1 NÚMEROS REALES

El estudio de los números reales será el hilo conductor de la unidad, los alumnos van a repasar lo aprendido en cursos anteriores sobre este conjunto de números y sus propiedades y comprobarán su aplicación en la vida cotidiana.

Al inicio de esta unidad se presentan los números racionales así como los irracionales y se trabaja su representación, para llegar en el siguiente epígrafe a construir el conjunto de los números reales. A continuación, se analizan los diferentes tipos de intervalos y se introduce la definición de entorno, concepto que será utilizado más adelante en este curso al estudiar límites o derivadas.

Se trabajan las propiedades de los números reales así como sus operaciones, desde la suma y la multiplicación hasta la radicación pasando por las potencias, para finalizar con el estudio de los logaritmos. Finalmente, se estudian las aproximaciones y errores así como la notación científica.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** (**CMCT**) a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de los números reales, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital** (**CD**) se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL).** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender** (**CAA**) se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas** (**CSC**) se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, el manejo de todas las operaciones con números reales así como las aproximaciones y errores, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Conocer los números reales y sus propiedades.
- Operar correctamente con números reales.
- Realizar aproximaciones decimales y determinar los errores cometidos al aproximar.
- Manejar la notación científica.
- Trabajar con los logaritmos aplicando sus propiedades.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Números y expresiones decimales Los números racionales Los números irracionales	1. Utilizar los números reales para recoger, transformar e intercambiar información, representando los resultados en contextos de resolución de problemas.	1.1. Reconoce los distintos tipos de números reales y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.	CMCT CD CL CAA CSC
El conjunto de los números reales			
La recta real. Intervalos La recta real Intervalos		1.2. Resuelve problemas en los que intervienen números reales y su representación e interpretación en la recta real.	
Orden de números reales. Valor absoluto Orden de números reales Valor absoluto de los números reales	2. Utilizar las propiedades los números reales para recoger, transformar e intercambiar información, representando los resultados en contextos de resolución de problemas.	2.1. Utiliza las propiedades de los números reales para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 2.2. Conoce y aplica el concepto de valor absoluto para calcular distancias y maneja desigualdades.	CMCT CL CAA
Operaciones con números reales	3. Utilizar las operaciones con números reales para recoger, transformar e intercambiar información, representando los resultados en contextos de resolución de problemas.	3.1. Realiza operaciones numéricas con eficacia, empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o herramientas informáticas.	CMCT CD CL CAA
Potenciación de números reales			
Radicación de números reales Raíz de un número real y propiedades Expresión de un radical como una potencia de exponente fraccionario Reglas de cálculo con radicales			
Aproximaciones decimales y errores Aproximaciones Error absoluto Error relativo		3.2. Obtiene cotas de error y estimaciones en los cálculos aproximados realizados, valorando y justificando la necesidad de estrategias adecuadas para minimizarlas.	
Notación científica		3.3. Utiliza la notación numérica más adecuada a cada contexto y justifica su idoneidad.	
Logaritmos	4. Valorar las aplicaciones del número e y de los logaritmos utilizando sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.	4.1. Aplica correctamente las propiedades para calcular logaritmos sencillos en función de otros conocidos. 4.2. Resuelve problemas asociados a fenómenos físicos, biológicos o económicos mediante el uso de logaritmos y sus propiedades.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR | **PARA EL ALUMNO**

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Números y expresiones decimales
- Los números racionales
- Los números irracionales

GeoGebra. Representación de los números irracionales en la recta real

2. El conjunto de los números reales

3. La recta real. Intervalos
- La recta real
- Intervalos

4. Orden de números reales. Valor absoluto
- Orden de números reales
- Valor absoluto de los números reales

Actividades de refuerzo
Actividades de ampliación

5. Operaciones con números reales

6. Potenciación de números reales

7. Radicación de números reales
- Raíz de un número real y propiedades
- Expresión de un radical como una potencia de exponente fraccionario
- Reglas de cálculo con radicales

Vídeo. Cálculo de raíces con calculadora científica

Prueba de evaluación

8. Aproximaciones decimales y errores
- Aproximaciones
- Error absoluto
- Error relativo

9. Notación científica

Vídeo. Notación científica con la calculadora

10. Logaritmos

Vídeo. Logaritmos con calculadora científica

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

Actividades interactivas. Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 5)

1. Piensa y escribe dos números racionales y otros dos números irracionales. Clasifícalos.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Racionales:

$-4 \rightarrow$ Entero

$0,\widehat{15} \rightarrow$ Decimal periódico puro

Irracionales: π, $\sqrt{2}$

2. Escribe un número decimal exacto, uno decimal periódico puro y un decimal periódico mixto.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Decimal exacto: 32,47

Decimal periódico puro: $0,\widehat{23}$

Decimal periódico mixto: $0,34\widehat{57}$

3. Ordena de mayor a menor estos números decimales.

a) $0,26$ $\quad 0,2\widehat{6}$ $\quad 0,\widehat{26}$ $\quad 0,26\widehat{9}$

b) $-0,0\widehat{3}$ $\quad -0,035$ $\quad -0,03\widehat{2}$ $\quad -0,0\widehat{32}$

c) 1,57 $\quad$ 1,569 $\quad$ 1,56

a) $0,26\widehat{9} > 0,2\widehat{6} > 0,\widehat{26} > 0,26$

b) $-0,03\widehat{2} > -0,0\widehat{32} > -0,0\widehat{3} > -0,035$

c) $1,57 > 1,569 > 1,56$

4. Calcula el valor absoluto de $+5$ y de -5.

$|+5| = |-5| = 5$

5. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $(x + 4)^2$ ***b)*** $(3x - 8)^2$ ***c)*** $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

a) $x^2 + 8x + 16$ *b)* $9x^2 - 48x + 64$ *c)* $x^4 - 1$

6. Utiliza las identidades notables para expresar estos polinomios como producto de binomios.

a) $9x^2 - 1$ ***b)*** $4x^2 - 4x + 1$ ***c)*** $4x^2 - 16$

a) $(3x + 1)\,(3x - 1)$

b) $(2x - 1)^2$

c) $(2x - 4)\,(2x + 4)$

7. Calcula el producto de $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ por su conjugado.

$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 = 1$

8. Calcula el resultado de estas potencias.

a) 3^2 ***c)*** -3^3 ***e)*** -3^2

b) 3^3 ***d)*** $(-3)^2$ ***f)*** $(-3)^3$

a) 9 *c)* -27 *e)* -9

b) 27 *d)* 9 *f)* -27

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Representación de los números irracionales en la recta real (página 8)

En el archivo de GeoGebra puede verse la representación exacta de los primeros números irracionales sobre la recta real aplicando el teorema de Pitágoras. Pulsando sobre los botones del reproductor se muestra la construcción paso a paso. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir por los alumnos tanto para realizar la construcción en GeoGebra como para dibujarla con lápiz y papel.

Cálculo de raíces con la calculadora científica (página 19)

En el vídeo se muestra cómo usar la calculadora científica para hallar raíces con cualquier índice.

Notación científica con la calculadora (página 22)

En el vídeo se muestra cómo introducir los números expresados en notación científica en una calculadora científica, así como hacer algunas operaciones con ella.

Logaritmos con calculadora científica (página 24)

En el vídeo se muestra cómo usar la calculadora científica para hallar logaritmos decimales y neperianos. Tanto en este recurso como en los anteriores, aunque se utiliza la calculadora de un ordenador, el procedimiento es similar en muchos modelos ya sean digitales o manuales.

Actividades (páginas 8/24)

1 **¿Por qué $-5{,}02\widehat{27}$ no es un número irracional?**

El número $-5{,}02\widehat{27}$ es racional puesto que se puede escribir en forma fraccionaria. Su fracción generatriz es $\dfrac{-221}{44}$.

2 **Determina y razona cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales.**

$\dfrac{2}{7}$, $0{,}017$, $-3{,}412\,323\,23\ldots$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\dfrac{1}{81}}$, $4{,}121\,314\,151\,6\ldots$

Los números $\dfrac{2}{7}$, $0{,}017$, $-3{,}412\,323\,23\ldots$ y $\sqrt{\dfrac{1}{81}}$ son racionales.

Los números $\sqrt{3}$ y $4{,}121\,314\,151\,6\ldots$ son irracionales.

3 **Razona cuál de las siguientes frases es cierta.**

a) **Todo número decimal se puede expresar como una fracción.**

b) **Los números reales se pueden expresar como un número decimal exacto o periódico.**

c) **Todo número racional es real.**

d) **Todo número entero es racional.**

e) **Hay números reales que no pueden expresarse como una fracción.**

f) **Entre dos números racionales hay infinitos irracionales.**

g) **Los números irracionales no se pueden expresar en forma decimal.**

Las frases de los apartados ***c), d), e)*** y ***f)*** son ciertas.

4 **Determina una sucesión que se aproxime por defecto al número irracional $\sqrt{5}$.**

2; 2,2; 2,23; 2,236; 2,236 0; 2,236 06; 2,236 067; 2,236 067 9; 2,236 067 97; 2,236 067 977; 2,236 067 977 4; …

5 **Escribe una sucesión que se aproxime a $-\dfrac{4}{7}$ por exceso.**

−0,5; −0,57; −0,571; −0,571 4; −0,571 42; −0,571 428; −0,571 428 5; −0,571 428 57; −0,571 428 571; −0,571 428 571 4; −0,571 428 571 42; …

6 **Aproxima por defecto el número e mediante una expresión con cuatro cifras decimales.**

Una aproximación es: 2,718 2

7 **Escribe dos números, uno racional y otro irracional, comprendidos entre los siguientes pares de números.**

a) **5,1497 y 5,1498**

b) **−0,0091 y −0,009**

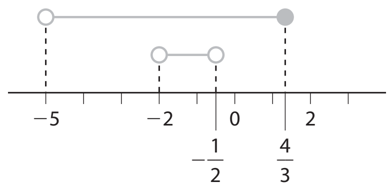
a) 5,149 73 (racional)

$$5{,}1497 + \frac{\sqrt{2}}{10^5} = 5{,}149\,714\,142\,135\,623\ldots \text{ (irracional)}$$

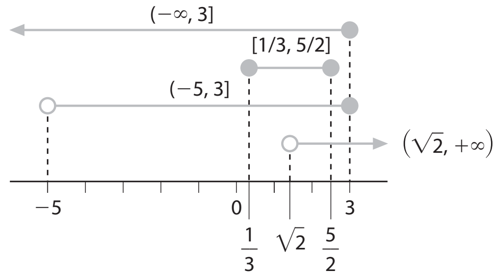
b) −0,009 05 (racional)

$$-0{,}009 - \frac{\pi}{10^5} = -0{,}009\,031\,415\,926\,535\ldots \text{ (irracional)}$$

8 **Representa en la recta real los intervalos $\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-5, \dfrac{4}{3}\right]$.**



9 **Representa gráficamente los números reales que verifican $-5 < x \leq 3$, $x > \sqrt{2}$, $1/3 \leq x \leq 5/2$ y $x \leq 3$. Escribe, en cada caso, de qué intervalo se trata.**



Se trata de los intervalos $(-5, 3]$, $(\sqrt{2}, +\infty)$, $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{2}\right]$ y $(-\infty, 3]$, respectivamente.

10 **Si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $1/a$ y $1/b$?**

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

11 **Si $a < 0$ y $b > 0$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $1/a$ y $1/b$?**

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

12 **Si $2a - 1 > 0$ y $-3a > 4$, determina el intervalo al que pertenece *a*.**

No hay ningún número real que cumpla al mismo tiempo las dos desigualdades.

13 **Si *x, y, z* son positivos, y $x \cdot (y + z) > y \cdot (x + z)$, ¿qué relación de orden existe entre *x* e *y*?**

$x(y + z) > y(x + z) \Rightarrow xy + xz > yx + yz \Rightarrow xz > yz \Rightarrow x > y$

14 **La diferencia de edad entre una madre y su hija es de 28 años. ¿Cuándo superará la edad de la hija la mitad de la de su madre más 10 años?**

$$m = h + 28$$

$$h > \frac{m}{2} + 10 \Rightarrow 2h > m + 20 \Rightarrow 2h > 48 + h \Rightarrow h > 48$$

La edad de la hija debe ser más de 48 años.

15 **Escribe dos números racionales y dos irracionales que sean, en valor absoluto, menores que 0,1.**

Por ejemplo, 0,01, $-0{,}01$, $\frac{\pi}{40}$ y $0{,}1 - \frac{\sqrt{2}}{100}$

16 **Si sabemos que $|x - 1| < 5$, ¿a qué intervalo pertenece *x*?**

$$|x - 1| < 5 \Rightarrow -5 < x - 1 < 5 \Rightarrow -4 < x < 6$$

Pertenece al intervalo $(-4, 6)$.

17 **Si $|x| \le \sqrt{2}$, determina la amplitud del intervalo en el que está *x*.**

La amplitud del intervalo es: $2\sqrt{2}$

18 **Determina el conjunto de números reales que cumplen que $|x| > 4$.**

$$|x| > 4 \Rightarrow x < -4 \text{ o } x > 4 \Rightarrow \mathbb{R} - [-4, 4]$$

19 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\big|\,|(2/3) - 1| - |(1/2) - (7/6)|\,\big|$

b) $|2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} + 1|$

a) $\left|\left|\frac{2}{3} - 1\right| - \left|\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\right|\right| = \left|\left|-\frac{1}{3}\right| - \left|-\frac{4}{6}\right|\right| =$

$= \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} + 1| = |\sqrt{5} - 2| - |\sqrt{5} + 1| =$

$= \sqrt{5} - 2 - (\sqrt{5} + 1) = -3$

20 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $3^2 + 3^{-2}$

b) $2^{-3} \cdot 2^5$

c) $2^3/2^{-6}$

d) $3 \cdot (6/5)^{-2}$

e) $2^{-1} \cdot (2/3)^2 \cdot (1/6)^{-2} - 2^{-3}$

f) $5^{-2} \cdot (1/5)^{-4}$

a) $3^2 + 3^{-2} = 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$

b) $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^2 = 4$

c) $\frac{2^3}{2^{-6}} = 2^9 = 512$

d) $3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = 3 \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{12}$

e) $2^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - 2^{-3} = 2^3 - \frac{1}{2^3} = \frac{63}{8}$

f) $5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^2 = 25$

21 **Expresa los siguientes números como potencias de exponente negativo.**

a) $1/4^7$

b) $(3/5)^6$

c) $1/125$

d) $729/64$

a) 2^{-14} *b)* $(5/3)^{-6}$ *c)* 5^{-3} *d)* $(2/3)^{-6}$

22 **Escribe en forma de potencias de base 10 las siguientes expresiones.**

a) 1/10 000

b) 0,000 001

c) 1/0,001

d) 10 000 000

a) 10^{-4} *b)* 10^{-6} *c)* 10^3 *d)* 10^7

23 **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $\frac{6^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{14^{-3} \cdot 3^2 \cdot 10^7}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

c) $\frac{21^5 \cdot 5^{-7} \cdot 15^2 \cdot 3^4}{2^{-8} \cdot 36^2}$

a) $\frac{6^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{14^{-3} \cdot 3^2 \cdot 10^7} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{2^{-3} \cdot 7^{-3} \cdot 3^2 \cdot 2^7 \cdot 5^7} = \frac{1}{5^7} = 5^{-7}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = 3^2 \cdot \frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{3^5}{2^5} = 2 \cdot 3^4$

c) $\frac{21^5 \cdot 5^{-7} \cdot 15^2 \cdot 3^4}{2^{-8} \cdot 36^2} = \frac{3^5 \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^8}{5^7 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \frac{2^4 \cdot 3^7 \cdot 7^5}{5^5}$

24 **Di si son ciertas estas igualdades. Cuando no lo sean, escribe la igualdad correcta.**

a) $\frac{2^{-4}}{3^{-7}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} = 2^{18}$

c) $\left(\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{6^{-1}}\right) = 2$

a) Falsa: $\frac{3^7}{2^4}$ *b)* Cierta *c)* Cierta

25 **Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1$

b) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-1}$

d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-2} \cdot \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^2$

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-1} = \left(\frac{9}{4} - 1\right)^{-1} = \frac{4}{5}$

d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-2} \cdot \left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 =$

$= \left(\frac{9}{4} - 1\right)^{-2} \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{25} \cdot \frac{25}{81} = \frac{16}{81}$

26 **Escribe tres radicales equivalentes a estos otros:**

$$\sqrt[5]{2^2},\ \sqrt{14},\ \sqrt[3]{(-3)} \text{ y } \sqrt[4]{2^3}$$

$$\sqrt[5]{2^2} = \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[15]{2^6} = \sqrt[20]{2^8};\ \sqrt{14} = \sqrt[4]{14^2} = \sqrt[6]{14^3} = \sqrt[8]{14^4}$$

$$\sqrt[3]{(-3)} = -\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[9]{(-3)^3} = -\sqrt[12]{3^4};\ \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[16]{2^{12}}$$

27 **¿Por qué son falsas las siguientes igualdades?**

a) $\sqrt{-2} = \sqrt[8]{(-2)^4} = \sqrt[8]{16}$

b) $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[12]{(-2)^4} = \sqrt[12]{16}$

a) $\sqrt{-2}$ no existe. *b)* $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[12]{2^4} = -\sqrt[12]{16}$

28 **Escribe un radical equivalente a cada uno de los siguientes radicales con el índice común.**

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{3^2},\ \sqrt[4]{3^3}$$

$\sqrt[12]{3^6}, \sqrt[12]{3^8}, \sqrt[12]{3^9}$

29 **Simplifica los radicales $\sqrt[4]{5^2}$, $\sqrt[14]{7^7}$, $\sqrt[8]{3^6}$ y $\sqrt[12]{2^{16}}$.**

$$\sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt[4]{3^3},\ \sqrt[3]{2^4}$$

30 **Escribe estas expresiones en forma de potencias de exponente fraccionario.**

a) $\sqrt[3]{a^7}$ *d)* $\sqrt[12]{5^9}$ *g)* $\dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[3]{2^{-2}}}$

b) $\sqrt{2^5}$ *e)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$ *h)* $\sqrt{3^{-1}}\cdot\sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[4]{3^{-3}}$ *f)* $a^3\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}$ *i)* $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}$

a) $a^{7/3}$ *d)* $5^{3/4}$ *g)* $2^{19/15}$

b) $2^{5/2}$ *e)* $2^{-4/3}$ *h)* $3^{1/6}$

c) $3^{-3/4}$ *f)* $a^{7/3}$ *i)* $5^{15/16}$

31 **Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado como un único radical lo más simplificado posible.**

a) $\sqrt[3]{125^5}\cdot\sqrt[7]{-\dfrac{1}{5^6}}$ *d)* $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{(-a)}$

b) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ *e)* $\dfrac{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[6]{6}}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{40}$ *f)* $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}}$

a) $\sqrt[3]{125^5}\cdot\sqrt[7]{-\dfrac{1}{5^6}} = -5^5\cdot 5^{-6/7} = -5^{29/7} = -5^4\cdot\sqrt[7]{5}$

b) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = 3\cdot\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2} = 3\cdot\sqrt[6]{72}$

c) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{40} = \sqrt{3^3\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3\cdot 5} = 90\cdot\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{(-a)} = -a^{2/3}\cdot a^{3/4}\cdot b^{-3/4}\cdot a^{1/3} =$

$= -a^{7/4}\cdot b^{-3/4} = -\sqrt[4]{\dfrac{a^7}{b^3}} = -a\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^3}}$

e) $\dfrac{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[6]{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3^{3/4}\cdot 2^{1/6}\cdot 3^{1/6}}{3^{1/2}} = 3^{5/12}\cdot 2^{1/6} = \sqrt[12]{3^5\cdot 2^2}$

f) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}} = \dfrac{a^{1/2}\cdot a^{1/6}\cdot a^{3/4}}{a^{5/12}} = \dfrac{a^{17/12}}{a^{5/12}} = a^{12/12} = a$

32 **Simplifica las siguientes operaciones extrayendo factores fuera del radical.**

a) $\dfrac{\sqrt{6\,048x^7y^3}}{\sqrt[3]{7\,938xy^4}}$ *b)* $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4\cdot\left(a^2\cdot\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6\,048x^7y^3}}{\sqrt[3]{7\,938xy^4}} = \dfrac{2^2\cdot 3\cdot x^3y\sqrt{2\cdot 3\cdot 7xy}}{3y\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 7^2xy}} =$

$= 2^2\cdot x^3\cdot\sqrt[6]{\dfrac{x^3y^3 2^3\cdot 3^3\cdot 7^3}{2^2\cdot 3^2\cdot 7^4x^2y^2}} = 2^2\cdot x^3\cdot\sqrt[6]{\dfrac{6xy}{7}}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4\cdot(a^2\cdot\sqrt{a})^3}{\sqrt[6]{a^5}} = \dfrac{a^{8/3}\cdot a^6\cdot a^{3/2}}{a^{5/6}} = \dfrac{a^{61/6}}{a^{5/6}} = a^{56/6} =$

$= a^9\cdot a^{2/6} = a^9\cdot\sqrt[3]{a}$

33 **Efectúa las siguientes operaciones simplificando al máximo.**

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}$

b) $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\dfrac{2}{25}}$

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72} = \sqrt{2}+\sqrt{2}-42\sqrt{2} = -40\sqrt{2}$

b) $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\dfrac{2}{25}} =$

$= 5\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{5}\sqrt{2} = \dfrac{13}{2}\sqrt{3}-\dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

34 **Simplifica las expresiones.**

a) $\sqrt{512}+\sqrt{648}-\sqrt{\dfrac{128}{81}}$

b) $\sqrt[6]{6\,561a^2}+\sqrt[3]{3\,993a}-\sqrt[3]{3a^4}$

a) $\sqrt{512}+\sqrt{648}-\sqrt{\dfrac{128}{81}} = \sqrt{2^9}+\sqrt{2^3\cdot 3^4}-\sqrt{\dfrac{2^7}{3^4}} =$

$= 16\sqrt{2}+18\sqrt{2}-\dfrac{8}{9}\sqrt{2} = \dfrac{298}{9}\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{6\,561a^2}+\sqrt[3]{3\,993a}-\sqrt[3]{3a^4} = \sqrt[3]{3^4\cdot a}+\sqrt[3]{11^3\cdot 3\cdot a}\,-$

$-\sqrt[3]{3a^4} = 3\sqrt[3]{3a}+11\sqrt[3]{3a}-a\sqrt[3]{3a} = \sqrt[3]{3a}\,(14-a)$

35 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ *b)* $2\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

a) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = 4\cdot 3+4\sqrt{15}+5 = 17+4\sqrt{15}$

b) $2\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{6}\left(4\cdot 5-4\sqrt{10}+2\right) =$

$= 2\sqrt{6}\left(22-4\sqrt{10}\right) = 44\sqrt{6}-8\sqrt{60} = 44\sqrt{6}-16\sqrt{15}$

36 **Efectúa estos cálculos.**

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot\sqrt{3}$

b) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+3\right)$

c) $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2-1\right]\cdot\sqrt{2}$

d) $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot\sqrt{3} = \left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

b) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+3\right) = 2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-3-3\sqrt{3}$

c) $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2-1\right]\cdot\sqrt{2} = \left(3-2\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-4$

d) $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}-1+2-\sqrt{2} = 1$

37 **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ *c)* $\dfrac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}$ *d)* $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}-1} =$

$= \dfrac{2\sqrt{5}-1-10+\sqrt{5}}{19} = \dfrac{-11+3\sqrt{5}}{19}$

c) $\dfrac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}} = \dfrac{7\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2^2}}{6} = \dfrac{7\,\sqrt[6]{432}}{6}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}} = \dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{12}} = \dfrac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{12^3}}{12} =$

$= \dfrac{\sqrt[4]{2^6\cdot 3^5}}{12} = \dfrac{6\,\sqrt[4]{12}}{12} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$

38 **Establece, en cada caso, una aproximación con 4 cifras exactas.**

a) $\sqrt{23}$ *b)* $\sqrt[6]{3}$ *c)* $-4,\widehat{57}$

a) 4,796 *b)* 1,201 *c)* −4,576

39 **Haciendo uso de la calculadora, redondea el resultado de los siguientes cálculos con un error menor que una milésima.**

a) $\sqrt{10}\cdot\pi$ *b)* $\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}$ *c)* $\sqrt[5]{7}\cdot 7{,}02$

a) 9,935 *b)* 1,386 *c)* 10,360

40 **Determina entre qué valores están comprendidos cada uno de los siguientes números aproximados. Escribe la aproximación y su incertidumbre en cada uno de los casos.**

a) **$-7{,}06$**

b) **0,003**

c) **$-50\,000$**

a) $(-7{,}065, -7{,}055)$, $-7{,}06 \pm 0{,}005$

b) $(0{,}002\,5, 0{,}003\,5)$, $0{,}003 \pm 0{,}000\,5$

c) $(-55\,000, -45\,000)$, $-50\,000 \pm 5\,000$

41 **Utilizando la calculadora, averigua qué error relativo se comete en las siguientes aproximaciones de π:**

a) **3,14** ***b)*** **267/85** ***c)*** **3 927/1 250**

a) $\dfrac{|\pi - 3{,}14|}{\pi} \cdot 100 = 0{,}05\ \%$

b) $\dfrac{|\pi - (267/85)|}{\pi} \cdot 100 = 0{,}01\ \%$

c) $\dfrac{|\pi - (3\,927/1\,250)|}{\pi} \cdot 100 = 0{,}000\,2\ \%$

42 **Realiza las siguientes operaciones expresadas en notación científica.**

a) **$2 \cdot 10^7 \cdot 3{,}5 \cdot 10^4 \cdot 1{,}25 \cdot 10^5$**

b) **$1{,}03 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-8} - 10^{-5}$**

c) **$(4{,}7 \cdot 10^{-4})^2$**

a) $8{,}75 \cdot 10^{16}$ *b)* $-8{,}92 \cdot 10^{-6}$ *c)* $2{,}209 \cdot 10^{-7}$

43 **Expresa $3{,}7 \cdot 10^9$ años luz en km (velocidad de la luz: $c = 2{,}997\,9 \cdot 10^8$ m · s^{-1}).**

$3{,}498 \cdot 10^{22}$ km

44 **Sabiendo que 18 g de agua contienen $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas, expresa en notación científica la masa de una molécula de agua.**

$$\frac{18 \text{ g}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ molec } H_2O} = 2{,}99 \cdot 10^{-23} \text{ g/molec } H_2O$$

45 **Expresa en notación científica y con tres cifras exactas.**

a) **299 792,4562 km/s** ***c)*** **33 075 894,32 m**

b) **0,003450 g** ***d)*** **$0{,}003468 \cdot 10^{-3}$ cm**

a) $3{,}00 \cdot 10^5$ km/s *c)* $3{,}31 \cdot 10^7$ m

b) $3{,}45 \cdot 10^{-3}$ g *d)* $3{,}47 \cdot 10^{-6}$ cm

46 **Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.**

a) **$4{,}872 \cdot 10^4 + 1{,}74 \cdot 10^5 - 9{,}54 \cdot 10^6$**

b) **$3{,}76 \cdot 10^{-12} - 8{,}53 \cdot 10^{-13} + 4{,}98 \cdot 10^{-14}$**

a) $-9{,}317\,28 \cdot 10^6$ *b)* $2{,}956\,8 \cdot 10^{-12}$

47 **Calcula los siguientes logaritmos.**

a) **$\log_{1/3} \sqrt{3}$** ***c)*** **$\log_{\sqrt{3}} 729$**

b) **$\log_2 0{,}0625$** ***d)*** **$\log_{1/5} \sqrt[3]{78\,125}$**

a) $(1/3)^x = 3^{1/2} \Rightarrow x = -1/2$

b) $2^x = 625/10\,000 \Rightarrow 2^x = (1/2)^4 \Rightarrow x = -4$

c) $3^{x/2} = 729 \Rightarrow 3^{x/2} = 3^6 \Rightarrow x = 12$

d) $(1/5)^x = 5^{7/3} \Rightarrow x = -7/3$

48 **Calcula *x* en estos logaritmos.**

a) **$\log_x 1\,024 = 5$** ***c)*** **$\log_{2/5} x = -1$**

b) **$\log_x \left(\dfrac{1}{2\,187}\right) = 7$** ***d)*** **$\log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{2}{3}$**

a) $x^5 = 2^{10} \Rightarrow x = 4$ *c)* $5/2 = x$

b) $x^7 = 3^{-7} \Rightarrow x = 1/3$ *d)* $2^{1/3} = x$

49 **Ordena de menor a mayor las siguientes expresiones.**

$\log_4 2,\ \log_2 (1/2),\ \log_4 (1/8),\ \log_2 2,\ \log_3 9,\ \log_{1/4} 2,\ \log_{1/9} 1,\ \log_{1/4} (1/8),\ \log_{1/2} 8$

$\log_{1/2} 8 < \log_4 (1/8) < \log_2 (1/2) < \log_{1/4} 2 < \log_{1/9} 1 < \log_4 2 <$
$< \log_2 2 < \log_{1/4} (1/8) < \log_3 9$

50 **Expresa como un solo logaritmo.**

$3 \ln a - (1/2) \ln b + 5 (\ln a - (1/2) \ln b)$

$3\ln a - (1/2)\ln b + 5(\ln a - (1/2) \ln b) =$
$= \ln a^3 - \ln \sqrt{b} + 5(\ln a - \ln \sqrt{b}) =$
$= \ln a^3 + \ln a^5 - 6\ln \sqrt{b} = \ln a^8 - \ln b^3 = \ln \left(\dfrac{a^8}{b^3}\right)$

51 **Calcula:**

a) **$\log_{1/2} 0{,}006$** ***b)*** **$\log_{0,3} \sqrt[5]{52}$**

a) 7,38 aprox. *b)* $-0{,}66$ aprox.

Ejercicios y problemas (páginas 28/32)

Numeros racionales e irracionales

1 **Sin realizar la división, di qué fracciones dan lugar a decimales exactos y cuáles a decimales periódicos puros o mixtos.**

$$\frac{7}{99},\ \frac{6}{15},\ -\frac{3}{14},\ \frac{2}{9},\ \frac{15}{17},\ -\frac{11}{8},\ \frac{21}{30},\ \frac{23}{990},\ -\frac{81}{90},\ -\frac{68}{85}$$

Exactos: 6/15, $-11/8$, 21/30, $-81/90$, $-68/85$

Periódicos: 7/99, $-3/14$, 2/9, 15/17, 23/990

2 **Halla la fracción generatriz irreducible de estos números decimales:**

$0{,}0\widehat{32},\ -7{,}\widehat{39},\ 31{,}0\widehat{9},\ 2{,}\widehat{312},\ -5{,}355$

$0{,}0\widehat{32} = 16/495$; $-7{,}\widehat{39} = -244/33$; $31{,}0\widehat{9} = 311/10$;
$2{,}\widehat{312} = 770/333$; $-5{,}355 = -1\,071/200$

3 **Ordena de menor a mayor.**

$0{,}40;\ 0{,}45;\ 7/16;\ 1/2;\ 0{,}\widehat{428\,571};\ 5/12;\ 0{,}\widehat{407};\ 13/32$

Los decimales correspondientes son:

$0{,}40;\ 0{,}45;\ 0{,}437\,5;\ 0{,}5;\ 0{,}\widehat{428\,571};\ 0{,}41\widehat{6};$

$0{,}\widehat{407};\ 0{,}406\,25$. Por tanto:

$0{,}40 < 13/32 < 0{,}\widehat{407} < 5/12 < 0{,}\widehat{428\,571} < 7/16 <$

$< 0{,}45 < 1/2$

4 **Realiza estas operaciones y expresa el resultado en forma decimal.**

a) **$2{,}\widehat{18} \cdot 0{,}\widehat{4}$** ***c)*** **$3 \cdot 0{,}2\widehat{7}/0{,}\widehat{24}$**

b) **$0{,}\widehat{21} \cdot 2/7$** ***d)*** **$5 \cdot 2{,}\widehat{9}/3$**

a) $0{,}\widehat{96}$ *c)* 3,437 5

b) $0{,}\widehat{06}$ *d)* 5

5 **Calcula las siguientes raíces.**

a) **$\sqrt{0{,}\widehat{4}}$** ***b)*** **$\sqrt{0{,}18\widehat{7}}$** ***c)*** **$\sqrt{1/0{,}00\widehat{1}}$**

a) $0{,}\widehat{6}$ *b)* $0{,}4\widehat{3}$ *c)* 30

6 **Clasifica en racionales e irracionales cada uno de los siguientes números reales.**

a) **11,003 003 003 003…** ***e)*** **$\sqrt[5]{-32}$**

b) **$-2{,}797\,140\,797\,140\ldots$** ***f)*** **$3\sqrt{2{,}\widehat{7}}$**

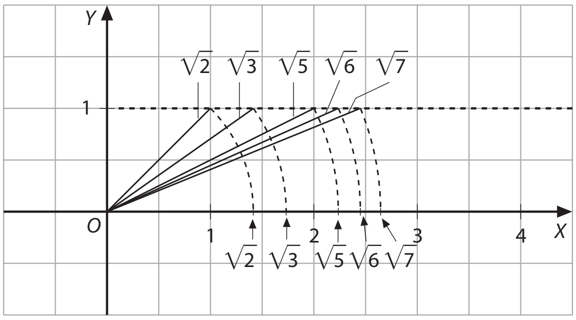
c) **$\sqrt{4{,}9}$** ***g)*** **$\sqrt{1{,}21/25}$**

d) **$\sqrt[3]{0{,}00\widehat{1}}$** ***h)*** **$\pi^2$**

Racionales: ***a), b), e), f)*** y ***g).*** Irracionales: ***c), d)*** y ***h).***

7 **Representa sobre la recta real $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$. ¿Cómo se representarían $\sqrt{29}$, $\sqrt{50}$ y $\sqrt{148}$?**

$$\sqrt{29}=\sqrt{5^2+2^2},\ \sqrt{50}=\sqrt{7^2+1^2},\ \sqrt{148}=\sqrt{12^2+2^2}$$



8 **Escribe tres números irracionales entre 12 y 13.**

$$9\sqrt{2},\ \frac{9\sqrt{2}+12}{2},\ \frac{9\sqrt{2}+13}{2}$$

9 **Escribe un número racional y otro irracional que pertenezcan al intervalo (−4; −3,98).**

Ejemplos de racionales: $-3{,}99$, $-3{,}9\widehat{8}$, $-3{,}995$

Ejemplos de irracionales: $-3{,}98-(\sqrt{2}/100)$,

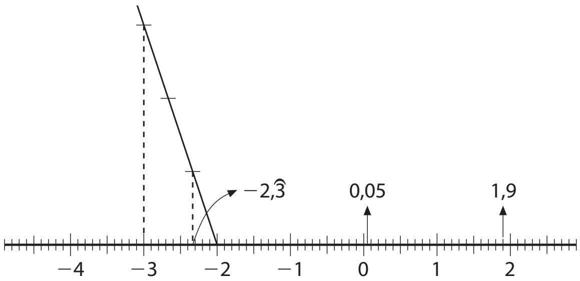
$-3{,}98-(\pi/300)$, $-4+(\sqrt{3}/200)$

10 **Ordena de menor a mayor -4; $-3{,}9\widehat{8}$; $-3{,}\widehat{98}$; $5{,}1\widehat{7}$; $5{,}\widehat{17}$; $5{,}170\widehat{9}$; $5{,}171$; π; $3{,}1416$; $3{,}141593$; $3{,}1415926$.**

$-4<-3{,}\widehat{98}<-3{,}9\widehat{8}<3{,}141\,592\,6<\pi<3{,}141\,593<$
$<3{,}141\,6<5{,}170\,\widehat{9}<5{,}171<5{,}\widehat{17}<5{,}1\widehat{7}$

11 **Representa sobre la recta real los siguientes números: $-2{,}\widehat{3}$; $0{,}05$; $1{,}9$.**

$-2{,}\widehat{3}=-7/3=-2-(1/3)$



12 **Escribe un número decimal que sea 3 milésimas menor que:**

a) **−0,097**

b) **1,567 57**

c) **47,76**

d) **$-\pi$**

a) −0,1 *c)* 47,757

b) 1,564 57 *d)* −3,144 592 65…

13 **Indica la relación de orden que existe entre los siguientes pares de números.**

a) **$1{,}209$ y $1{,}20\widehat{9}$**

b) **$1/1{,}209$ y $1/1{,}20\widehat{9}$**

c) **$-1/1{,}209$ y $-1/1{,}20\widehat{9}$**

d) **$-2\cdot 1{,}209$ y $-2\cdot 1{,}20\widehat{9}$**

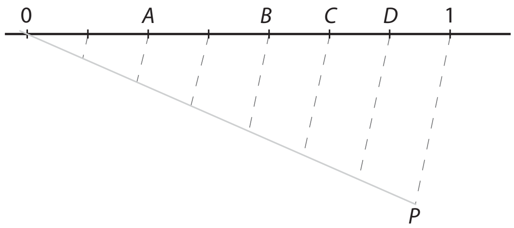
a) $1{,}209<1{,}20\widehat{9}$

b) $1/1{,}209>1/1{,}20\widehat{9}$

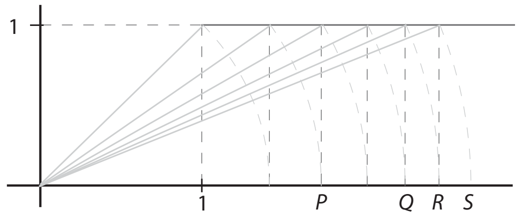
c) $-1/1{,}209<-1/1{,}20\widehat{9}$

d) $-2\cdot 1{,}209>-2\cdot 1{,}20\widehat{9}$

14 ***a)*** **Sabiendo que los segmentos en que se divide *OP* son de la misma longitud, indica qué números racionales representan los puntos *A, B, C* y *D* de la siguiente figura.**



b) **Determina qué números irracionales representan los puntos *P, Q, R* y *S* de la figura.**



a) $A=\frac{2}{7}$, $B=\frac{4}{7}$, $C=\frac{5}{7}$, $D=\frac{6}{7}$

b) $P=\sqrt{3}$, $Q=\sqrt{5}$, $R=\sqrt{6}$, $S=\sqrt{7}$

Intervalos y valor absoluto

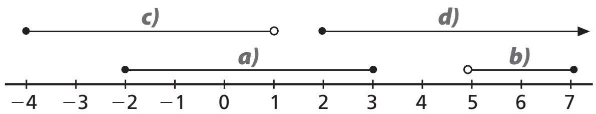
15 **Representa sobre la recta los siguientes intervalos.**

a) **[−2, 3]**

b) **(5, 7]**

c) **[−4, 1)**

d) **[2, +∞)**



16 **Dado el intervalo $(-3{,}7;\ -\pi)$ de la recta real, indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a él:**

−3,72 −3,46 $-11\pi/10$ −3,14

$I=(-3{,}7, -\pi)$, $-3{,}72\notin I$, $-3{,}46\in I$, $-11\pi/10\in I$, $-3{,}14\notin I$

17 **Determina a qué intervalo pertenecen los números reales que cumplen las siguientes condiciones.**

a) **$-4/3<x\le 10$** ***d)*** **$x\le -9/5$**

b) **$1/5\le x\le 0{,}25$** ***e)*** **$x>21/4$**

c) **$x>7$ y $x\le 9$** ***f)*** **$x<13$ y $x\le 14$**

a) $x\in(-4/3, 10]$ *d)* $x\in(-\infty, -9/5]$

b) $x\in[1/5; 0{,}25]$ *e)* $x\in(21/4, +\infty)$

c) $x\in(7, 9]$ *f)* $x\in(-\infty, 13)$

18 **¿A qué intervalo pertenece *x*?**

a) **$0<\frac{x}{4}+1\le 7$**

b) **$-2\le -x+3<4$**

a) $x\in(-4, 24]$ *b)* $x\in(-1, 5]$

19 **Si $|-x+3|\le 7$, ¿a qué intervalo pertenece *x*?**

$x\in[-4, 10]$

20 **¿Qué conjunto de números reales, *x*, cumplen la desigualdad $|2x-1|>2$?**

El conjunto unión: $(-\infty, -1/2)\cup(3/2, +\infty)=$
$=\mathbb{R}-[-1/2, 3/2]$

21 **Calcula las siguientes expresiones.**

a) $\left|2\cdot|-3|+|-5+6|\,|-|-|7-9|\cdot(-1)|\right|$

b) $\left|(3/5)\cdot(1/3-4)\cdot|1-(5/2)|\right|$

c) $\left|(\sqrt{5}/3)-1\right|-\left|3-2\sqrt{5}\right|$

a) 5 *b)* $33/10$ *c)* $4-7\sqrt{5}/3$

22 **Calcula la amplitud de estos intervalos en la recta real.**

a) $(x-3,\ x+3)$

b) $\left(\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}\right)$

c) $\left(-\sqrt{3}/2,\ 7\sqrt{3}/5\right)$

d) $(8/3,\ 13)$

a) 6 *b)* $4\sqrt{2}$ *c)* $19\sqrt{3}/10$ *d)* $31/3$

Potencias y radicales

23 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\dfrac{2^3\cdot 5^{-7}\cdot 7^3}{(-2)^{-4}\cdot 5^7\cdot 7^3}$

b) $\dfrac{a^{-4}\cdot(6^2)^{-1}\cdot b^2}{2^3\cdot 3^2\cdot a^6\cdot b^{-7}}$

c) $\dfrac{(a\cdot b)^2\cdot(a^{-3}\cdot b^3)^3}{(a\cdot b^2\cdot c^3)^{-5}}$

d) $\dfrac{(4\cdot 3^2\cdot 6^{-2})^2\cdot(2^3\cdot 3^4)^{-1}}{(2^6\cdot 3^7)^{-3}\cdot(6^4)^3}$

a) $\dfrac{2^7}{5^{14}}$ *b)* $\dfrac{b^9}{a^{10}\,2^5\,3^4}$ *c)* $\dfrac{b^{21}\,c^{15}}{a^2}$ *d)* $2^3\cdot 3^5$

24 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\left(\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\right)^2$

b) $\left(-2-\left(\dfrac{-1}{4}\right)^{-3}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{3}{8}-(-2)^{-3}\right)^3$

a) $49/2\,025$ *b)* $1/3\,844$ *c)* $1/8$

25 **Introduce factores dentro del radical.**

a) $2\sqrt{\dfrac{7}{8}}$

b) $\dfrac{2^3\cdot 5}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3^2\cdot 7\cdot 5}{2^2}}$

c) $(x-3)^2\sqrt[3]{(x-3)^2(x+3)}$

a) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ *b)* $\sqrt[3]{2^7\cdot 5^4\cdot\dfrac{7}{3}}$ *c)* $\sqrt[3]{(x-3)^8(x+3)}$

26 **Extrae factores del radical.**

a) $\sqrt{2^3\cdot 8^{-2}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{3^4\cdot 12^{-1}\cdot 7^3}{2^2}}$

c) $\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{11}\right)\cdot\left(\dfrac{6}{25}+\dfrac{3}{4}\right)}$

d) $\sqrt{24a^5b^6-32a^9b^4}$

e) $\sqrt[3]{8m^4n^6p^8}$

f) $\sqrt[6]{1\,024}$

g) $\sqrt[5]{2\,187x^9y^{12}}$

h) $\sqrt{4^2\cdot 3^2\cdot 12^2x^5y^7}$

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2^3}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

b) $\dfrac{21}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

c) $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$

d) $2a^2b^2\sqrt{2a(3b^2-4a^4)}$

e) $2mn^2p^2\sqrt[3]{mp^2}$

f) $2\sqrt[3]{2^2}$

g) $3xy^2\sqrt[5]{3^2x^4y^2}$

h) $144x^2y^3\sqrt{xy}$

27 **Expresa las siguientes potencias como raíces.**

a) $2^{3/4}$ ***b)*** $12^{5/7}$ ***c)*** $3^{-1/4}$

a) $\sqrt[4]{8}$ *b)* $\sqrt[7]{12^5}$ *c)* $\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$

28 **Expresa estas raíces en forma de potencias.**

a) $\sqrt[5]{3^2}$ ***b)*** $\sqrt[3]{10^2}$ ***c)*** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

a) $3^{2/5}$ *b)* $10^{2/3}$ *c)* $3\cdot 7^{-1/3}$

29 **Expresa en forma de potencias de exponente fraccionario.**

a) $\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3^5}{2^3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^{-5}}}\cdot\sqrt[3]{2^4\cdot 3^{-2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^3}}}$

a) $2^{-1/12}\cdot 3^{5/4}$ *b)* $2^{4/3}\cdot 3^{11/6}$ *c)* $2^{9/8}$

30 **Realiza los siguientes cálculos.**

a) $\sqrt[3]{0{,}04}\cdot\sqrt{0{,}2}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}}$

c) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[8]{81}$

d) $\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[3]{2}$

a) $\dfrac{1}{5\sqrt[6]{5}}$ *b)* $2\sqrt[6]{\dfrac{2^2}{3^3}}$ *c)* $2\sqrt{3}$ *d)* $\sqrt[15]{4000}$

31 **Realiza estos cálculos simplificando al máximo.**

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

a) $\sqrt[6]{432}$ *b)* $7\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *c)* $\sqrt[6]{5}$ *d)* $\sqrt[3]{2^2}$

32 **Efectúa el cálculo y expresa el resultado como un radical.**

$$\frac{3^{-3/4}\cdot 9^{3/2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{-3}\cdot\sqrt{81}}$$

$3^{7/4}=3\sqrt[4]{3^3}$

33 **Calcula las siguientes expresiones con radicales.**

a) $\sqrt{10}+2\sqrt{10}-\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $3\sqrt{12}-2\sqrt{75}+7\sqrt{3}$

c) $\sqrt{243}-5\sqrt{3}+2\sqrt{27}$

d) $3\sqrt{8}-5\sqrt{72}+\sqrt{50}+4\sqrt{18}$

e) $\sqrt{32}-5\sqrt{18}+\sqrt{3}$

f) $3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-4\sqrt{18}$

g) $5\sqrt{27}+3\sqrt{12}-4\sqrt{75}$

h) $\sqrt{512}+\sqrt{648}+\sqrt{\dfrac{128}{81}}$

i) $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\dfrac{2}{25}}$

a) $\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$ *b)* $3\sqrt{3}$ *c)* $10\sqrt{3}$ *d)* $-7\sqrt{2}$ *e)* $\sqrt{3}-11\sqrt{2}$

f) $4\sqrt{2}$ *g)* $\sqrt{3}$ *h)* $\dfrac{314}{9}\sqrt{2}$ *i)* $\dfrac{13}{2}\sqrt{3}-\dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

34 **Calcula cada una de estas expresiones con radicales.**

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$

b) $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{48}$

c) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2-3\sqrt{56}$

d) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)^2$

a) $8+4\sqrt{3}$ *b)* $16(1-\sqrt{3})$ *c)* $25-12\sqrt{14}$ *d)* 16

35 **Efectúa, simplificando al máximo.**

a) $2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{20}-8\sqrt{45}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

b) $-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}$

a) -218

b) $10\sqrt[3]{2}$

36 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt{(x+1)^3}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{(x+1)^7}}$

b) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2+6\sqrt{14}$

c) $\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\cdot\left(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}\right)$

d) $\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{9}$

a) $\sqrt[8]{(x+1)^7}$

b) 25

c) $(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b})\cdot(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b})=$
$=(a-b)-(a+b)=-2b$

d) $-6\sqrt[6]{2}$

37 **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{1}{1-a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}$

b) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a\sqrt{a}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-a)\cdot(1+a)^2}}$

b) $a\sqrt[3]{a}$

38 **Determina si son ciertas o falsas las igualdades que se dan a continuación.**

a) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$

a) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}}=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$ Cierta

b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$ Cierta

39 **Racionaliza las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt[3]{9}}$

c) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $6+\sqrt{35}$

d) $\dfrac{-\sqrt[6]{32}}{2}-\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}+1$

40 **Calcula el resultado de las siguientes operaciones, simplificando al máximo.**

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{8}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{8}-2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}$

d) $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2-\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}+\sqrt{2}=$

$=-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{8}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{8}-2}}=\sqrt{\dfrac{4}{4}}=1$

c) $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}=2^{1/2}\cdot 2^{-1/4}\cdot 2^{1/8}\cdot 2^{-1/16}=$

$=2^{5/16}=\sqrt[16]{2^5}$

d) $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$

$=\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{-13-6\sqrt{6}}{-1}=$

$=13+6\sqrt{6}$

Aproximaciones y errores

41 **A Brahmagupta (siglo VII a. C.) se le atribuye una aproximación de π que vale $\sqrt{10}$. Siglos después, en el III a. C., Arquímedes propuso otra: $\frac{245}{78}$. Calcula cuántas cifras exactas tiene cada aproximación y qué porcentaje de error se comete cuando se aproxima π con cada una de ellas.**

La primera tiene dos cifras exactas y un porcentaje de error del 0,66 %.

La segunda tiene cuatro cifras exactas y un porcentaje de error del 0,02 %.

42 **Redondea a dos cifras decimales estos números e indica si la aproximación es por exceso o por defecto.**

a) **3,05679** ***c)*** **0,00078** ***e)*** **4,34505**

b) **−2,9346** ***d)*** **45,8620** ***f)*** **−3,00531**

a) 3,06, por exceso.

b) −2,93, por exceso.

c) 0,00, por defecto.

d) 45,86, por defecto.

e) 4,35, por exceso.

f) −3,01, por defecto.

43 **Calcula el error absoluto que se comete al tomar 0,71 como aproximación de 5/7.**

El error absoluto que se comete es 3/700.

44 **Aproxima $\sqrt{13}$ con un error absoluto menor que una milésima. ¿Existe una sola aproximación?**

Cualquier valor comprendido en (3,6046; 3,6066).

45 **El número decimal 7,543 es la aproximación por redondeo de cierto número real. ¿En qué intervalo está comprendido? Escríbelo e indica su incertidumbre.**

Está comprendido en el intervalo: (7,5425; 7,5435)

Lo escribimos como $7{,}543 \pm 0{,}0005$.

46 **A continuación se ofrece una tabla con las aproximaciones de algunos números reales. Cópiala y determina, para cada caso, el tipo de aproximación, la incertidumbre o cota de error y el intervalo en el que está comprendido el número exacto. Indica también el número de cifras exactas y el error relativo cometido. ¿Cuál de las aproximaciones crees que es la mejor?**

La solución a esta pregunta se encuentra en la tabla de la parte inferior de esta página.

47 **Determina entre qué números están comprendidos los valores exactos de cada una de las siguientes aproximaciones.**

a) **$6{,}87 \pm 0{,}02$**

b) **$67\,894 \pm 5$**

c) **$0{,}0543 \pm 0{,}0001$**

d) **$67{,}0 \pm 0{,}2$**

a) (6,85; 6,89)

b) (67 889; 67 899)

c) (0,0542; 0,0544)

d) (66,8; 67,2)

Notación científica

48 **Utilizando la notación científica escribe las siguientes magnitudes en metros:**

a) **La Unidad Astronómica de distancia es la distancia media que separa la Tierra del Sol, su valor es 149,6 millones de kilómetros.**

b) **Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año (velocidad de la luz = 300 000 km/s).**

c) **El C-elegans fue el primer organismo cuyo genoma fue completamente secuenciado. Su longitud es de aproximadamente 1 mm.**

a) $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

b) $9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m

c) 10^{-3} m

49 **Ordena de menor a mayor los siguientes números, expresándolos previamente en notación científica.**

a) **$3{,}23 \cdot 10^{18}$, $523{,}17 \cdot 10^{16}$, $444 \cdot 10^{17}$**

b) **$3{,}19 \cdot 10^{-12}$, $0{,}033 \cdot 10^{-10}$, $444 \cdot 10^{-14}$**

a) $3{,}23 \cdot 10^{18} < 5{,}2317 \cdot 10^{18} < 4{,}44 \cdot 10^{19}$

b) $3{,}19 \cdot 10^{-12} < 3{,}3 \cdot 10^{-12} < 4{,}44 \cdot 10^{-12}$

50 **Si $X = 3 \cdot 10^7$, $Y = 4{,}25 \cdot 10^5$ y $Z = 72{,}12 \cdot 10^{10}$, calcula, expresando el resultado en notación científica.**

a) $(X + Y) \cdot Z$ ***b)*** $\dfrac{X \cdot Y}{Z}$

a) $2{,}194\,251 \cdot 10^{19}$ *b)* $1{,}767\,886\,855 \cdot 10$

Logaritmos

51 **Calcula.**

a) **$\log 0{,}00001$** ***d)*** **$\log_{1/3} \sqrt{3}$** ***g)*** **$\log_{23} 1$**

b) **$\log_5 (1/625)$** ***e)*** **$\log_{\sqrt{2}} 0{,}125$** ***h)*** **$\log_{13} \sqrt[5]{2\,197}$**

c) **$\log_2 2\,048$** ***f)*** **$\log_a \sqrt[3]{a^7}$** ***i)*** **$\log_3 81$**

a) -5 *c)* 11 *e)* -6 *g)* 0 *i)* 4

b) -4 *d)* $-1/2$ *f)* 7/3 *h)* 3/5

52 **Utilizando las propiedades de los logaritmos, calcula *x* en las siguientes expresiones.**

a) **$\log_x \left(\dfrac{1}{27}\right) = -3$**

b) **$\log_{1/2} 128 = x$**

c) **$\log_5 x = 6/5$**

d) **$\log_x 4 = 1/8$**

e) **$\log_x 4{,}9 = 0{,}16$**

f) **$\log_{\sqrt{3}} x = 6{,}5$**

g) **$\log_{x+1} 25 = 2$**

h) **$\log (x^3 - 25) = 2$**

i) **$\log_2 32^x = 0{,}1$**

a) 3 *d)* 2^{16} *g)* 4

b) -7 *e)* $4{,}9^{\frac{25}{4}}$ *h)* 5

c) $\sqrt[5]{5^6}$ *f)* $\sqrt[4]{3^{13}}$ *i)* 1/50

53 **Formula estas expresiones como un solo logaritmo.**

a) **$3\,(\log 5 + \log 2) - \log 2 - \log 7$**

b) **$\dfrac{3}{2}(1 - \log 5) + \dfrac{1}{2} \log 2$**

c) **$3 \ln 2 - 1 + \dfrac{\ln 5}{3}$**

a) $3(\log 5 + \log 2) - \log 2 - \log 7 = \log \dfrac{10^3}{14} = \log \left(\dfrac{500}{7}\right)$

b) $\dfrac{3}{2}(1 - \log 5) + \dfrac{1}{2} \log 2 = \dfrac{1}{2} \log (2^3 \cdot 2) = \log 4$

c) $3 \ln 2 - 1 + \dfrac{\ln 5}{3} = \ln \left(\dfrac{8\sqrt[3]{5}}{e}\right)$

Valor exacto	$(1 + \sqrt{5})/2$	$\sqrt{5}$	$-7{,}5436\ldots$	299 792,5	$\sqrt[3]{10}$
Valor aproximado	1,62	2,236	$-7{,}544$	300 000	2,154
Aproximación	exceso	defecto	defecto	exceso	defecto
Incertidumbre	0,002	0,0001	0,0004	208	0,0005
Intervalo	(1,618; 1,622)	(2,2359; 2,2361)	($-7{,}5444$; $-7{,}5436$)	(299 584,5; 300 000,5)	(2,1535; 2,1545)
Cifras exactas	$\Delta x < 0{,}005$ 3 cifras exactas	$\Delta x < 0{,}0005$ 4 cifras exactas	$\Delta x < 0{,}0005$ 4 cifras exactas	$\Delta x < 500$ 3 cifras exactas	$\Delta x < 0{,}0005$ 4 cifras exactas
Error relativo	0,12 %	0,003 %	0,005 %	0,07 %	0,02 %

La segunda es la mejor aproximación.

54 **Halla el valor de *a* para que se cumplan las siguientes igualdades.**

a) **$\log_a 12 + \log_a 3 = 2$**

b) **$3^a = 10$**

c) **$\log a = 1 + 3\log 2 - \frac{1}{2}\log 64$**

d) **$\ln a = \log_3 243 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$**

a) $\log_a 36 = 2 \Rightarrow a = 6$

b) $a = \frac{\ln 10}{\ln 3}$

c) $\log a = \log \frac{10 \cdot 2^3}{\sqrt{64}} = \log 10 \Rightarrow a = 10$

d) $\ln a = 5 - (-4) = 9 \Rightarrow a = e^9$

55 **Calcula *x* para que se cumpla cada una de las siguientes igualdades.**

a) **$\log_8 (2x + 1) = -\frac{1}{3}$**

b) **$x^{0,8} = 1\,024$**

c) **$5^{x-2} = e$**

d) **$2^{x^2-1} = 3^{\ln 2}$**

a) $8^{-1/3} = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

b) $0{,}8 \cdot \log_2 x = \log_2 1\,024 \Rightarrow x = \sqrt{2^{25}}$

c) $(x - 2)\ln 5 = 1 \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{\ln 5}$

d) $(x^2 - 1)\ln 2 = \ln 2 \cdot \ln 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 + \ln 3}$

56 **Calcula cuánto vale *k* en cada caso.**

a) **$\log_a x - \log_{1/a} x^k = 0$**

b) **$\log_2 x^k = \log_4 x$**

a) $\log_a x - \log_{1/a} x^k = 0 \Rightarrow \log_a x = \log_{1/a} x^k \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a x = -\log_a x^k \Rightarrow \log_a x = \log_a x^{-k} \Rightarrow$
$\Rightarrow k = -1$

b) $\log_2 x^k = \log_4 x \Rightarrow \log_2 x^k = \log_2 \sqrt{x} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Ejercicios de aplicación

57 **Indica cuál de las siguientes opciones es más conveniente.**

- **Que te cobren el precio de un artículo sin IVA.**
- **Que te cobren el precio del artículo más el 21 % de IVA y que después te hagan un descuento del 21 %.**

Razona la respuesta.

La segunda opción es la mejor, ya que:

$$p \cdot 1{,}21 \cdot 0{,}79 = 0{,}9559p < p$$

donde *p* es el precio del artículo.

58 **Un comerciante vende sus artículos en las rebajas de enero al 80 % del precio que tenían en diciembre; en las rebajas de febrero los vende al 70 % del precio de las de enero. Determina:**

a) **El precio de un jersey en diciembre y enero si en febrero costaba 50 €.**

b) **El precio en diciembre y febrero de unos pantalones que en enero costaban 50 €.**

a) 89,29 € y 71,43 €, respectivamente.

b) 62,50 € y 35 €, respectivamente.

59 **Tres operarios remodelan una cocina trabajando 8 h diarias durante quince días. ¿En cuánto tiempo habrían remodelado la cocina 4 operarios trabajando 9 h diarias?**

En 10 días.

60 **Al medir a un niño de 90 cm de altura se obtuvieron 91 cm y al medir un edificio de 30 m de altura se obtuvieron 31 m, determina:**

a) **El error absoluto de las dos medidas.**

b) **El error relativo de las dos medidas.**

c) **¿Cuál te parece la medida más precisa?**

a) 1 cm y 1 m, respectivamente.

b) 1,11 % y 3,33 % respectivamente.

c) La primera medida es más precisa.

61 **La arista de un cubo mide 6 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?**

$D = \sqrt{2 \cdot 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3} = 10{,}39$ cm

62 **Calcula la longitud de la diagonal de una caja de dimensiones 11 cm × 32 cm × 14 cm.**

$D = \sqrt{11^2 + 32^2 + 14^2} = 36{,}62$ cm

63 **La pirámide de Keops tenía 230,35 m de lado y 146,6 m de altura, cuando la construyeron en el 2400 a. C. estaba recubierta de planchas de piedra pulida. ¿Cuántos metros cuadrados de piedra pulida necesitaron los constructores para recubrirla?**

Calculamos el área de cuatro triángulos isósceles de base 230,35 m y una altura de:

$$h = \sqrt{146{,}6^2 + \left(\frac{230{,}35}{2}\right)^2} = 186{,}43 \text{ m}$$

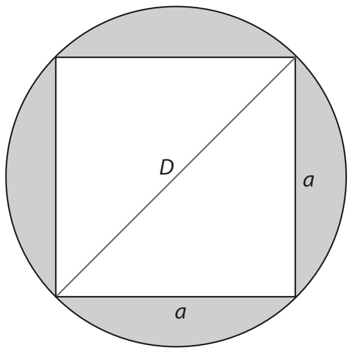
Necesitaron entonces:

$$A = 4 \cdot \frac{230{,}35 \cdot 186{,}43}{2} = 85\,889{,}16 \text{ m}^2$$

64 **Se quiere construir un rectángulo áureo. Sabiendo que el lado menor mide 7 cm, ¿cuánto deberá medir el lado mayor?**

$$\frac{7 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)}{2} = 11{,}33 \text{ cm}$$

65 **Halla el área de la zona sombreada si $D = 2\sqrt{2}$ cm, y expresa el resultado con cuatro cifras exactas.**



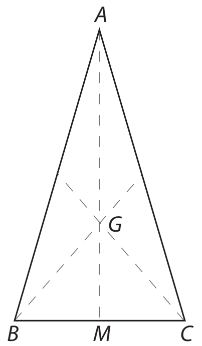
El lado del cuadrado mide:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2 \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,a \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

El área sombreada es:

$$A = \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2 \Rightarrow 2{,}283 \text{ cm}^2$$

66 **El punto G es el baricentro del triángulo isósceles ABC, $AB = AC = 5$ cm y $BC = 3$ cm. Sabiendo que G cumple $GM = \frac{1}{2}GA$, calcula el área del triángulo GBC y redondea el resultado con un error menor que una milésima.**



La altura del triángulo GBC es $h = \frac{1}{3}\sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{6}\sqrt{91}$ cm.

Con este valor aproximado, el área es: $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{91} = \frac{\sqrt{91}}{4}$ cm^2, por lo que con un error menor que una milésima el resultado no es único: 2,384 cm^2 o 2,385 cm^2 son resultados válidos. En efecto: $\left|\frac{\sqrt{91}}{4} - 2{,}384\right| = 0{,}000848\ldots$,

$\left|\frac{\sqrt{91}}{4} - 2{,}385\right| = 0{,}000151\ldots$

67 **El área de un hexágono regular es de $9\sqrt{3}$ cm^2. Halla la longitud del lado, expresando esta medida con un radical.**

Sea l el lado del hexágono, entonces su apotema vale $\sqrt{3}/2\ l$, por lo que: $9\sqrt{3} = 6l/2 \cdot \sqrt{3}/2\ l \Rightarrow \sqrt{6}$ cm

68 **Aplicando las propiedades de los logaritmos, demuestra lo siguiente.**

a) **$\log_a x = -\log_{1/a} x$**

b) **$\log_{\sqrt{a}} x = 2\log_a x$**

a) Sea $\log_a x = y$; entonces $a^y = x$.
Por otra parte, $-\log_{1/a} x = \log_{1/a} x^{-1}$.

Sea $\log_{1/a} x^{-1} = z$, entonces $\left(\frac{1}{a}\right)^z = x^{-1}$ o $a^z = x$.

Por tanto, $a^y = a^z$, o lo que es igual $y = z$:

$$\log_a x = -\log_{1/a} x$$

b) $\log_{\sqrt{a}} x = \log_{a^{1/2}} x = \frac{\log x}{\log a^{1/2}} = \frac{\log x}{(1/2)\log a} = 2\,\frac{\log x}{\log a} =$

$= 2\log_a x$

69 **Una población sufre una fuerte emigración y en 10 años se ve reducida a la cuarta parte. Su decrecimiento es exponencial, del tipo $P = P_0 \cdot e^{-kt}$, donde k es la tasa de decrecimiento, y t, el tiempo, medido en años. Calcula la constante k.**

$$(1/4) = e^{-10k} \Rightarrow k = \frac{\ln 4}{10} = 0{,}138$$

70 **El pH de una disolución es el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones hidronio, $[H_3O^+]$, es decir, pH $= \log(1/[H_3O^+])$. El pH máximo es 14 y, evidentemente, siempre es positivo. Una disolución es ácida si su pH es menor que 7 y básica cuando es mayor que 7. ¿Cuál es el pH de una disolución cuya concentración de iones hidronio es de $6 \cdot 10^{-5}$ mol/L? ¿Es ácida o básica?**

Sustituyendo se obtiene:

$$\text{pH} = 4{,}22$$

Es una disolución ácida.

1. **Clasifica estos números en racionales e irracionales.**

a) $\sqrt{2}$ ***b)*** $2,2\widehat{1}$ ***c)*** $\sqrt{9}$ ***d)*** $\frac{1}{5}$ ***e)*** 2 ***f)*** $1,\widehat{3}$ ***g)*** $\sqrt{5}$

Racionales: $2,2\widehat{1}$; $\sqrt{9}$; $\frac{1}{5}$; 2; $1,\widehat{3}$

Irracionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

2. **Realiza las siguientes operaciones con la calculadora.**

a) $0,\widehat{3}\cdot 0,15-0,1$ ***b)*** $1,\widehat{2}+1,3+1,1\widehat{2}$

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{100}-\frac{1}{10}=-0,05$

b) $\frac{11}{9}+\frac{13}{10}+\frac{101}{90}=3,6\widehat{4}$

3. **Resuelve.**

a) $3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{50}$ ***b)*** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}:\sqrt{6}$ ***c)*** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

a) $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}:\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2:(2^3\cdot 3^3)}=\sqrt[6]{3^{-1}}$

c) $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}\cdot\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}+\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\cdot\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{7-5}=$

$=\frac{7+5+2\sqrt{7}\sqrt{5}+7+5-2\sqrt{7}\sqrt{5}}{2}=\frac{24}{2}=12$

4. **Si una aproximación a $\sqrt{2}$ es $\frac{7}{5}$, calcula el error absoluto de la aproximación y su error relativo. Realiza el mismo cálculo pero con la aproximación $\frac{707}{500}$. ¿Dónde se comete más error?**

$\sqrt{2}=1,414213562\ldots$

$\frac{7}{5}=1,4$

Error absoluto: $\left|\sqrt{2}-1,4\right|=0,01421356\ldots$

Error relativo: $\frac{0,01421356\ldots}{\sqrt{2}}=0,01\ldots$

$\frac{707}{500}=1,414$

Error absoluto: $\left|\sqrt{2}-1,414\right|=0,00021356\ldots$

Error relativo: $\frac{0,00021356\ldots}{\sqrt{2}}=0,00015\ldots$

Se comete más error en la primera aproximación.

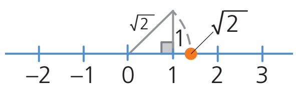
5. **Calcula y escribe el intervalo de $|x-3|\le 9$.**

$x-3\le 9\rightarrow x\le 12$ $-9\le x-3\rightarrow x\ge -6$

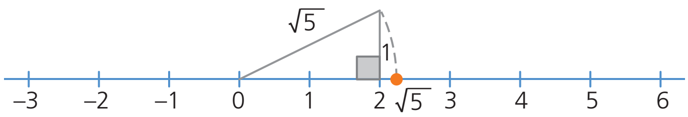
$[-6, 12]$

6. **Representa estos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{11}$ en la recta utilizando el teorema de Pitágoras. Comprueba los resultados con *GeoGebra*.**

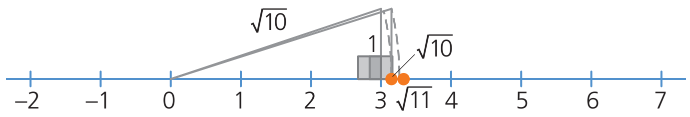
Teorema de Pitágoras: $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$



Teorema de Pitágoras: $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$



Teorema de Pitágoras: $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$ $\qquad \sqrt{11} = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + 1^2}$



7. **Calcula estos logaritmos.**

a) **log 10 000** ***b)*** **ln** $\mathbf{e^5}$ ***c)*** $\mathbf{\log_2 \frac{1}{16}}$ ***d)*** $\mathbf{\log_{\sqrt{2}} 1\,024}$

a) 4 *b)* 5 *c)* -4 *d)* 20

8. **¿Qué valor tiene *x* en cada caso? Calcula.**

a) $\mathbf{\log x = 3}$ ***b)*** $\mathbf{\log x = -2}$ ***c)*** $\mathbf{\log_{\frac{1}{4}} x = -2}$ ***d)*** $\mathbf{\log_x 27 = -3}$

a) $x = 10^3$ *b)* $x = 10^{-2}$ *c)* $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$ *d)* $x = \frac{1}{3}$

9. **Si log 2 = 0,30, ¿qué valor tienen las siguientes expresiones?**

a) **log 20** ***b)*** **log 50** ***c)*** **log 800** ***d)*** $\mathbf{\log \sqrt{2}}$

a) $\log 2 + \log 10 = 1 + 0{,}30 = 1{,}30$

b) $\log 100 - \log 2 = 2 - 0{,}30 = 1{,}70$

c) $\log 2^3 + \log 100 = 3 \cdot 0{,}30 + 2 = 2{,}90$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}30 = 0{,}15$

10. **Reduce a una expresión algebraica en cada caso.**

a) $\mathbf{\ln A = 2\ln x - 3\ln y + \frac{1}{2}\ln z}$ ***b)*** $\mathbf{\ln B = \frac{3}{2}\ln y - \frac{5}{3}\ln x}$

a) $\ln A = \ln x^2 - \ln y^3 + \ln \sqrt{z} = \ln\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right)$

b) $\ln B = \ln \sqrt{y^3} - \ln \sqrt[3]{x^5} = \ln\left(\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$