachillerato sigue una distribución normal de 350 minutos y desviación típica de 60 minutos. Para contrastar esta hipótesis, se toma una muestra aleatorio formada por 100 alumnos, y se observa que el tiempo medio es de 320 minutos. ¿Qué se puede decir de esta afirmación al nivel del 10%.?

11. Se quiere contrastar el contenido de azúcar de distintos cargamentos de remolacha. Se sabe que el contenido medio de azúcar para remolacha de regadío es del 18% y con media superior para el de secano, siendo la desviación típica del 6% para ambos casos. Se toma una muestra de 20 cargamentos. ¿Qué valor de la media permitirá tomar la decisión si es de secano o de ragadío al nivel del 5%.?

12. El Ministerio de Educación, hace cinco años hizo una encuesta sobre la distribución de las edades del profesorado de educación especial y obtuvo que se distribuían según una normal de media 39 años. Se cree que últimamente la media ha aumentado, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria formada por 38 profesores, cuyas edades han sido:

$$35; 37; 39; 42; 40; 39; 41; 40; 39; 38; 38; 47; 43; 41; 40; 39; 38; 39; 41;$$

$$45; 41; 38; 42; 29; 32; 45; 46; 29; 37; 40; 41; 43; 39; 41; 43; 32; 32; 39$$

Contrasta la hipótesis apuntada sobre el aumento de la edad media al nivel del 5%.

13. Un experto en temas electorales, basado en los resultados de anteriores comicios, sostiene que, si se celebran elecciones generales en la actualidad, tan solo acudiría a votar el 48% del electorado. Sin embargo, en un sondeo electoral realizado recientemente con una muestra de 1.500 personas, 800 manifiestan su intención de votar. Plantea la prueba de hipótesis más adecuada, para un nivel de significación del 0,05 y comenta el resultado.

14. Existe la hipótesis de que en la Comunidad Autónoma de Castilla y León realizan estudios de nivel medio en mismo número de varones que de mujeres. Mediante un sistema aleatorio tomamos una muestra de 1.000 expedientes escolares, de los cuales 532 son varones y 468 son mujeres. ¿Es este un resultado poco probable o, por el contrario, se ajusta a la gran mayoría del 99% de los resultados.?

15. Un profesor propone a sus alumnos un cuestionario para responder verdadero o falso. Para comprobar la hipótesis de que los alumnos contestan al azar, adopta la siguiente posición:

    - Si al menos 7 respuestas son acertadas, el estudiante no ha contestado al azar.
    - Si hay menos de 7 respuestas acertadas, ha contestado al azar.

    Halla la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando sea correcta.

16. Tras 100 lanzamientos de una moneda se observa que tan solo en 35 ocasiones a salido cara. Utilizando la aproximación normal, comprueba, al nivel de significación del 5%, si el resultado proporciona evidencia que permite rechazar la hipótesis de que la probabilidad de obtener cara con esta moneda es de 0,5. ¿Qué conclusión podemos sacar si en una nueva experiencia con la misma moneda hemos obtenido 41 caras.?

17. Un medicamento tradicional usado en la curación de enfermos reumáticos obtiene un 30% de resultados positivos. Se está probando un nuevo medicamento. Sobre una muestra de 20 enfermos reumáticos, se recuperaron 13 utilizando el nuevo medicamento. ¿Qué podemos deducir.?

18. Durante el año 1.982, los 25.670 nacidos en cierta comunidad autónoma se distribuyeron en 13.333 niños y 12.337 niñas. ¿Es verosimil la hipótesis de que niños y niñas nacen con igual probabilidad.?

19. Tomada una muestra aleatoria de 120 alumnos de un centro de enseñanza, se comprobó que el 23% de la muestra provenía de niveles económicos altos. ¿Es compatible este resultado con la suposición de que menos del 30% del alumnado del centro proviene de clases altas, al 95% de nivel de confianza.?

20. El fabricante de un producto médico sostiene que tiene un 90% de efectividad en disminuir los efectos de la alergia por un periodo de 8 horas. Se suministro dicho producto a una muestra de 200 pacientes que tenían alergia, de los cuales 160 encontraron alivio. Con estos datos, ¿es cierta la aseveración del fabricante.?

21. El ayuntamiento de una ciudad afirma que el 65% de los accidentes juveniles de los fines de semana son debidos al alcohol. Un investigador decide contrastar dicha hipótesis, para lo cual toma una muestra formada por 35 accidentes y observa que 24 de ellos han sido debidos al alcohol. ¿Qué podemos decir sobre la afirmación del ayuntamiento.?

22. Un entrenador afirma que sus jugdores en los entrenamientos encestan más del 92% de los tiros libres. Con el fin de contrastar esta afirmación se ha elegido aleatoriamente una muestra de 60 lanzamientos, de los cuales 42 han entrado en la canasta. Estos resultados, ¿ponen en duda al entrenador o no?.

23. Se ignora la población de familias numerosas, con el fin de determinar dicha proporción se toma una muestra de 800 familias, siendo la proporción obervada de 0,18.

    Formulamos la hipótesis nula $H_0 : p = 0,20$. Contrastar dicha hipótesis con un nivel de significación $\alpha = 0,05$.

24. Después de realizar 60 lanzamientos con una determinada moneda, obtenemos 35 caras y 25 cruces. Ante este resultado, uno de los jugadores indica que dicha moneda debe estar trucada, de forma que hay más posibilidades de obtener cara que cruz, pero el otro jugador mantiene que no lo está. Contrasta esta hipótesis con un nivel de significación del 5% y realiza el mismo contraste si de los 60 lanzamientos, 50 son caras.

25. Estudiamos dos muestras de ciudadanos de la Comunidad de Andalucía (A y B), de 80 miembros cada una para conocer el sentimiento nacionalista. Sobre una escala de 1 a 10, la primera alcanzó una media de 7,2 con una desviación típica de 3,1 mientras que la segunda alcanzó una media de 8,1 con una desviación típica de 4,2. Nuestra hipótesis de investigación es que el colectivo B tiene un sentimiento nacinalista mayor que el colectivo A. Comprueba la hipótesis para un nivel de significación del 0,01.

26. Una revista publica el siguiente titular: LOS HOMBRES GASTAN MÁS DINERO EN REGALOS DE NAVIDAD QUE LAS MUJERES. Un investigador sospecha que dicha afirmación puede ser cierta. Los resultados que ha ofrecido la encuesta que sirve de base al titular son:

	Entrevistas	Media de gasto	Desviación típica
Varones	615	38.020 pesetas	47.550
Mujeres	715	36.130 pesetas	75.720

Sabiendo que la muestra ha sido realizada por muestreo aleatorio, podemos afirmar, con un nivel de significación del 0,05, que el titular de la revista es cierto. Compruébalo.

27. Dos academias de idiomas preparan para una prueba específica. En la academia A hay 30 estudiantes y la nota media obtenida es 5,2. En la academia B hay 36 estudiantes y la nota media es 4,7. La desviación típica de los resultados de esta prueba, calculada a partir de varios cientos de candidatos anteriores, es 1,2. Contrasta si los estudiantes de idiomas de la academia A son mejores que los de la academia B.

Apéndice A

VARIABLE NORMAL

A.1 Distribución normal estándar. Manejo de tablas

La distribución **normal estándar** o **normal tipificada**, que representamos por $N(0,1)$, es la distribución normal de media 0 y desviación típica 1.

Tiene un interés especial porque existen tablas de esta distribución para calcular cualquier probabilidad sin tener que integrar. Su función es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}$$

<u>**Manejo de tablas:**</u>

Como hemos dicho, no será necesario integrar esta función para hallar, por ejemplo, $P(X \geq 2,17)$ si $X \hookrightarrow N(0,1)$, ya que existen tablas para ello, aunque debemos aprender a manejar dichas tablas.

En estas tablas aparece representada $P(X \leq k)$ siendo $X \hookrightarrow N(0,1)$, como se puede apreciar a continuación:

A continuación veremos como se leen estas tablas según la probabilidad que se nos pida y aprenderemos a manejarlas para buscarla en la tabla.

Debemos tener siempre en cuenta que el área que abarca la curva es 1 y que la curva es simétrica respecto del eje Y.

- **$P(X \leq a)$ siendo a positivo.**

  Basta con mirar a la tabla buscando el la columna de la izquierda el valor de la unidad y la décima y en la fila superior la centésima.

  Ejemplo A.1 :*Supongamos que queremos hallar* $P(X \leq 2,17)$.

  buscaremos en la columna de la izquierda $2,1$ *y en la fila superior* $0,07$.

  $$\begin{array}{ccc} & & 0,7 \\ & & \downarrow \\ 2,1 & \longrightarrow & 0,9850 \end{array}$$

  Luego $P(X \leq 2,17) = 0,9850$

- **$P(X \leq a)$ siendo a negativo.**

  Por simetría de la función, obtenemos:

  $$P(X \leq a) = 1 - P(X \leq -a)$$

  Ejemplo A.2 :*Supongamos que queremos hallar* $P(X \leq -2,17)$.

  Entonces tenemos que: $P(X \leq -2,17) = 1 - P(X \leq 2,17) = 1 - 0,9850 = 0,0150$

- $P(X \geq a)$ **siendo** a **positivo.**

  Por simetría de la función y como el área es 1, obtenemos:

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$

Ejemplo A.3 :*Supongamos que queremos hallar* $P(X \geq 2,17)$.

Entonces tenemos que: $P(X \geq 2,17) = 1 - P(X \leq 2,17) = 1 - 0,9850 = 0,0150$

- $P(X \geq a)$ **siendo** a **negativo.**

  Por simetría de la función, obtenemos:

$$P(X \geq a) = P(X \leq -a)$$

Ejemplo A.4 :*Supongamos que queremos hallar* $P(X \geq -2,17)$.

Entonces tenemos que: $P(X \geq -2,17) = P(X \leq 2,17) = 0,9850$

- $P(a < X \leq b)$ **siendo** a **y** b **cualesquiera.**

  Para hallar el área entre a y b tendremos que calcularlo mediante la propiedad de la función de distribución:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

  y solo queda hallar dichas probabilidades según los valores de a y b.

Ejemplo A.5 :*Supongamos que queremos hallar* $P(-1,2 \leq X \leq 2,17)$.

Entonces tenemos que:

$$P(-1,2 \leq X \leq 2,17) = P(X \leq 2,17) - P(X \leq -1,2) =$$

$$= P(X \leq 2,17) - (1 - P(X \leq 1,2)) = 0,9850 - (1 - 0,8849) = 0,8699$$

A.2 Tipificación

Hemos aprendido a hallar facilmente, con la tabla, cualquier probabilidad de X si cumple $X \hookrightarrow N(0,1)$, pero casi ningún fenómeno sigue esta distribución.

Sería imposible el crear una tabla para cada $N(\mu,\sigma)$, ya que μ y σ pueden tomar infinitos valores. Lo que parece más factible será el poder convertir una variable aleatoria continua Y, tal que $Y \hookrightarrow N(\mu,\sigma)$, en una variable normal estándar, mediante dos procesos de transformación:

- Traslación: trasladar la media μ al origen.
- Reducción: contraer la gráfica para que la desviación típica coincida con 1.

Esto se consigue con el siguiente cambio de variable si $X \hookrightarrow N(\mu,\sigma)$:

$$X \hookrightarrow N(\mu,\sigma) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow N(0,1)$$

o sea,

$$P(X \leq a) = P(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma})$$

Ejemplo A.6 :*Sea la variable aleatoria continua* $X \hookrightarrow N(7,3)$. *Calcula* $P(X \leq 4)$

Solución :

Hacemos el cambio $Z = \dfrac{X-7}{3}$

$$P(X \leq 4) = P(Z \leq \frac{4-7}{3}) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Apéndice B

TABLA DE LA VARIABLE NORMAL

Distribución normal $\mathcal{N}(0,1)$ $\qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8246	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998