

5



NÚMEROS COMPLEJOS

El estudio de los números complejos será el hilo conductor de la unidad, los alumnos van a ampliar su conocimiento sobre números con este nuevo conjunto de números y sus propiedades y comprobarán su aplicación en la vida cotidiana.

Al inicio de esta unidad se presentan los números complejos partiendo de la definición de unidad imaginaria y se trabaja su representación, para llegar en el siguiente epígrafe operar con este conjunto de números expresados en forma binómica. A continuación, se trabaja con la forma polar de números complejos y sus operaciones expresado en esta forma.

En la sección de **Ejercicios resueltos** se relacionan las operaciones de números complejos con transformaciones geométricas y también se resuelven ecuaciones que el campo de los números reales no tienen solución.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de los números complejos, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL)**. En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, el manejo de todas las operaciones con números complejos así como las distintas formas de expresarlos, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Conocer los números complejos tanto en forma binómica como en forma polar y sus propiedades.
- Operar correctamente con números complejos en forma binómica.
- Operar correctamente con números complejos en forma polar.
- Utilizar los números complejos en la resolución de ecuaciones y problemas.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD			
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Números imaginarios. Números complejos en forma binómica	1. Utilizar los números complejos para recoger, transformar e intercambiar información, representando los resultados en contextos de resolución de problemas. 2. Conocer los números complejos como extensión de los números reales, utilizándolos para obtener soluciones de algunas ecuaciones algebraicas.	1.1. Reconoce los distintos tipos de números, reales y complejos, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.2. Representa gráficamente los números complejos y analiza las diferencias que existen con la representación de números reales. 2.1. Valora los números complejos como ampliación del concepto de números reales y los utiliza para obtener la solución de ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales sin solución real.	CMCT CD CL CAA CSC
Representación gráfica de los números complejos			
Operaciones con números complejos en forma binómica Suma de números complejos Multiplicación de números complejos División de números complejos Potencias de números complejos	3. Utilizar las operaciones con números complejos e forma binómica para recoger, transformar e intercambiar información, representando los resultados en contextos de resolución de problemas.	3.1. Opera con números complejos en forma binómica. 3.2. Realiza operaciones numéricas con eficacia, empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o herramientas informáticas. 3.3. Utiliza la notación numérica más adecuada a cada contexto y justifica su idoneidad.	CMCT CD CL CAA
Forma polar de un número complejo	4. Utilizar las operaciones con números complejos e forma binómica para recoger, transformar e intercambiar información, representando los resultados en contextos de resolución de problemas.	4.1. Opera con números complejos en forma polar, y utiliza la fórmula de Moivre en el caso de las potencias. 4.2. Realiza operaciones numéricas con eficacia, empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o herramientas informáticas. 4.3. Utiliza la notación numérica más adecuada a cada contexto y justifica su idoneidad.	CMCT CD CL CAA
Operaciones con números complejos en forma polar Suma de números complejos Multiplicación de números complejos División de números complejos Potencias de números complejos Radicación de números complejos			

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

PARA EL ALUMNO

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Números imaginarios. Números complejos en forma binómica

2. Representación gráfica de los números complejos

3. Operaciones con números complejos en forma binómica

- Suma de números complejos
- Multiplicación de números complejos
- División de números complejos
- Potencias de números complejos

4. Forma polar de un número complejo

5. Operaciones con números complejos en forma polar

- Suma de números complejos
- Multiplicación de números complejos
- División de números complejos
- Potencias de números complejos
- Radicación de números complejos

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

Actividades de refuerzo

Prueba de evaluación

GeoGebra. Suma de números complejos

GeoGebra. Potencias de i

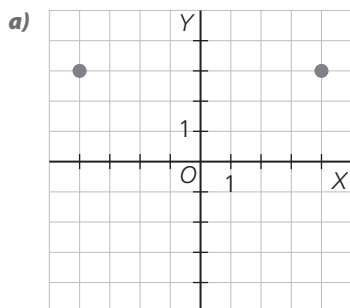
GeoGebra. Opuesto y conjugado de un número

Vídeo. Resolución de ecuaciones

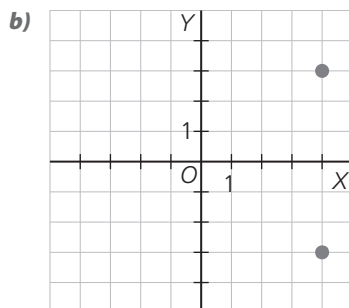
Actividades interactivas. Test de autoevaluación

1. Dado el punto $P(4, 3)$, representa sus simétricos respecto al:

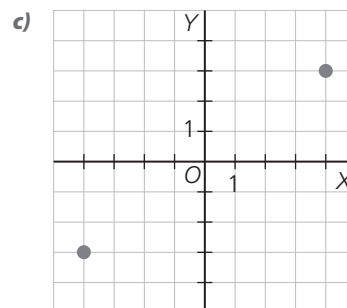
a) Eje de ordenadas.



b) Eje de abscisas.



c) Origen de coordenadas.



2. Calcula y representa en el eje de coordenadas la distancia entre los puntos $A(6, 4)$ y $B(2, 1)$.

Hallamos el vector \overrightarrow{AB} y el módulo del vector.

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 2, 4 - 1) = (4, 3)$$

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

3. Dados los vectores fijos de origen O y extremos $P_1(5, 2)$ y $P_2(-5, -2)$:

a) ¿Cuáles son sus módulos?

b) ¿Qué ángulos forman con el semieje positivo de abscisas?

a) $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$$|\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

b) Ángulo que forma $\overrightarrow{OP_1}$ con el eje de abscisas:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{2}{5}\right) = 21,80^\circ$$

Ángulo que forma $\overrightarrow{OP_2}$ con el eje de abscisas:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2}{-5} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{2}{5}\right) = 21,80^\circ \Rightarrow \alpha = 180 + 21,80 = 201,80^\circ$$

4. Indica el discriminante de cada una de estas ecuaciones y, según el caso, resuélvelas.

a) $x^2 + 9 = 0$

$$0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -36 < 0$$

No tiene solución.

b) $x^2 + x = 0$

$$1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 > 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$x = 3 \text{ (Solución doble)}$$

5. Racionaliza la expresión $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = -1 + \sqrt{2}$$

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Suma de números complejos (página 127)

En el archivo de GeoGebra se puede comprobar que la suma de números complejos puede representarse y obtenerse geométricamente, como la de los vectores, mediante la regla del paralelogramo.

Moviendo los deslizadores se pueden mostrar en la pizarra digital distintas sumas según las partes real e imaginaria de los números complejos sean positivas o negativas. También puede ser utilizado por los alumnos para comprobar sus resultados al hacer los ejercicios de suma de números complejos.

Potencias de i (página 128)

En el archivo de GeoGebra se pueden ver las representaciones gráficas de las sucesivas potencias de i para comprobar que los resultados van ocupando puntos sucesivos en cada eje según el giro de 90° producido por la cada potencia.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital esta propiedad de las potencias de i o para que los alumnos puedan comprobar esta relación por sí mismos.

Opuesto y conjugado de un número complejo (página 131)

En el archivo de GeoGebra se pueden comprobar las relaciones de simetría que se verifican entre las representaciones gráficas de un número complejo, su opuesto y su conjugado.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las simetrías entre los números complejos o para que los alumnos puedan descubrir estas simetrías por sí mismos.

Resolución de ecuaciones (página 139)

En el vídeo se muestra paso a paso cómo resolver la ecuación del ejercicio resuelto, calculando las raíces cuartas de -1 .

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital cómo debe resolverse este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Actividades (páginas 124/134)

1 Calcula las soluciones de las ecuaciones en el conjunto \mathbb{C} .

a) $x^2 + 16 = 0$

b) $x^2 + 8x + 25 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

a) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$

$x_1 = 4i, x_2 = -4i$

b) $x^2 + 8x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = -4 \pm 3i$

$x_1 = -4 + 3i, x_2 = -4 - 3i$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ Si realizamos el cambio $x^2 = t$:

Obtenemos la ecuación de segundo grado

$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ y $t = -1$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = i, x_4 = -i$

2 Calcula los valores de las potencias siguientes.

a) i^{19}

b) i^{29}

c) i^{56}

a) Dividimos 19 entre 4 y obtenemos de resto 3; por tanto, $i^{19} = i^3 = -i$

b) Dividimos 29 entre 4 y obtenemos de resto 1; por tanto, $i^{29} = i^1 = i$

c) Dividimos 56 entre 4 y obtenemos de resto 0; por tanto, $i^{56} = i^0 = 1$

3 Dados los números complejos $z = 3 - 2i$ y $\omega = 4 + i$, calcula.

a) $z + \omega$

f) $-z$

b) $z \cdot \omega$

g) $-\omega$

c) z/ω

h) \bar{z}

d) $1/z$

i) $\bar{\omega}$

e) $1/\omega$

j) $\bar{z} \cdot \omega$

a) $z + \omega = (3 - 2i) + (4 + i) = 7 - i$

b) $z \cdot \omega = (3 - 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i - 8i + 2 = 14 - 5i$

c) $\frac{z}{\omega} = \frac{3 - 2i}{4 + i} = \frac{3 - 2i}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{10 - 11i}{17}$

d) $\frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

e) $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{4 - i}{17} = \frac{4}{17} - \frac{1}{17}i$

f) $-z = -3 + 2i$

g) $-\omega = -4 - i$

h) $\bar{z} = 3 + 2i$

i) $\bar{\omega} = 4 - i$

j) $\bar{z} \cdot \omega = (3 + 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i + 8i + 2 = 10 + 11i$

4 Calcula.

a) $(2 - 2i)^6$

b) $(3 - 4i)^3$

a) $(2 - 2i)^6 = (2 - 2i)^2 \cdot (2 - 2i)^2 \cdot (2 - 2i)^2 = -8i \cdot (-8i) \cdot (-8i) = 512i$

b) $(3 - 4i)^3 = (3 - 4i)^2 \cdot (3 - 4i) = (-7 - 24i) \cdot (3 - 4i) = -21 - 72i + 28i - 96 = -117 - 44i$

5 Expresa los siguientes números complejos en forma polar.

a) $-3 + 2i$

b) $-4i$

c) $5(\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ)$

d) La unidad imaginaria positiva.

a) $-3 + 2i \Rightarrow m = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-3}$

$\Rightarrow \alpha = 146,3099^\circ \Rightarrow \sqrt{13}_{146,3^\circ}$

b) $-4i = 4_{270^\circ}$

c) $5(\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ) = 5(\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ)) = 5_{-20^\circ} = 5_{340^\circ}$

d) $i = 1_{90^\circ}$

6 Expresa el número complejo $3(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ en forma binómica.

Sustituyendo $\sin 150^\circ$ y $\cos 150^\circ$ por su valor se obtiene:

$3(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

- 7** Calcula el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos, expresándolos en forma polar.

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$ **b)** $z = \frac{1}{2}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$ **c)** $z = 4_{-15^\circ}$

Expresamos en primer lugar los números complejos en forma polar:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^\circ} \Rightarrow \bar{z} = 2_{60^\circ}, -z = 2_{120^\circ}$

b) $z = \frac{1}{2}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ) = \left(\frac{1}{2}\right)_{200^\circ}$
 $\Rightarrow \bar{z} = \left(\frac{1}{2}\right)_{160^\circ}, -z = \left(\frac{1}{2}\right)_{20^\circ}$

c) $z = 4_{-15^\circ} = 4_{345^\circ} \Rightarrow \bar{z} = 4_{15^\circ}, -z = 4_{165^\circ}$

- 8** Dados los números complejos $z = 3_{75^\circ}$ y $\omega = 4_{20^\circ}$, calcula:

a) $z + \omega$ **c)** z/ω **e)** $1/\omega$ **g)** $-\omega$
b) $z \cdot \omega$ **d)** $1/z$ **f)** $-z$ **h)** \bar{z}

a) Para sumar los dos números complejos en forma polar es preciso, en primer lugar, expresarlos en forma binómica:

$z = 3_{75^\circ} = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) = 0,78 + 2,90i$

$\omega = 4_{20^\circ} = 4(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) = 3,76 + 1,37i$

$z + \omega = (0,78 + 2,90i) + (3,76 + 1,37i) = 4,54 + 4,27i$

b) $z \cdot \omega = 3_{75^\circ} \cdot 4_{20^\circ} = 12_{95^\circ}$

c) $\frac{z}{\omega} = 3_{75^\circ}/4_{20^\circ} = \left(\frac{3}{4}\right)_{55^\circ}$

d) $\frac{1}{z} = \frac{1_{0^\circ}}{3_{75^\circ}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-75^\circ} = \left(\frac{1}{3}\right)_{285^\circ}$

e) $\frac{1}{\omega} = \frac{1_{0^\circ}}{4_{20^\circ}} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-20^\circ} = \left(\frac{1}{4}\right)_{340^\circ}$

f) $-z = 3_{75^\circ + 180^\circ} = 3_{255^\circ}$

g) $-\omega = 4_{20^\circ + 180^\circ} = 4_{200^\circ}$

h) $\bar{z} = 3_{-75^\circ} = 3_{285^\circ}$

- 9** Calcula la potencia cuarta del número complejo $3 - 3i$, expresándolo previamente en forma polar.

$3 - 3i \Rightarrow m = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{3} \Rightarrow \alpha = 315^\circ$

$(3 - 3i)^4 = (\sqrt{18}_{315^\circ})^4 = 324_{180^\circ}$

- 10** Calcula $(-4 + 2i)^5$, expresándolo en forma polar.

$-4 + 2i \Rightarrow m = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-4}$

$\Rightarrow \alpha = 153,43^\circ$

$(-4 + 2i)^5 = (\sqrt{20}_{153,43^\circ})^5 = (800\sqrt{5})_{47,17^\circ}$

- 11** Calcula las raíces cúbicas del número complejo $8 - 8i$.

Expresamos, en primer lugar, el número $8 - 8i$ en forma polar:

$8 - 8i \Rightarrow m = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{128}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{-8}{8} \Rightarrow \alpha = 315^\circ;$

$8 - 8i = \sqrt{128}_{315^\circ}$

El módulo de las raíces cúbicas de $8 - 8i$ será:

$\sqrt[3]{\sqrt{128}} = \sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$

Y sus argumentos:

$\alpha_1 = \frac{315^\circ}{3} = 105^\circ$

$\alpha_2 = \frac{315^\circ + 360^\circ}{3} = 225^\circ$

$\alpha_3 = \frac{315^\circ + 720^\circ}{3} = 345^\circ$

Las tres raíces cúbicas de $8 - 8i$ son:

$2\sqrt[6]{2}_{105^\circ}, 2\sqrt[6]{2}_{225^\circ}, 2\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$

- 12** Calcula las raíces quintas de 32.

El número 32 en forma polar es 32_{0° .

El módulo de las raíces quintas de 32 es $\sqrt[5]{32} = 2$.

Y sus argumentos:

$\alpha_1 = \frac{0^\circ}{5} = 0^\circ$

$\alpha_4 = \frac{0^\circ + 1080^\circ}{5} = 216^\circ$

$\alpha_2 = \frac{0^\circ + 360^\circ}{5} = 72^\circ$

$\alpha_5 = \frac{0^\circ + 1440^\circ}{5} = 288^\circ$

$\alpha_3 = \frac{0^\circ + 720^\circ}{5} = 144^\circ$

Las raíces quintas de 32 son: $2_{0^\circ}, 2_{72^\circ}, 2_{144^\circ}, 2_{216^\circ}, 2_{288^\circ}$

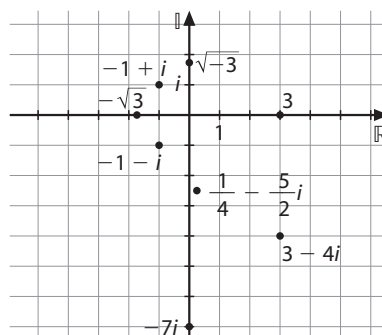
Ejercicios y problemas (páginas 140/142)

Números imaginarios. Forma binómica. Representación gráfica

- 1** Representa gráficamente estos números complejos e indica cuáles son imaginarios puros y cuáles reales.

$3 - 4i, -7i, -\sqrt{3}, \sqrt{-3}, -1 - i, -1 + i, \frac{1}{4} - \frac{5}{2}i, 3$

Imaginarios puros: $-7i$ y $\sqrt{-3}$; Reales: $-\sqrt{3}$ y 3



- 2** Escribe los conjugados y los opuestos de:

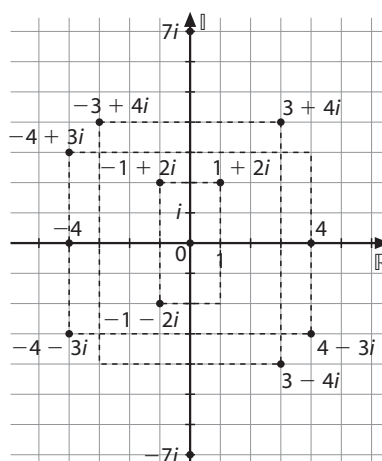
$3 - i, 2 + 4i, -5i, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$

Conjugados: $3 + i, 2 - 4i, 5i, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, respectivamente.

Opuestos: $-3 + i, -2 - 4i, 5i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, respectivamente.

- 3** Representa gráficamente el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.

a) $z = -4 + 3i$ **c)** $z = 4$ **e)** $z = 3 - 4i$
b) $z = -7i$ **d)** $z = -1 - 2i$ **f)** $z = 0$



- 4** ¿Qué tienen en común los números complejos de afijos (4, 0), (-4, 0), (0, 4) y (0, -4)? ¿Por qué?

Están situados sobre los ejes de coordenadas a igual distancia del origen. Su módulo vale 4.

- 5** Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + 36 = 0$ c) $x^3 - 27 = 0$
b) $x^2 - 36 = 0$ d) $x^2 - 4x + 5 = 0$

¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones?

a) $x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-36} \Rightarrow x = \pm 6i$, las dos soluciones son imaginarias.

b) $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$, las dos soluciones son reales.

c) $x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$, que es una solución real, pero en el campo de los complejos esta ecuación tiene tres soluciones, que son:

$$x^3 = 27_{0^\circ}$$

$$x = \sqrt[3]{(27_{0^\circ})} = \begin{cases} 3_{0^\circ} = 3 \\ 3_{120^\circ} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ 3_{240^\circ} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

d) $x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$

Por tanto, sus dos soluciones son complejas.

- 6** Resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 10 = 0$ y comprueba que las raíces obtenidas la verifican.

De forma análoga al último apartado del ejercicio anterior:

$$x^2 - 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm 3i$$

Sus dos soluciones son complejas.

Para comprobar que, efectivamente, son soluciones de la ecuación sustituimos:

$$(1 + 3i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i) + 10 = 1 + 6i - 9 - 2 - 6i + 10 = 0$$

$$(1 - 3i)^2 - 2 \cdot (1 - 3i) + 10 = 1 - 6i - 9 - 2 + 6i + 10 = 0$$

- 7** Determina las soluciones, en el campo de los números complejos, de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + 1 = 0$ c) $x^2 - 4x + 29 = 0$
b) $x^4 - 81 = 0$ d) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

a) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

b) $x^4 - 81 = 0 \Rightarrow x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) \Rightarrow x_1 = 3i, x_2 = -3i, x_3 = 3, x_4 = -3$

c) $x^2 - 4x + 29 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2}$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 5i, x_2 = 2 - 5i$$

d) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

Primero aplicando Ruffini tenemos:

	1	-5	4	-20
5		5	0	20
	1	0	4	0

El polinomio dado lo podemos factorizar:

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = (x - 5)(x^2 + 4)$$

La soluciones de la ecuación polinómica dada son:

$$x_1 = 5, x_2 = -2i, x_3 = 2i$$

Operaciones con números complejos en forma binómica

- 8** Efectúa las siguientes sumas en forma binómica.

a) $(-2 + 3i) + (7 - 4i)$

b) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right) + \left(\frac{3}{2} - i\right)$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{5}i) + (\sqrt{2} - 5\sqrt{5}i)$

a) $5 - i$

b) $2 - 4i$

c) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{5}i$

- 9** Calcula los siguientes productos.

a) $(2 + 3i) \cdot (3 - 5i)$ c) $(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)$

b) $\left(\frac{1}{2} - i\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + 2i\right)$ d) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2$

a) $21 - i$

b) $\frac{19}{8} + \frac{1}{4}i$

c) 4

d) $4i$

- 10** Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(3 - 2i) \cdot (3 + i) - (1 - 2i) \cdot (4 + 2i)$

b) $\frac{4 - 2i}{2 + 3i} + (2 - 2i)$

a) $3 + 3i$

b) $\frac{28}{13} - \frac{42}{13}i$

- 11** Realiza las siguientes operaciones.

a) $[(3 - 2i) \cdot (3 + i) - (1 - 2i) \cdot (1 + 2i)] (5 + 4i)$

b) $\frac{2}{3 - i}$

c) $\frac{\sqrt{2} + i}{-i}$

d) $\frac{1 + \sqrt{5}i}{i}$

a) $42 + 9i$

b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

c) $-1 + \sqrt{2}i$

d) $\sqrt{5} - i$

- 12** Demuestra que es $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ el inverso de $a + bi$.

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

- 13** Calcula: $z = \frac{3}{i} + \frac{2i}{2 + i} + \frac{2 + 3i}{1 + 2i}$

$$z = \frac{3}{i} = \frac{2i}{2 + i} = \frac{2 + 3i}{1 + 2i} = -3i + \frac{2 + 4i}{5} + \frac{8 - i}{5} = \frac{10 - 12i}{5}$$

- 14** Dados los números complejos $3 - bi$ y $a + 2i$, calcula a y b para que su producto sea $7 + 4i$.

$$(3 - bi)(a + 2i) = 7 + 4i \Rightarrow 3a + 6i - abi + 2b = 7 + 4i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 7 \\ 6 - ab = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{b} \end{cases}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{6}{b} + 2b = 7 \Rightarrow 2b^2 - 7b + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3/2 \Rightarrow a = 4/3 \end{cases}$$

15 Calcula.

a) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

a) -1

b) $\frac{(2+i) \cdot (1-2i)^2}{2-i}$

b) $\frac{7}{5} - \frac{24}{5}i$

16 Calcula.

a) i^{33} b) i^{185} c) i^{186} d) i^{64} e) $1/i^5$ f) i^{-2}

a) $i^{33} = i$

b) $i^{185} = i$

c) $i^{186} = i^2 = -1$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $\frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i$

f) $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

17 Determina el valor de m para que el cociente $\frac{6+mi}{1-i}$ sea igual a $1+5i$.

$$\frac{6+mi}{1-i} = \frac{6+mi}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{6+6i+mi-m}{2} = \frac{6-m}{2} + \frac{6+m}{2}i = 1+5i \Rightarrow \begin{cases} 6-m=2 \Rightarrow m=4 \\ 6+m=10 \Rightarrow m=4 \end{cases}$$

18 Determina el valor de a para que $(a-5i)^2$ sea un número imaginario puro.

$$(a-5i)^2 = a^2 - 10ai - 25$$

Para que sea imaginario puro la parte real $a^2 - 25 = 0 \Rightarrow a = 5, a = -5$

19 Halla b para que el producto $(3+bi)(3-5i)$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

$$(3+bi)(3-5i) = 9 - 15i + 3bi + 5b$$

a) Para que sea real: $-15 + 3b = 0 \Rightarrow b = 5$

b) Para que sea imaginario puro: $9 + 5b = 0 \Rightarrow b = -9/5$

20 Halla el valor de k para que el número $\left(\frac{4-ki}{3+i}\right) \cdot i^{563}$ sea imaginario puro.

Si $\frac{4-ki}{3+i} \cdot i^{563}$ es imaginario puro, su parte real debe ser nula.

$i^{563} = i^3 = -i$, por lo tanto, si operamos:

$$\frac{4-ki}{3+i} \cdot (-i) \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{-3k-4+(k-12)i}{10}$$

$$-3k-4=0 \Rightarrow k = \frac{-4}{3}$$

21 Calcula el valor de x para que el complejo $\frac{3-2xi}{4+3i}$:

a) Sea imaginario puro.

b) Sea un número real.

c) Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

$$\frac{3-2xi}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{12-6x+(-8x-9)i}{25}$$

a) Si ha de ser imaginario puro, su parte real debe ser nula: $12-6x=0 \Rightarrow x=2$

b) Si ha de ser real, su parte imaginaria debe ser nula:

$$-8x-9=0 \Rightarrow x = -9/8$$

c) Si su afijo debe estar en la bisectriz del primer cuadrante, deben ser iguales la parte real y la imaginaria:

$$12-6x = -8x-9 \Rightarrow x = -21/2$$

22 Calcula el cociente $\frac{x+i}{2+i}$ y determina el valor de x para que el módulo del complejo resultante sea $\sqrt{2}$.

Operando se obtiene:

$$\frac{x+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2x+1}{5} + \frac{2-x}{5}i$$

Si el módulo debe valer $\sqrt{2}$, tenemos:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{2x+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-x}{5}\right)^2}$$

$$2 = \frac{5x^2+5}{25} \Rightarrow 5x^2-45=0, x = \pm 3$$

23 El número $\frac{2-(1+x)i}{1-xi}$ es real. Calcula x y obtén el número.

Operando se obtiene:

$$\frac{2-(1+x)i}{1-xi} \cdot \frac{1+xi}{1+xi} = \frac{2+(1+x)x+(2x-1-x)i}{1+x^2}$$

Si es real: $2x-1-x=0 \Rightarrow x=1$

$$\text{Sustituyendo: } n = \frac{2-2i}{1-i} = \frac{2(1-i)}{1-i} = 2$$

24 Calcula el número real a para que el número complejo $z = \frac{3-2ai}{4-3i}$ esté situado en la bisectriz del primer cuadrante.

Para que un número complejo tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante, sus partes reales e imaginarias deberán coincidir:

$$\frac{3-2ai}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(12+6a)+(9+8a)i}{25}$$

$$\Rightarrow 12+6a=9-8a \Rightarrow 14a=-3 \Rightarrow a = -3/14$$

Forma polar de un número complejo

25 ¿El producto de dos números complejos es real?

a) Si son conjugados, sí.

b) Si son opuestos, sí.

c) El producto de dos números complejos nunca puede ser un número real.

Indica y razona la respuesta correcta.

a) Si son conjugados, sí, ya que $m_\alpha \cdot m_{-\alpha} = m_0^2$, que es un número real.

26 Si dos números complejos tienen el mismo afijo:

a) Tienen el mismo argumento.

b) Tienen módulos proporcionales.

c) Su cociente tiene como módulo 1.

Indica y razona la afirmación correcta.

Todas las respuestas son correctas.

27 ¿Qué tipo de gráfica forman los afijos de los números complejos que tienen el mismo argumento?

Forman una semirrecta con origen en el $(0, 0)$ y pendiente la tangente del argumento de los complejos.

28 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es π ?

Si su argumento es π el número complejo está situado sobre el eje real, en el semieje negativo.

29 Si $z = m_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números complejos $m_{\alpha+180^\circ}$ y $m_{-\alpha}$?

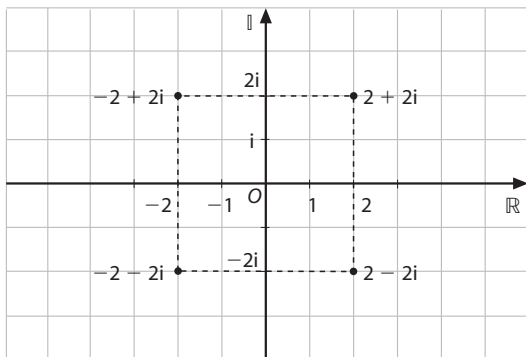
$$-z = m_{\alpha+180^\circ} \text{ y } \bar{z} = m_{-\alpha}$$

- 30** ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su conjugado? ¿Y con el de su opuesto?

El argumento del conjugado es el mismo cambiado de signo y el del opuesto difiere en 180° .

- 31** Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, representándolos previamente:

- a) $2 - 2i$ c) $2i$ e) $-2i$ g) $-2 + 2i$
b) $2 + 2i$ d) $-2 - 2i$ f) 2 h) -2



a) $z = 2 - 2i \Rightarrow m = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\text{tg } \alpha = \left(\frac{-2}{2}\right) = (-1)$
 $\Rightarrow \alpha = 315^\circ$, puesto que su afijo está en el cuarto cuadrante.

$$z = (2\sqrt{2})_{315^\circ} = (2\sqrt{2})_{7\pi/4}$$

b) $z = 2 + 2i \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$, $\text{tg } \alpha = \left(\frac{2}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad, puesto que su afijo está en el primer cuadrante.

$$z = (2\sqrt{2})_{45^\circ} = (2\sqrt{2})_{\pi/4}$$

c) $z = 2i \Rightarrow m = 2$, $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow z = 2_{90^\circ} = 2_{\pi/2}$

d) $z = -2 - 2i \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ rad
 $\Rightarrow z = (2\sqrt{2})_{225^\circ} = (2\sqrt{2})_{5\pi/4}$

e) $z = -2i \Rightarrow m = 2$, $\alpha = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ rad $\Rightarrow z = 2_{270^\circ} = 2_{3\pi/2}$

f) $z = 2 \Rightarrow m = 2$, $\alpha = 0^\circ = 0$ rad $\Rightarrow z = 2_{0^\circ} = 2_0$

g) $z = -2 + 2i \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$, $\text{tg } \alpha = \frac{2}{-2} = -1$

$\Rightarrow \alpha = 135^\circ$, puesto que su afijo está en el segundo cuadrante.

$$z = (2\sqrt{2})_{135^\circ} = (2\sqrt{2})_{3\pi/4}$$

h) $z = -2 \Rightarrow m = 2$, $\alpha = 180^\circ = \pi$ rad $\Rightarrow z = 2_{180^\circ} = 2_\pi$

- 32** Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes complejos.

- a) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ c) $4 - 4\sqrt{3}i$
b) $4i$ d) $3 + 3i$

a) $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = 4_{5\pi/4} = 4\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

b) $z = 4i = 4_{\pi/2} = 4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

c) $z = 4 - 4\sqrt{3}i = 8_{5\pi/3} = 8\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z = 3 + 3i = (3\sqrt{2})_{\pi/4} = 3\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

- 33** Expresa en forma binómica estos complejos.

- a) $3_{\frac{3\pi}{4}}$ d) $8_{\frac{4\pi}{3}}$
b) $1_{\frac{\pi}{6}}$ e) $3_{\frac{\pi}{4}}$
c) 2_π

a) $3_{3\pi/4} = 3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

b) $1_{\pi/6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) $2_\pi = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$

d) $8_{4\pi/3} = 8\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$

e) $3_{\pi/4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

- 34** Expresa en forma binómica los siguientes números complejos.

a) $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

c) $3(\cos 3 + i \sin 3)$

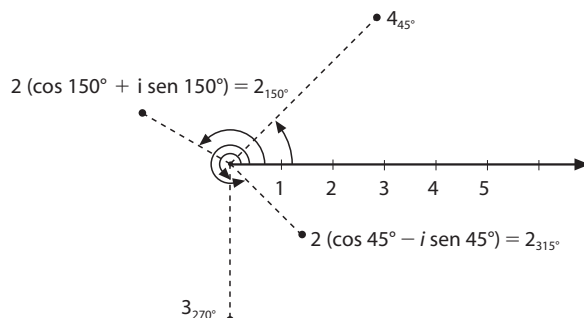
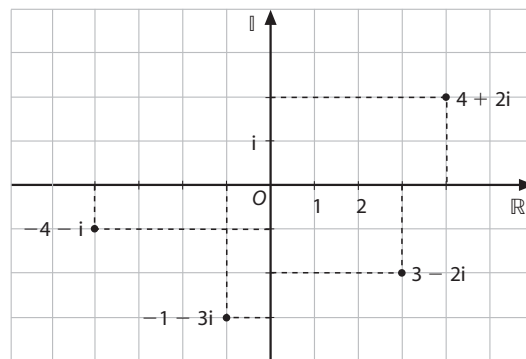
a) $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = -3 + 3i$

c) $3(\cos 3 + i \sin 3) = -2,97 + 0,42i$

- 35** Representa gráficamente estos números complejos.

- a) $3 - 2i$
b) $4 + 2i$
c) $-1 - 3i$
d) $-4 - i$
e) 4_{45°
f) 3_{270°
g) $2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$
h) $2(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$



36 Calcula el conjugado, el opuesto y el inverso de los números complejos del ejercicio anterior.

a) $z = 3 - 2i$

$$\bar{z} = 3 + 2i$$

$$-z = -3 + 2i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

b) $z = 4 + 2i$

$$\bar{z} = 4 - 2i$$

$$-z = -4 - 2i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{4}{20} + \left(-\frac{2}{20}\right)i = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$$

c) $z = -1 - 3i$

$$\bar{z} = -1 + 3i$$

$$-z = 1 + 3i$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

d) $z = -4 - i$

$$\bar{z} = -4 + i$$

$$-z = 4 + i$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{4}{17} + \frac{i}{17}$$

e) $z = 4_{45^\circ}$

$$\bar{z} = 4_{-45^\circ} = 4_{315^\circ}$$

$$-z = 4_{225^\circ}$$

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-45^\circ} = \left(\frac{1}{4}\right)_{315^\circ}$$

f) $z = 3_{270^\circ}$

$$\bar{z} = 3_{90^\circ}$$

$$-z = 3_{90^\circ}$$

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-270^\circ} = \left(\frac{1}{3}\right)_{90^\circ}$$

g) $z = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

$$\bar{z} = 2(\cos 150^\circ - i \sin 150^\circ) = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$-z = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}(\cos(-150^\circ) + i \sin(-150^\circ)) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \end{aligned}$$

h) $z = 2(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ) = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$

$$\bar{z} = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$-z = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}(\cos(-315^\circ) + i \sin(-315^\circ)) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \end{aligned}$$

37 Calcula el valor de m para que el número complejo $m + 4i$ tenga el mismo módulo que $\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$.

Hallamos primero el módulo de $m + 4i$ y lo igualamos al módulo de $\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$. Mediante este procedimiento obtenemos el valor de m :

$$\sqrt{m^2 + 16} = \sqrt{\frac{25}{2} + \frac{50}{4}} \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

Por tanto, los números complejos serían $3 + 4i$ y $-3 + 4i$.

Operaciones con números complejos en forma polar

38 Resuelve los siguientes productos.

a) $(3)^{\frac{3\pi}{4}} \cdot (2)^{\frac{\pi}{6}}$ **d)** $(4)^{\frac{\pi}{12}} \cdot (2)^{\frac{5\pi}{18}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^\pi$

b) $(\sqrt{2})^{\frac{\pi}{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{5\pi}{3}}$ **e)** $(2 + 2i) \cdot (\sqrt{2})^{\frac{\pi}{3}}$

c) $-3 \cdot 5_{45^\circ}$ **f)** $6 \cdot 2_{15^\circ}$

a) $3_{3\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 6_{11\pi/12}$

b) $(\sqrt{2})^{\pi/3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{5\pi/3} = 1_{2\pi} = 1_0$

c) $-3 \cdot 5_{45^\circ} = 3_{180^\circ} \cdot 5_{45^\circ} = 15_{225^\circ}$

d) $4_{\pi/12} \cdot 2_{5\pi/18} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^\pi = \left(\frac{8}{3}\right)_{49\pi/36}$

e) $(2 + 2i) \cdot (\sqrt{2})^{\pi/3} = (2\sqrt{2})_{\pi/4} \cdot (\sqrt{2})_{\pi/3} = 4_{7\pi/12}$

f) $6 \cdot 2_{15^\circ} = 6_{0^\circ} \cdot 2_{15^\circ} = 12_{15^\circ}$

39 Calcula los siguientes cocientes.

a) $\frac{10_{\frac{\pi}{3}}}{2_{\frac{\pi}{3}}}$

b) $\frac{2_\pi}{-2}$

c) $\frac{6_{30^\circ}}{2_{50^\circ}}$

d) $\frac{12_{30^\circ}}{i}$

a) $\frac{10_{\pi/3}}{2_{\pi/3}} = 5_0$

b) $\frac{2_\pi}{-2} = 1_0$

c) $\frac{6_{30^\circ}}{2_{50^\circ}} = 3_{-20^\circ} = 3_{340^\circ}$

d) $\frac{12_{30^\circ}}{i} = 12_{-60^\circ} = 12_{300^\circ}$

40 Calcula.

a) $(3 - 2i)^4$ **c)** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$

b) $(\sqrt{3} - i)^5$ **d)** $(2 + i)^3$

a) $(3 - 2i)^4 = (3 - 2i)^2(3 - 2i)^2 = (9 - 12i - 4)(9 - 12i - 4) = (5 - 12i)^2 = 25 - 120i - 144 = -119 - 120i$

b) $(\sqrt{3} - i)^5 = (\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i) = (3 - 2\sqrt{3}i - 1)(3 - 2\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3} - i) = (2 - 2\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3} - i) = (-8 - 8\sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i) = -16\sqrt{3} - 16i$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2}i$

d) $(2 + i)^3 = (2 + i)^2(2 + i) = (4 + 4i - 1)(2 + i) = (3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i - 4 = 2 + 11i$

41 Calcula.

a) $(1 - 2i)^{52}$ **c)** $\sqrt[4]{-81}i$

b) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12}$ **d)** $\sqrt[5]{3\sqrt{3} + \sqrt{3}i}$

a) $(1 - 2i)^{52} = (\sqrt{5}_{296,57^\circ})^{52} = 5_{296,57^\circ \cdot 52}^{26} = 5_{301,64^\circ}^{26}$

b) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12} = \left(\frac{2_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}}\right)^{12} = 2_{(60^\circ - 315^\circ) \cdot 12}^6 = 2_{180^\circ}^6 = -64$

c) $\sqrt[4]{-81}i = \sqrt[4]{81}_{270^\circ} \Rightarrow 3_{67,5^\circ}; 3_{157,5^\circ}; 3_{247,5^\circ}; 3_{337,5^\circ}$

d) $\sqrt[5]{3\sqrt{3} + \sqrt{3}i} = \sqrt[5]{30}_{18,43^\circ} \Rightarrow \sqrt[10]{30}_{3,69^\circ}; \sqrt[10]{30}_{75,69^\circ}; \sqrt[10]{30}_{147,69^\circ}; \sqrt[10]{30}_{219,69^\circ}; \sqrt[10]{30}_{291,69^\circ}$

42 Calcula el módulo y el argumento de:

$$(-1 + \sqrt{3}i)^3 \cdot (\sqrt{3} + i)^4 \cdot (\sqrt{3} - i) + i^{31}$$

Calculamos cada factor paso a paso, trabajando en forma polar:

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow m = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$\text{tg } \alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$, puesto que el afijo está en el segundo cuadrante.

Por tanto:

$$(-1 + \sqrt{3}i)^3 = (2_{120^\circ})^3 = 8_{360^\circ} = 8_{0^\circ}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i \Rightarrow m = 2$$

$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$, puesto que el afijo está en el primer cuadrante.

Por tanto:

$$(\sqrt{3} + i)^4 = (2_{30^\circ})^4 = 16_{120^\circ}$$

$$z_3 = \sqrt{3} - i \Rightarrow m = 2$$

$\text{tg } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330^\circ$, puesto que el afijo está en el cuarto cuadrante.

Por tanto:

$$\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$$

$$z_4 = i^{31} = i^3 = -i$$

Sustituyendo y realizando las operaciones que se indican, se obtiene:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 + z_4 = 8_{0^\circ} \cdot 16_{120^\circ} \cdot 2_{330^\circ} - i = 256_{450^\circ} - i = 256_{90^\circ} - i = 256i - i = 255i$$

Por tanto: $m = 255$, $\alpha = 90^\circ$

43 Resuelve las siguientes potencias.

$$a) \left[\left(\sqrt{3} \right)_{\frac{\pi}{3}} \right]^4 \quad b) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3 \quad c) \left(1 \frac{3\pi}{2} \right)^{50}$$

$$a) \left(\sqrt{3} \right)_{\frac{\pi}{3}}^4 = 9_{4\pi/3}$$

$$b) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$c) (1_{3\pi/2})^{50} = 1_{75\pi} = 1_\pi$$

44 Representa gráficamente las seis primeras potencias del número $z = 2 - 2i$.

$$z = 2 - 2i$$

$$z^4 = 64_{1260^\circ} = 64_{180^\circ}$$

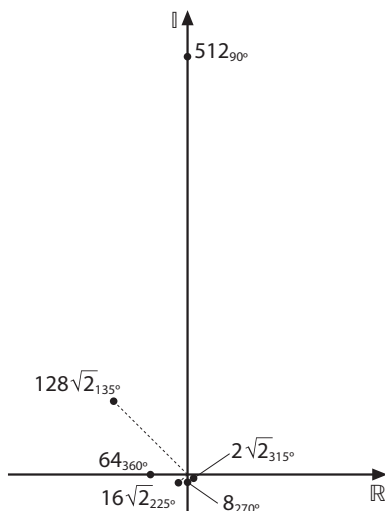
$$z^1 = 2\sqrt{2}_{315^\circ}$$

$$z^5 = 128\sqrt{2}_{1575^\circ} = 128\sqrt{2}_{135^\circ}$$

$$z^2 = 8_{630^\circ} = 8_{270^\circ}$$

$$z^6 = 512_{1890^\circ} = 512_{90^\circ}$$

$$z^3 = 16\sqrt{2}_{945^\circ} = 16\sqrt{2}_{225^\circ}$$



45 Calcula las siguientes raíces.

$$a) \sqrt[3]{3_{(\pi/3)}}$$

$$b) \sqrt{-i}$$

$$c) \sqrt{2 - 2i}$$

$$d) \sqrt[4]{-625}$$

$$e) \sqrt[3]{8i}$$

$$f) \sqrt[5]{243_{60^\circ}}$$

a) Hay dos raíces con módulo $\sqrt{3}$, y argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$$

Por tanto, las raíces son:

$$\sqrt{3}_{\pi/6} \text{ y } \sqrt{3}_{7\pi/6}$$

b) Existen dos raíces cuadradas de $-i$:

$$\sqrt{-i} = \sqrt{1_{270^\circ}} = \begin{cases} 1_{135^\circ} \\ 1_{315^\circ} \end{cases}$$

$$c) \sqrt{2 - 2i} = \sqrt{(\sqrt{8})_{315^\circ}} = \begin{cases} (\sqrt[4]{8})_{157,5^\circ} \\ (\sqrt[4]{8})_{337,5^\circ} \end{cases}$$

$$d) \sqrt[4]{-625} = \sqrt[4]{625_\pi} = \begin{cases} 5_{\pi/4} \\ 5_{3\pi/4} \\ 5_{5\pi/4} \\ 5_{7\pi/4} \end{cases}$$

$$e) \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{\pi/2}} = \begin{cases} 2_{\pi/6} \\ 2_{5\pi/6} \\ 2_{9\pi/6} \end{cases}$$

$$f) \sqrt[5]{243_{60^\circ}} = \begin{cases} 3_{12^\circ} \\ 3_{84^\circ} \\ 3_{156^\circ} \\ 3_{228^\circ} \\ 3_{300^\circ} \end{cases}$$

46 Calcula.

$$a) \sqrt[5]{1 + \sqrt{3}i}$$

$$b) (1 - i)^{5/4}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{-1 + i}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}i}}$$

$$d) \sqrt{\sqrt{3 + 3\sqrt{3}i}}$$

$$a) \sqrt[5]{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{60^\circ}} \Rightarrow \sqrt[5]{2}_{12^\circ}, \sqrt[5]{2}_{84^\circ}, \sqrt[5]{2}_{156^\circ}, \sqrt[5]{2}_{228^\circ}, \sqrt[5]{2}_{300^\circ}$$

$$b) (1 - i)^{5/4} = (\sqrt[4]{2}_{315^\circ})^{5/4} = \sqrt[4]{2}_{157,5^\circ} \Rightarrow \sqrt[8]{32}_{33,75^\circ}, \sqrt[8]{32}_{123,75^\circ}, \sqrt[8]{32}_{213,75^\circ}, \sqrt[8]{32}_{303,75^\circ}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{-1 + i}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}i}} = \frac{\sqrt[6]{((\sqrt[4]{2})_{135^\circ})^2}}{\sqrt[6]{(2_{60^\circ})^3}} = \sqrt[6]{\frac{2_{270^\circ}}{8_{180^\circ}}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)_{90^\circ}} \Rightarrow (\sqrt[3]{1/2})_{15^\circ}, (\sqrt[3]{1/2})_{75^\circ}, (\sqrt[3]{1/2})_{135^\circ}, (\sqrt[3]{1/2})_{195^\circ}, (\sqrt[3]{1/2})_{255^\circ}, (\sqrt[3]{1/2})_{315^\circ}$$

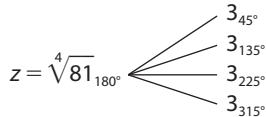
$$d) \sqrt{\sqrt{3 + 3\sqrt{3}i}} = \sqrt[4]{6_{60^\circ}} \Rightarrow \sqrt[4]{6}_{15^\circ}, \sqrt[4]{6}_{105^\circ}, \sqrt[4]{6}_{195^\circ}, \sqrt[4]{6}_{285^\circ}$$

47 Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $z^4 + 81 = 0$ d) $(z + 1)^2 + 25 = 0$
 b) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$ e) $z^2 + (3 - i) + (2 - 2i) = 0$
 c) $z^6 + 32z = 0$ f) $z^3 + z^2 + 15z - 17 = 0$

a) $z^4 + 81 = 0$ debe tener cuatro soluciones en el campo de los complejos.

$z = \sqrt[4]{-81}$. Escribimos -81 en forma polar, esto es, 81_{180° , con lo que las soluciones son las raíces cuartas de este número complejo:



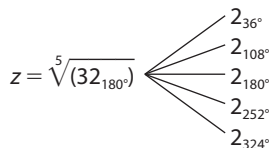
b) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$, trabajamos como con las bicuadradas, pero en el campo de los complejos.

Hacemos $x = z^2$, con lo que $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$, que es una solución doble.

Pero $z^2 = -1$, con lo que las soluciones de la ecuación son: i y $-i$, ambas dobles.

c) $z^6 + 32z = 0$, debe tener seis soluciones en el campo de los complejos.

$z(z^5 + 32) = 0 \Rightarrow z = 0$ y $z = \sqrt[5]{-32}$. Calculamos las raíces quintas de -32 , expresando previamente este número en forma polar: 32_{180°



Las seis soluciones son 0 , 2_{36° , 2_{108° , 2_{180° , 2_{252° y 2_{324° .

d) $(z + 1)^2 + 25 = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones en el campo de los complejos.

$$(z + 1)^2 = -25 \Rightarrow z + 1 = \sqrt{-25} \Rightarrow z = -1 \pm 5i$$

Es decir, las dos soluciones son:

$$-1 + 5i \text{ y } -1 - 5i$$

e) $z^2 + 5 - 3i = 0$ debe tener dos soluciones complejas.

$$z^2 = -5 + 3i, \text{ por lo que: } z = \sqrt{-5 + 3i}$$

Expresamos el radicando en forma polar y averiguamos las dos raíces que serán las soluciones de la ecuación.

$m = \sqrt{34}$, $\text{tg } \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 149,04^\circ$, pues su afijo está en el segundo cuadrante. Por tanto:

$$z = \sqrt{-5 + 3i} = \sqrt{(\sqrt{34}_{149,04^\circ})}$$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{34}_{74,52^\circ} = 0,64 + 2,33i \\ \sqrt[4]{34}_{254,52^\circ} = -0,64 - 2,33i \end{cases}$$

Así pues, las dos soluciones de la ecuación son:

$$0,64 + 2,33i \text{ y } -0,64 - 2,33i$$

f) $z^3 + z^2 + 15z - 17 = 0$, esta ecuación debe tener tres soluciones complejas.

Por Ruffini obtenemos la primera solución: $z = 1 = 1_{0^\circ}$

El cociente, $z^2 + 2z + 17 = 0$, debe tener dos soluciones.

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2} = \frac{-2 \pm 8i}{2} = -1 \pm 4i$$

Así pues, las tres soluciones de la ecuación son:

$$1, -1 + 4i \text{ y } -1 - 4i$$

Problemas de aplicación

48 Calcula el inverso de estos números complejos.

- a) $5_{\pi/4}$ b) $6i$ c) $2 - 2i$

¿Qué relación hay entre los módulos de un número complejo y los de su inverso? ¿Y entre los argumentos?

$$a) \frac{1}{5_{\pi/4}} = \left(\frac{1}{5}\right)_{-\pi/4}$$

$$b) \frac{1}{6i} = \frac{1}{6_{90^\circ}} = \left(\frac{1}{6}\right)_{-90^\circ}$$

$$c) \frac{1}{2 - 2i} = \frac{1}{\sqrt{8}_{315^\circ}} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)_{-315^\circ}$$

Los módulos de un número complejo y de su inverso son inversos y los argumentos opuestos.

49 Halla los complejos que cumplan que el cuadrado del inverso del opuesto dividido entre $(1/8)_{30^\circ}$ dé $2i$.

Si $z = m_\alpha$, el enunciado pide averiguar los complejos z que

$$\text{cumplen que } \left[\frac{1}{-(m_\alpha)}\right]^2 : \left(\frac{1}{8}\right)_{30^\circ} = 2_{90^\circ}.$$

$$\text{Como } \left[\frac{1}{-(m_\alpha)}\right]^2 = \left[\frac{1}{m_{180^\circ + \alpha}}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{m}\right)_{360^\circ - 180^\circ - \alpha}\right]^2 = \left(\frac{1}{m}\right)^2_{360^\circ - 2\alpha}, \text{ sustituyendo tenemos:}$$

$$\left[\left(\frac{1}{m}\right)^2_{360^\circ - 2\alpha}\right] : \left(\frac{1}{8}\right)_{30^\circ} = 2_{90^\circ}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^2 : \left(\frac{1}{8}\right) = 2 \text{ y } 360^\circ - 2\alpha - 30^\circ = 90^\circ$$

de lo que se obtiene: $m = 2$ y $\alpha = 120^\circ$

Así pues, los complejos son: $2_{120^\circ + k \cdot 180^\circ}$, $k \in \mathbb{Z}$

50 Determina dos números complejos z_1 y z_2 sabiendo que su cociente es 3, que la suma de sus argumentos es $\pi/3$ y que la suma de sus módulos es 4.

$$\frac{m_\alpha}{m'_\beta} = 3 \Rightarrow \frac{m}{m'} = 3 \text{ y } \alpha - \beta = 0^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0^\circ \\ \alpha + \beta = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ$$

$$\begin{cases} m = 3m' \\ m + m' = 4 \end{cases} \Rightarrow m' = 1, m = 3$$

Los números son 3_{30° y 1_{30° .

51 Calcula dos complejos cuyo cociente es 4, sus argumentos suman 40° y la suma de sus módulos es 14.

Sean los complejos m_α y n_β .

Su cociente es 4, es decir 4_{0° , por lo que tenemos:

$$\frac{m}{n} = 4 \text{ y } \alpha - \beta = 0^\circ$$

La suma de sus argumentos es 40° , por lo que tenemos:

$$\alpha + \beta = 40^\circ$$

La suma de sus módulos es 14: $m + n = 14$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m/n = 4 \\ m + n = 14 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{56}{5}, n = \frac{14}{5}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0^\circ \\ \alpha + \beta = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = 20^\circ, \beta = 20^\circ$$

Por lo que los complejos buscados son:

$$m_\alpha = \left(\frac{56}{5}\right)_{20^\circ} \text{ y } n_\beta = \left(\frac{14}{5}\right)_{20^\circ}$$

- 52** Calcula dos números complejos tales que su producto sea $8i$ y uno de ellos sea el cuadrado del otro.

Sean los complejos m_α y n_β . Su producto es $8i$, es decir, $8_{\pi/2}$:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = 8_{\pi/2} \Rightarrow m \cdot n = 8 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Uno de ellos es el cuadrado del otro:

$$m_\alpha = (n_\beta)^2 = (n^2)_{2\beta} \Rightarrow m = n^2 \text{ y } \alpha = 2\beta$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot n = 8 \\ m = n^2 \end{cases} \Rightarrow m = 4, n = 2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi/2 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$$

Con lo que los dos complejos buscados son:

$$m_\alpha = 4_{\pi/3} \text{ y } n_\beta = 2_{\pi/6}$$

- 53** El producto de dos números complejos es $3i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $1/3$. Cálculalos.

Sean los complejos: m_α y n_β . Del enunciado se deduce que:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = 3_{\pi/2} \Rightarrow m \cdot n = 3 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{m_\alpha^3}{n_\beta} = \left(\frac{1}{3}\right)_{0^\circ} \Rightarrow \frac{m^3}{n} = \frac{1}{3} \text{ y } 3\alpha - \beta = 0$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot n = 3 \\ \frac{m^3}{n} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 3$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}, \beta = \frac{3\pi}{8}$$

Con lo que los complejos son:

$$m_\alpha = 1_{\pi/8} \text{ y } n_\beta = 3_{3\pi/8}$$

- 54** Dos números complejos tienen el mismo módulo, sus argumentos suman 50° y uno de ellos es el conjugado del cuadrado del otro. Cálculalos.

Sean los complejos m_α y n_β . Del enunciado se deduce:

$$m = n, \alpha + \beta = 50^\circ$$

$$m_\alpha = \overline{(n_\beta)^2} = \overline{(n^2)_{2\beta}} = (n^2)_{360^\circ - 2\beta} \Rightarrow m = n^2, \alpha = 360^\circ - 2\beta$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m = n \\ m = n^2 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 50^\circ \\ \alpha = 360^\circ - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -260^\circ = 100^\circ, \beta = 310^\circ$$

Con lo que los complejos son:

$$m_\alpha = 1_{100^\circ}, n_\beta = 1_{310^\circ}$$

- 55** Determina los números complejos que cumplan que el cubo de su conjugado coincida con su opuesto.

Hay que hallar la expresión de los complejos tales que el cubo de su conjugado coincida con el opuesto, es decir: $(\bar{z})^3 = -z$

Si $z = m_\alpha$, el enunciado se traduce en:

$$(m_{360^\circ - \alpha})^3 = m_{180^\circ + \alpha} \Rightarrow m^3 = m \text{ y } 3(360^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha$$

$m = 1$, puesto que no consideramos la solución trivial $m = 0$, y $m > 0$.

$$3(360^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 225^\circ$$

Por tanto, los complejos buscados son:

$$z = 1_{225^\circ + k \cdot 360^\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

- 56** Calcula todos los números complejos que cumplan que el cuadrado de su inverso sea el opuesto de su conjugado.

Hay que encontrar la expresión de $z \in \mathbb{C}$, tal que:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2 = -\bar{z}$$

Si $z = m_\alpha$, esta igualdad se traduce en:

$$\left(\frac{1}{m_\alpha}\right)^2 = -(m_{360^\circ - \alpha}) = m_{180^\circ - \alpha}$$

$$\text{y, como: } \left(\frac{1}{m_\alpha}\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{m}\right)_{360^\circ - \alpha}\right]^2 = \left(\frac{1}{m^2}\right)_{2(360^\circ - \alpha)}$$

tenemos:

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)_{2(360^\circ - \alpha)} = m_{180^\circ - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{m^2} = m$$

$$\text{y } 720^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$$

de lo que se deduce que:

$$m = 1 \text{ y } \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, los complejos buscados son:

$$z = 1_{180^\circ + k \cdot 360^\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

- 57** Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $8i$. Calcula dicho número y las otras raíces.

Dado que $8i = 8_{90^\circ}$ es una de las raíces cúbicas, $z = (8_{90^\circ})^3 = 512_{270^\circ} = -512i$, y haciendo uso de la interpretación gráfica de la radicación en los complejos, se puede deducir que las otras dos raíces son: 8_{210° y 8_{330° .

- 58** Encuentra el número complejo que sumado a $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$ da como resultado $4(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$. Expresa la solución en forma polar, binómica y trigonométrica.

Dado que hay que sumar, es conveniente trabajar en notación binómica o trigonométrica.

$$(a + bi) + (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3 = 4(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

Primero se calcula la potencia del binomio $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$, para lo cual es conveniente usar notación polar:

$m = 2$, $\text{tg } \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$, puesto que el afijo está en el segundo cuadrante.

$$\text{Por tanto: } (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3 = (2_{135^\circ})^3 = 8_{405^\circ} = 8_{45^\circ} = 8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

Aislado el complejo buscado:

$$a + bi = 4(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) - 8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$a = 4 \cos 315^\circ - 8 \cos 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$b = 4 \sin 315^\circ - 8 \sin 45^\circ = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 8 \frac{\sqrt{2}}{2} = -6\sqrt{2}$$

$$\text{Es decir: } a + bi = -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$$

Buscamos el módulo $m = 4\sqrt{5}$

$$\text{tg } \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 251,57^\circ.$$

Con esto el número complejo buscado es:

$$a + bi = -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i = (4\sqrt{5})_{251,57^\circ} = 4\sqrt{5}(\cos 251,57^\circ + i \sin 251,57^\circ)$$

- 59** Dados tres números complejos, z_1 , z_2 y z_3 , sabemos que z_2 es el conjugado de z_1 y que z_3 es el conjugado del opuesto de z_2 . ¿Cómo son entre ellos z_1 y z_3 ?

La transcripción del enunciado es:

$$z_2 = \bar{z}_1$$

$$z_3 = \overline{(-z_2)}$$

Se deduce que la relación entre z_3 y z_1 debe ser:

$$z_3 = \overline{(-\bar{z}_1)} = -z_1$$

60 Calcula $\sin 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ utilizando la fórmula de De Moivre.

La fórmula de De Moivre es:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Aplicamos la fórmula a una potencia de exponente cuatro:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha$$

Desarrollamos el primer miembro y se obtiene:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \\ &= (\cos^2 \alpha + 2i \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \\ &\quad \cdot (\cos^2 \alpha + 2i \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \cos^4 \alpha + 2i \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &\quad + 2i \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \\ &\quad - 2i \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \\ &\quad - 2i \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

Igualando:

$$\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha + (4 \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha)i$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ \sin 4\alpha &= 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

61 Comprueba las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble demostradas en la UNIDAD 4 empleando la fórmula de De Moivre.

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

De forma análoga al ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 &= \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha (i \sin \alpha) + (i \sin \alpha)^2 = \\ &= \cos^2 \alpha + (2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha)i - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Igualando:

$$\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + (2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha)i - \sin^2 \alpha$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

62 Tenemos un triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ y $C(-3, 2)$, y lo giramos un ángulo de 30° con centro el origen de coordenadas. Calcula los vértices del triángulo girado.

Los vértices del triángulo son los afijos de los siguientes números complejos:

$$A(1, 1) \Rightarrow 1 + i$$

$$B(2, -1) \Rightarrow 2 - i$$

$$C(-3, 2) \Rightarrow -3 + 2i$$

$$\text{Girar } 30^\circ \text{ es multiplicar por } 1_{30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

Multiplicando los complejos que representan los vértices por $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$, se obtienen complejos cuyos afijos son los vértices del triángulo resultado de girar 30° .

$$A'(1 + i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \right)$$

$$\Rightarrow A' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)$$

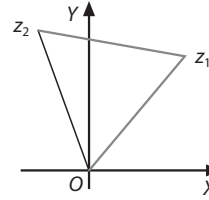
$$B'(2 - i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\Rightarrow B' = \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C'(-3 + 2i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2} + \frac{2\sqrt{3}-3}{2}i \right)$$

$$\Rightarrow C' = \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \right)$$

63 Los afijos de los puntos z_1 y z_2 forman un triángulo equilátero con el origen de coordenadas. Calcula z_2 , sabiendo que $z_1 = 4 + 5i$.



Las coordenadas polares del punto $(4, 5)$ son las siguientes:

$$m = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha = 51,34^\circ$$

Imponiendo un giro de 60° , tenemos:

$$\sqrt{41}_{51,34^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{41}_{111,34^\circ} \Rightarrow (-2,33; 5,96) = -2,33 + 5,96i$$

Observa que existe otro triángulo equilátero cuyo tercer vértice se obtendría imponiendo un giro de -60° :

$$\sqrt{41}_{51,34^\circ} \cdot 1_{-60^\circ} = \sqrt{41}_{-8,66^\circ} \Rightarrow (6,33; -0,96)$$

64 Un hexágono regular centrado en el origen tiene un vértice en el punto $(3, 3)$. Calcula los otros vértices.

A partir de un vértice de un hexágono se pueden obtener los otros cinco multiplicando el complejo correspondiente al vértice dado por 1_{60° .

Por comodidad, en este ejercicio trabajaremos con notación polar:

$(3, 3)$ es el afijo correspondiente al complejo $\sqrt{18}_{45^\circ}$. Por tanto:

$$\sqrt{18}_{45^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{105^\circ} \Rightarrow (-1,1; 4,1)$$

$$\sqrt{18}_{105^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{165^\circ} \Rightarrow (-4,1; 1,1)$$

$$\sqrt{18}_{165^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{225^\circ} \Rightarrow (-3; -3)$$

$$\sqrt{18}_{225^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{285^\circ} \Rightarrow (1,1; -4,1)$$

$$\sqrt{18}_{285^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \sqrt{18}_{345^\circ} \Rightarrow (4,1; -1,1)$$

65 Considera las siguientes aplicaciones en el plano:

α : giro de centro el origen y de amplitud 30° .

β : simetría respecto del origen de coordenadas.

γ : simetría respecto del eje de abscisas.

δ : giro de centro el origen y de amplitud 60° .

Halla las coordenadas del punto que se obtienen al aplicar sucesivamente α , β , γ , δ , al punto $(2, 3)$.

$$(2, 3) \Rightarrow \sqrt{13}_{56,31^\circ}$$

$$\alpha \Rightarrow \sqrt{13}_{56,31^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = \sqrt{13}_{86,31^\circ}$$

$$\beta \Rightarrow \sqrt{13}_{266,31^\circ}$$

$$\gamma \Rightarrow \sqrt{13}_{93,69^\circ}$$

$$\delta \Rightarrow \sqrt{13}_{93,69^\circ + 60^\circ} = \sqrt{13}_{153,69^\circ} = (-3,23; 1,59)$$

1. Escribe un número complejo que sea real y otro que sea imaginario puro. Explica cada caso.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

 Número real: $2 + 0i$

Como la parte imaginaria es nula, el número es real.

 Número imaginario puro: $0 - 3i$

Como la parte real es nula, el número es imaginario puro.

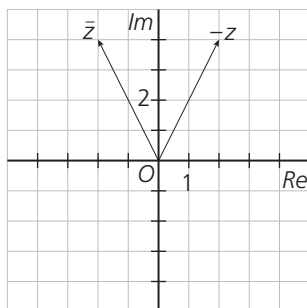
2. Halla el conjugado y el opuesto de los siguientes números. Representalos en el plano.

a) $z = -2 - 4i$

b) $z = 3 + 5i$

a) Conjugado: $-2 + 4i$

Opuesto: $+2 + 4i$

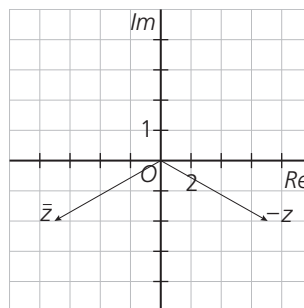


c) $z = -7 + 2i$

d) $z = 8 - 3i$

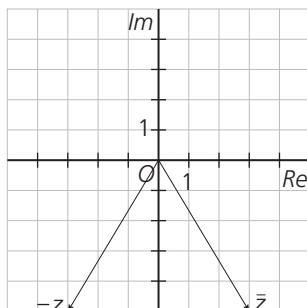
c) Conjugado: $-7 - 2i$

Opuesto: $+7 - 2i$



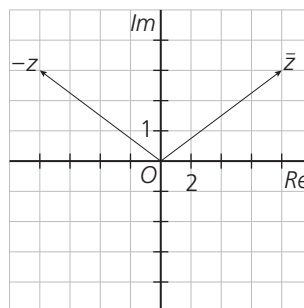
b) Conjugado: $3 - 5i$

Opuesto: $-3 - 5i$



d) Conjugado: $8 + 3i$

Opuesto: $-8 + 3i$


3. Realiza estas operaciones, pasando a forma binómica o polar, según convenga.

a) $(2 - 3i) + (-5 + 4i)$

b) $(1 - i) - (-8 + 7i)$

c) $(2 - 9i) \cdot (3 + 4i)$

a) $-3 + i$

b) $9 - 8i$

c) $6 + 8i - 27i + 36 = 42 - 19i$

d) $\frac{3+i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{6-9i+2i+3}{4+9} = \frac{9-7i}{13}$

d) $\frac{3+i}{2+3i}$

e) $2_{30^\circ} + 5_{60^\circ}$

f) $(1+i)^5$

e) $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) + 5(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2i \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 5i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{5}{2} + i \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$

f) $(1+i)^5 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^5 = (\sqrt{2^5})_{225^\circ} = (4\sqrt{2})_{225^\circ}$

4. Utiliza la fórmula de De Moivre para calcular las siguientes potencias.

a) $(2 - 3i)^3$

b) $(-1 + 4i)^3$

c) $(3 - i)^2$

d) $(1 + i)^6$

a) $(2 - 3i)^3 = (\sqrt{13}_{-56,31^\circ})^3 = \sqrt{13^3}(\cos(3 \cdot (-56,31)) + i \sin(3 \cdot (-56,31))) = -46 - 9i$

b) $(-1 + 4i)^3 = (\sqrt{17}_{104,04^\circ})^3 = \sqrt{17^3}(\cos(3 \cdot (104,04)) + i \sin(3 \cdot (104,04))) = 47 - 52i$

c) $(3 - i)^2 = (\sqrt{10}_{-18,43^\circ})^2 = 10(\cos(2 \cdot (-18,43)) + i \sin(2 \cdot (-18,43))) = 8 - 6i$

d) $(1 + i)^6 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^6 = 8(\cos(6 \cdot 45) + i \sin(6 \cdot 45)) = -8i$

5. Dado el número complejo 2_{70° , escribe sus cinco primeras potencias y represéntalas.

$$(2_{70^\circ})^2 = 4_{140^\circ}$$

$$(2_{70^\circ})^3 = 8_{210^\circ}$$

$$(2_{70^\circ})^4 = 16_{280^\circ}$$

$$(2_{70^\circ})^5 = 32_{350^\circ}$$

Comprobar que el alumno lo representa correctamente.

6. Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

$$(z - (3 + 2i)) \cdot (z - (3 - 2i)) = 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 13 = 0$$

7. Resuelve estas ecuaciones e interpreta las soluciones geoméricamente.

a) $z^4 + 256 = 0$

c) $z^3 - 11z^2 + 36z - 26 = 0$

b) $z^3 - 6z^2 + 10z = 0$

d) $z^4 - 3z^3 - 3z^2 + 61z = 156$

a) $z_1 = 4_{45^\circ}$

$z_2 = 4_{135^\circ}$

$z_3 = 4_{225^\circ}$

$z_4 = 4_{315^\circ}$

b) $z_1 = 0$

$z_2 = 3 + i$

$z_3 = 3 - i$

c) $z_1 = 1$

$z_2 = 5 + i$

$z_3 = 5 - i$

d) $z_1 = -4$

$z_2 = 3$

$z_3 = 2 - 3i$

$z_4 = 2 + 3i$

8. Halla las raíces que se indican. ¿Qué obtenemos en cada caso al unir los afijos que son solución?

a) $\sqrt[3]{2 - 2i}$

b) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3} + 2i}$

c) $\sqrt[5]{-3 - 3\sqrt{3}i}$

d) $\sqrt[6]{1 - i}$

a) $2 - 2i = \sqrt{8}_{-45^\circ}$

$z_1 = \sqrt{2}_{-15^\circ}$

$z_2 = \sqrt{2}_{105^\circ}$

$z_3 = \sqrt{2}_{225^\circ}$

b) $-2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^\circ}$

$z_1 = \sqrt[4]{4}_{37,5^\circ}$

$z_2 = \sqrt[4]{4}_{127,5^\circ}$

$z_3 = \sqrt[4]{4}_{217,5^\circ}$

$z_4 = \sqrt[4]{4}_{307,5^\circ}$

c) $-3 - 3\sqrt{3}i = 6_{240^\circ}$

$z_1 = \sqrt[5]{6}_{48^\circ}$

$z_2 = \sqrt[5]{6}_{120^\circ}$

$z_3 = \sqrt[5]{6}_{192^\circ}$

$z_4 = \sqrt[5]{6}_{264^\circ}$

$z_5 = \sqrt[5]{6}_{336^\circ}$

d) $1 - i = \sqrt{2}_{-45^\circ}$

$z_1 = \sqrt[12]{2}_{-7,5^\circ}$

$z_2 = \sqrt[12]{2}_{52,5^\circ}$

$z_3 = \sqrt[12]{2}_{112,5^\circ}$

$z_4 = \sqrt[12]{2}_{172,5^\circ}$

$z_5 = \sqrt[12]{2}_{232,5^\circ}$

$z_6 = \sqrt[12]{2}_{292,5^\circ}$

9. Halla a para que el número $\frac{3 + ai}{a + 2i}$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

$$\frac{3 + ai}{a + 2i} \cdot \frac{a - 2i}{a - 2i} = \frac{3a - 6i + a^2i + 2a}{a^2 + 4} = \frac{5a}{a^2 + 4} + i \cdot \frac{a^2 - 6}{a^2 + 4}$$

a) $a^2 - 6 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{6}$

b) $5a = 0 \rightarrow a = 0$

10. El cociente de dos números complejos es $3i$. Halla estos dos números sabiendo que la suma de sus argumentos es 150° y la suma de sus módulos es 20.

$$\frac{R_\alpha}{r_\beta} = \left(\frac{R}{r}\right)_{\alpha - \beta} = 3i = 3_{90^\circ}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 90^\circ \\ \alpha + \beta = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{R}{r} = 3 \\ R + r = 20 \end{cases} \Rightarrow R = 15, r = 5$$

Los números son 15_{120° y 5_{30° .